

## PRZESTRZEŃ ROBOCZA ROBOTA EKSPERYMENTALNEGO

*Streszczenie:* Praca przedstawia analityczny opis przestrzeni roboczej manipulatora robota eksperymentalnego. Robot ten jest wyposażony w manipulator IRb-6 mogący się poruszać po torze jezdnym LP-1 o długości 150 cm. Przestrzeń roboczą tego manipulatora opisano względem układu współrzędnych stanowiska. Ze względu na strukturę kinematyczną tego manipulatora zastosowano do opisu jego przestrzeni roboczej właściwej układ cylindryczny. Przestrzeń tę podzielono na jedenaście obszarów. Dla każdego z tych obszarów wyznaczono analityczny opis.

*Abstract:* Work space analytical description of experimental robot manipulator is presented in this paper. The robot have IRb-6 manipulator, which may move on LP-1 track 150 cm. long. Work space of this manipulator is described in relation to station. From kinematic structure result, that to describe its work space is most usable cylindrical coordinates system. Therefore this system to this description is used. This space is divided on eleven parts. For each of this parts the analytical description is presented.

### 1. WPROWADZENIE

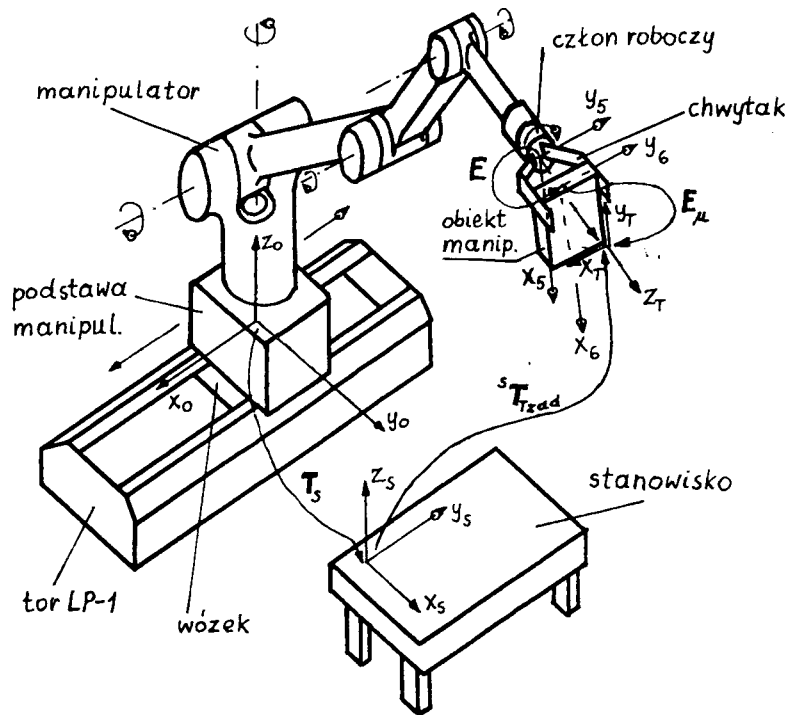
Przedstawiony tu opis przestrzeni roboczej robota eksperymentalnego umożliwia badanie możliwości uchwycenia przedmiotu manipulacji przez chwytak bez konieczności obliczania współrzędnych naturalnych manipulatora. Robot ten jest wyposażony w manipulator IRb-6 z pięcioma stopniami swobody, z podstawą zamocowaną do wózka poruszającego się po torze jezdnym LP-1 jak na rys.1.

Układy sterowania tego robota są przygotowane do współpracy z systemem wizyjnym obserwującym otoczenie. Po pozyskaniu przez system wizyjny współrzędnych kartezjańskich punktu docelowego pozycjonowania [1,2] generator trajektorii będzie obliczał wartości współrzędnych kartezjańskich położenia i orientacji kolejnych punktów przejściowych [1,2], stanowiących trajektorię zadaną obiektowi manipulacji. Punkty te mają być osiągnięte w czasie ruchu przez układ współrzędnych  $x_T y_T z_T$ , skojarzony z obiektem manipulacji. Trajektorii obiektu manipulacji odpowiada trajektoria układu współrzędnych  $x_5 y_5 z_5$ , skojarzonego z członem roboczym lub krócej trajektoria członu roboczego. Do członu roboczego zamocowany jest chwytak, który w zdefiniowany sposób obejmuje obiekt manipulacji. Przyjmijmy, że położenie i orientację układu współrzędnych obiektu manipulacji względem układu współrzędnych  $x_6 y_6 z_6$  skojarzonego z chwytakiem opisuje macierz jednorodna  $E_\mu$ , a macierz jednorodna  $E$  opisuje położenie i orientację układu współrzędnych  $x_6 y_6 z_6$  względem układu  $x_5 y_5 z_5$  (patrz rys.1). Przy tym założeniu możemy obliczyć współrzędne

kartezjańskie punktów przejściowych trajektorii członu roboczego, odpowiadające punktom przejściowym trajektorii zadanej obiektu manipulacji.

Do opisu trajektorii zadanej obiektu manipulacji zwiążemy ze stanowiskiem układ współrzędnych  $x_s, y_s, z_s$ . Trajektorię zadaną obiektu manipulacji tzn. położenie i orientację układu  $x_T, y_T, z_T$  opisuje względem układu  $x_s, y_s, z_s$  macierz jednorodna  ${}^sT_{Tzad}$  (patrz rys.1).

Podstawowym warunkiem koniecznym kinematycznym realizacji trajektorii zadanej obiektu manipulacji jest przynależność wszystkich punktów trajektorii członu roboczego (odpowiadających punktom trajektorii zadanej obiektu manipulacji) do przestrzeni roboczej właściwej manipulatora [3]. Przestrzeń robocza właściwa wynika ze struktury kinematycznej manipulatora i jest to zbiór punktów, które może osiągnąć początek układu współrzędnych  $x_5, y_5, z_5$ . Punkty te opisują współrzędne położenia  $x_0, y_0, z_0$  względem układu  $x_0, y_0, z_0$  skojarzonego z podstawą manipulatora.



Rys.1. Manipulator robota eksperymentalnego

Do zbadania, czy dany punkt przejściowy trajektorii zadanej należy do przestrzeni roboczej właściwej manipulatora, musimy znać jego opis względem układu  $x_0, y_0, z_0$ , a nie względem układu stanowiska  $x_s, y_s, z_s$ . Dlatego dodatkowo jest niezbędny opis trajektorii zadanej obiektu manipulacji względem układu współrzędnych  $x_0, y_0, z_0$  za pomocą położenia i orientacji układu  $x_5, y_5, z_5$ , wynikającego z macierzy  $T_{szad}$ . Z rys.1 wynika następująca postać tej macierzy:

$$\mathbf{T}_{5zad} = \mathbf{T}_s {}^s \mathbf{T}_{Tzad} \mathbf{E}_\mu^{-1} \mathbf{E}^{-1}. \quad (1)$$

Macierz  $\mathbf{T}_s$  opisuje układ współrzędnych  $x_s, y_s, z_s$  względem układu  $x_0, y_0, z_0$ .

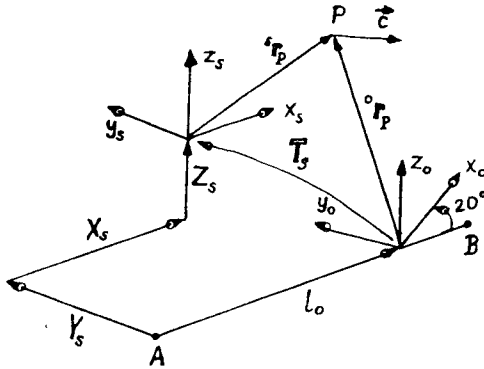
Człon roboczy możemy opisać względem stanowiska za pomocą macierzy  ${}^s \mathbf{T}_{5zad}$ , która jest równa:

$${}^s \mathbf{T}_{5zad} = {}^s \mathbf{T}_{Tzad} \mathbf{E}_\mu^{-1} \mathbf{E}^{-1}. \quad (2)$$

Robot eksperymentalny jest wyposażony w manipulator z ruchomą podstawą. Podstawa może poruszać się ruchem prostoliniowym wzdłuż prostej AB jak na rys.2, równoległej do osi x układu  $x_s, y_s, z_s$ . Macierz  $\mathbf{T}_s$  opisująca ten układ względem układu  $x_0, y_0, z_0$  ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_s = \text{Rot}(x, -20^\circ) \text{Trans}(X_s - l_0, Y_s, Z_s). \quad (3)$$

$l_0$  jest dodatkową współrzędną naturalną tego manipulatora i może zmieniać się w granicach od 0 do 1500mm.  $X_s, Y_s, Z_s$  są współrzędnymi początku układu współrzędnych  $x_s, y_s, z_s$  zaznaczonymi na rys.2. Punkt P na rys.2 ilustruje położenie początku układu współrzędnych



Rys.2. Układy współrzędnych  $x_s, y_s, z_s$  i  $x_0, y_0, z_0$ .

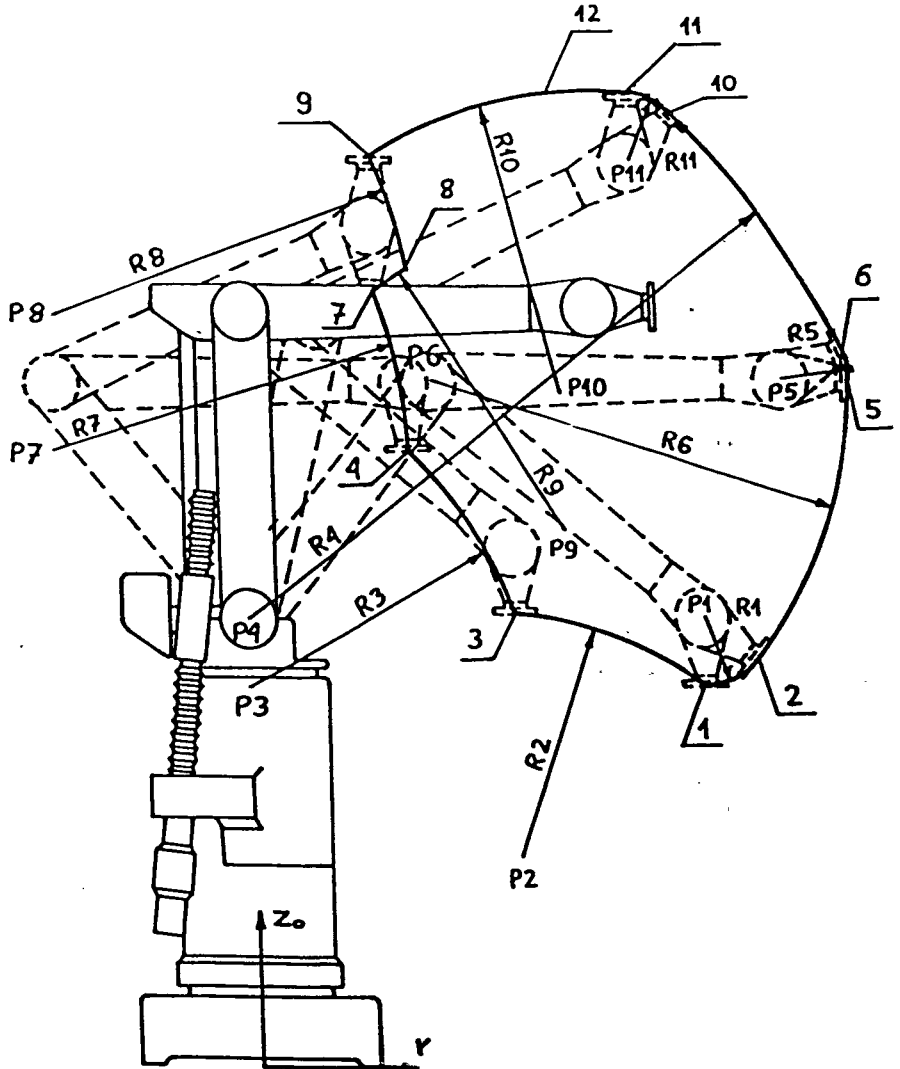
$x_s, y_s, z_s$ . Przyjmujemy, że współrzędne  $x_s, y_s, z_s$  opisują położenie  ${}^s \mathbf{r}_P$  początku układu  $x_s, y_s, z_s$  (odpowiadające trajektorii zadanej  ${}^s \mathbf{T}_{5zad}$ ) względem układu  $x_s, y_s, z_s$ , a współrzędne  $x_0, y_0, z_0$  położenie  ${}^0 \mathbf{r}_P$  początku układu  $x_s, y_s, z_s$  (odpowiadające trajektorii zadanej  $\mathbf{T}_{5zad}$ ) względem układu  $x_0, y_0, z_0$ . Zatem

$${}^s \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0 \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$${}^0 \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s {}^s \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} (X_s + x_s - l_0) \cos 20^\circ + (Y_s + y_s) \sin 20^\circ \\ -(X_s + x_s - l_0) \sin 20^\circ + (y_s + Y_s) \cos 20^\circ \\ Z_s + z_s \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

W drugim punkcie przedstawimy opis przestrzeni roboczej manipulatora IRb-6 za pomocą współrzędnych  $x_0, y_0, z_0$ . Opis ten wynika ze struktury kinematycznej tego manipulatora. W trzecim punkcie przedstawimy przestrzeń roboczą robota eksperymentalnego oraz sposób wyznaczania położenia wózka na torze jezdnym. W czwartym punkcie sformułujemy wnioski.

## 2. PRZESTRZEŃ ROBOCZA MANIPULATORA IRb-6



Rys.3. Przekrój przestrzeni roboczej manipulatora w płaszczyźnie  $rz_0$ .

Możliwe położenia początku układu współrzędnych  $x_3, y_3, z_3$  względem układu  $x_0, y_0, z_0$ , wynikające ze struktury kinematycznej manipulatora tworzą przestrzeń roboczą właściwą [3]. Rys.3 przedstawia przekrój przestrzeni roboczej właściwej w płaszczyźnie  $z_0$ , gdzie współrzędna  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Wszystkie wymiary i współrzędne punktów przedstawione na rys.3 są wyznaczone na podstawie dokumentacji techniczno-ruchowej manipulatora IRb-6. Przestrzeń roboczą podzielimy na 11 obszarów za pomocą prostych równoległych do osi  $r$ . Opis tej przestrzeni tworzą nierówności  $r_{\min}(z_0) \leq r \leq r_{\max}(z_0)$ .

$$513 + \sqrt{450^2 - (z_0 - 174)^2} \leq r \leq 802 + \sqrt{95^2 - (z_0 - 614)^2} \quad \text{dla } 519 \leq z_0 \leq 553.$$

$$513 + \sqrt{450^2 - (z_0 - 174)^2} \leq r \leq 289 + \sqrt{765^2 - (z_0 - 1045)^2} \quad \text{dla } 553 \leq z_0 \leq 624.$$

$$\sqrt{514^2 - (z_0 - 605)^2} \leq r \leq 289 + \sqrt{765^2 - (z_0 - 1045)^2} \quad \text{dla } 624 \leq z_0 \leq 950.$$

$$-289 + \sqrt{670^2 - (z_0 - 950)^2} \leq r \leq 289 + \sqrt{765^2 - (z_0 - 1045)^2} \quad \text{dla } 950 \leq z_0 \leq 1045.$$

$$-289 + \sqrt{670^2 - (z_0 - 950)^2} \leq r \leq 959 + \sqrt{95^2 - (z_0 - 1045)^2} \quad \text{dla } 1045 \leq z_0 \leq 1091.$$

$$-289 + \sqrt{670^2 - (z_0 - 950)^2} \leq r \leq \sqrt{1114^2 - (z_0 - 700)^2} \quad \text{dla } 1091 \leq z_0 \leq 1233.$$

$$607 - \sqrt{450^2 - (z_0 - 888)^2} \leq r \leq \sqrt{1114^2 - (z_0 - 700)^2} \quad \text{dla } 1233 \leq z_0 \leq 1269.$$

$$-289 + \sqrt{670^2 - (z_0 - 1140)^2} \leq r \leq \sqrt{1114^2 - (z_0 - 700)^2} \quad \text{dla } 1269 \leq z_0 \leq 1423.$$

$$607 - \sqrt{450^2 - (z_0 - 1078)^2} \leq r \leq \sqrt{1114^2 - (z_0 - 700)^2} \quad \text{dla } 1423 \leq z_0 \leq 1485.$$

$$607 - \sqrt{450^2 - (z_0 - 1078)^2} \leq r \leq 723 + \sqrt{95^2 - (z_0 - 1418)^2} \quad \text{dla } 1485 \leq z_0 \leq 1513.$$

$$607 - \sqrt{450^2 - (z_0 - 1078)^2} \leq r \leq 607 + \sqrt{450^2 - (z_0 - 1078)^2} \quad \text{dla } 1513 \leq z_0 \leq 1528. \quad (5)$$

Inne ograniczenie przestrzeni roboczej właściwej wynika z ograniczonego kąta obrotu kolumny manipulatora wokół osi  $z_0$ . Dlatego zadany punkt początku układu  $x_3, y_3, z_3$  jest poza przestrzenią roboczą dla

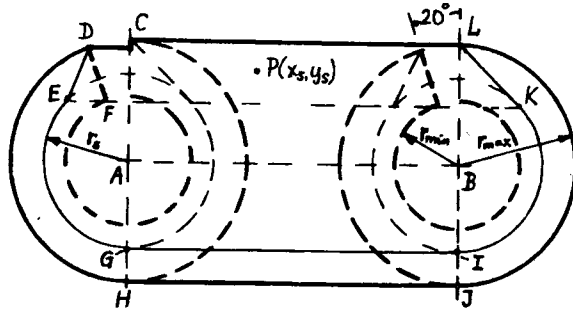
$$y_0 > 0 \quad \text{ i } \quad 0 < \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} < \cos 70^\circ.$$

### 3. PRZESTRZEŃ ROBOCZA ROBOTA EKSPERYMENTALNEGO

Przestrzeń robocza właściwa manipulatora poruszającego się po torze jezdnym jest poszerzoną przestrzenią roboczą właściwą manipulatora IRb-6. Jej przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi  $z_0$  przedstawia rys.4. Powierzchnia tego przekroju jest ograniczona linią CDHJLC. Promienie  $AH=BJ=r_{\max}$  oraz  $AG=BI=r_{\min}$  zależą od  $z_0$  jak w formule (5). Łatwo zauważyć z formuły (5), że dla  $z_0 \leq 519\text{mm}$ . lub  $z_0 \geq 1528\text{mm}$ . pole powierzchni tego przekroju jest zerowe. Promień łuków AE i BK jest średnią arytmetyczną  $r_s = (r_{\max} + r_{\min}) / 2$ . Wiele punktów tej przestrzeni może być osiągnięta przy nieskończonej wielu wartościach  $l_0$ . Dlatego przyjmujemy, że  $l_0$  powinno zapobiec ulokowaniu zadanego punktu P na granicy przekroju przestrzeni roboczej jeśli to możliwe. Dla obszaru

$$r_{\max} \cos 20^\circ < Y_s + y_s < r_{\max} \quad \text{ i } \quad 0 < X_s + x_s \leq 1500\text{mm} + f_1(y_s)$$

$$l_0 = X_s + x - f_1(y_s). \quad (6)$$



Rys.4. Przekrój przestrzeni roboczej robota eksperymentalnego.

Dla obszaru  $r_{\min} \cos 20^\circ \leq Y_s + y_s \leq r_{\max} \cos 20^\circ$  i  $f_1(y_s) \leq X_s + x_s \leq 1500\text{mm} + f_2(y_s)$

$$l_0 = X_s + x - f_1(y_s) \text{ lub } l_0 = X_s + x - f_2(y_s). \quad (7)$$

$$f_1(y_s) = \frac{\sqrt{r_s^2 - r_{\min}^2 \cos^2 20^\circ}}{r_{\max} - r_{\min} \cos 20^\circ} [r_{\max} - (Y_s + y_s)],$$

$$f_2(y_s) = -\frac{r_{\max} \sin 20^\circ - \sqrt{r_s^2 - r_{\min}^2 \cos^2 20^\circ}}{r_{\max} \cos 20^\circ - r_{\min} \cos 20^\circ} (Y_s + y_s - r_{\max} \cos 20^\circ) - \sqrt{r_s^2 - r_{\min}^2 \cos^2 20^\circ}.$$

Dla obszaru

$$-r_s \leq Y_s + y_s < r_{\min} \cos 20^\circ \text{ i } \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2} \leq X_s + x_s \leq 1500\text{mm} - \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}$$

$$l_0 = X_s + x_s \pm \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}. \quad (8)$$

Dla obszaru  $r_{\min} \cos 20^\circ \leq Y_s + y_s < r_{\max} \cos 20^\circ$  i  $f_2(y_s) \leq X_s + x_s < f_1(y_s)$

$$l_0 = X_s + x_s - f_2(y_s). \quad (9)$$

Dla obszaru  $-r_s \leq Y_s + y_s \leq r_{\min} \cos 20^\circ$  i  $-\sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2} \leq X_s + x_s < \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}$

$$l_0 = X_s + x_s + \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}. \quad (10)$$

Dla obszaru

$$r_{\min} \cos 20^\circ \leq Y_s + y_s \leq r_{\max} \cos 20^\circ \text{ i } 1500\text{mm} + f_2(y_s) < X_s + x_s \leq 1500\text{mm} + f_1(y_s)$$

$$l_0 = X_s + x_s - f_1(y_s). \quad (11)$$

Dla obszaru

$$-r_s \leq Y_s + y_s \leq r_{\min} \cos 20^\circ \text{ i } 1500\text{mm} - \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2} < X_s + x_s \leq$$

$$1500\text{mm} + \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}$$

$$l_0 = X_s + x_s - \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}. \quad (12)$$

Dla obszaru  $r_{\max} \cos 20^\circ < Y_s + y_s < r_{\min} \cos 20^\circ$  i  $-\sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2} < X_s + x_s < f_2(y_s)$   
 lub  $r_{\min} \cos 20^\circ \leq Y_s + y_s \leq -r_s$  i  $-\sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2} < X_s + x_s < -\sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2}$  lub  
 $-r_{\max} < Y_s + y_s < -r_s$  i  $-\sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2} < X_s + x_s < 0$   
 $l_0 = 0.$  (13)

Dla obszaru  $-r_{\max} < Y_s + y_s < -r_s$  i  $0 \leq X_s + x_s \leq 1500 \text{ mm}$   
 $l_0 = X_s + x_s.$  (14)

Dla obszaru  $r_{\max} < Y_s + y_s < r_{\min} \cos 20^\circ$  i  
 $1500 \text{ mm} + f_1(y_s) < X_s + x_s < 1500 \text{ mm} + \sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2}$  lub  
 $-r_s \leq Y_s + y_s \leq r_{\min} \cos 20^\circ$  i  $1500 \text{ mm} + \sqrt{r_s^2 - (Y_s + y_s)^2} < X_s + x_s <$   
 $1500 \text{ mm} + \sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2}$   
 lub  $-r_{\max} < Y_s + y_s < -r_s$  i  $1500 \text{ mm} < X_s + x_s < 1500 \text{ mm} + \sqrt{r_{\max}^2 - (Y_s + y_s)^2},$   
 $l_0 = 1500 \text{ mm}.$  (15)

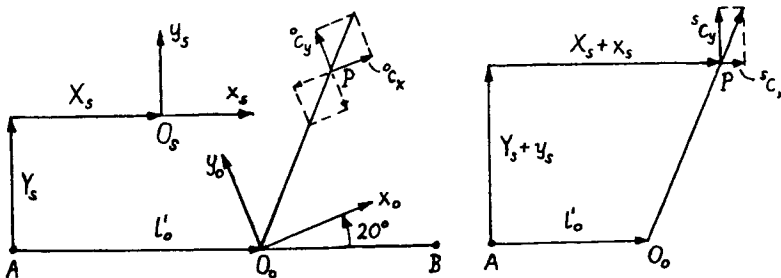
Przestrzeń robocza robota eksperymentalnego jest fragmentem podprzestrzeni manipulatora [1,5,6]. Podprzestrzeń manipulatora IRb-6 opisuje równanie kluczowe w postaci

$${}^0c_x \cdot y_0 - {}^0c_y \cdot x_0 = 0. \quad (16)$$

${}^0c_x, {}^0c_y$  są rzutami wersora  $\vec{c}$  osi  $z_s$  na osie  $x_0$  i  $y_0$ . Rzuty te ilustruje rys.5. Równanie (16) opisuje płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny  $x_0y_0$ , przechodzącą przez: początek  $O_0$  układu  $x_0y_0z_0$ , punkt P i rzut wersora  $\vec{c}$  na płaszczyznę  $x_0y_0$ . Rzuty  ${}^sc_x, {}^sc_y$  zilustrowane na rys.5 są elementami (1,3) i (2,3) macierzy  ${}^sT_{szad}$ , obliczonej z formuły (2). Z rys.5 wynika formuła dla  $l'_0$  o następującej postaci:

$$l'_0 = X_s + x_s - (Y_s + y_s) \frac{{}^sc_x}{{}^sc_y} \quad \text{przy } {}^sc_y \neq 0. \quad (17)$$

Dla  ${}^sc_y = 0$  tylko punkty P leżące w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny  $x_0y_0$ , przechodzącej przez oś  $z_0$  i prostą AB na



Rys.5. Rzuty wersora  $\vec{c}$ :  ${}^0c_x, {}^0c_y$  na osie  $x_0$  i  $y_0$ ;  ${}^sc_x, {}^sc_y$  na osie  $x_s$  i  $y_s$ .

rys.5 są z podprzestrzeni manipulatora IRb-6. Wtedy niemożliwe jest jednoznaczne wyznaczenie  $l'_0$  i do obliczenia  $l_0$  stosujemy jedną z formuł (8), (10), (12) lub (15).

Przy dowolnej orientacji zadanej obiektu manipulacji rzuty  ${}^s c_x$ ,  ${}^s c_y$  są dowolne. Z formuły (17) wynika, że nie możemy wtedy wyznaczyć jednoznacznie  $l'_0$ . W tym przypadku będziemy stosować jedną z formuł (6)-(15).

Dodatkowa współrzędna  $l_0$  opisująca ruch podstawy manipulatora IRb-6 po torze jezdnym LP-1 może zmieniać się w granicach  $0 \leq l_0 \leq 1500\text{mm}$ . Dlatego  $l_0$  będzie zmodyfikowanym  $l'_0$ , obliczonym z formuły (17):

$$l_0 = 0 \text{ dla } l'_0 < 0, \quad l_0 = l'_0 \text{ dla } l'_0 \in [0, 1500] \text{ i } l_0 = 1500\text{mm} \text{ dla } l'_0 > 1500\text{mm}.$$

#### 4. WNIOSKI

Przedstawiony tu opis przestrzeni roboczej manipulatora eksperymentalnego jest podstawą do opracowania odpowiedniego programu komputerowego. Program ten umożliwi automatyczne sprawdzanie, czy zaobserwowany przez system wizyjny obiekt manipulacji jest zanurzony w przestrzeni roboczej robota eksperymentalnego.

Opis ten jest niezbędny do implementacji komputerowego generatora trajektorii PLAN2 [4] do systemu sterowania robota eksperymentalnego. Zaimplementowany generator PLAN2 umożliwi współpracę systemu wizyjnego z układem sterowania robota eksperymentalnego.

Opis analityczny przestrzeni roboczej właściwej jest niezbędny do realizacji trajektorii zadanych, redundantnych względem manipulatora robota eksperymentalnego.

Przedstawiony tu opis przestrzeni roboczej właściwej jest użyteczny dla manipulatorów o strukturze kinematycznej jak IRb-6. Taką strukturę kinematyczną mają manipulatory: IRp-6 i URP-6.

#### LITERATURA

- [1] Craig J.J.: *Wprowadzenie do robotyki*. Mechanika i sterowanie. WNT Warszawa 1993.
- [2] Yoshikawa T.: *Foundations of Robotics*. MIT Press 1990.
- [3] Szkodny T.: *Modele Matematyczne Ruchu Manipulatorów Robotów Przemysłowych na Potrzeby Sterowania*. Z.N. Pol. Śl. s. Automatyka, no. 112, Gliwice 1993.
- [4] Szkodny T.: "Generating a Reference Trajectory with Defined Kinematics for the IRb-6 Manipulator", *Math. Comput. Modelling* vol.21, no. 5, Pergamon Press, 1995.
- [5] Szkodny T.: "Podstawowe problemy modelowania ruchu manipulatorów robotów przemysłowych - opis podprzestrzeni", *Materiały II K. K. Mechatronika'94*, Oficyna Wydawnicza Pol. Warsz., Warszawa 1994.
- [6] Szkodny T., Bereska D., Grzechca W.: "Differential Description of Manipulators' Subspace". *Proc. 12th Intern. Conf. on CAD/CAM of the Future*, Middlesex Univ. London, 1996.