Prof. dr hab. Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

DODATNIE UKŁADY DWUWYMIAROWE OPISANE MODELEM ROESSERA

Streszczenie: Zaproponowano nową klasę dodatnich dwuwymiarowych (2W) układów liniowych opisanych modelem Roessera. Podano warunki konieczne i wystarczające osiągalności dla zerowych warunków brzegowych oraz sterowalności (do zera) dodatniego 2W modelu Roessera. Wykazano, że dodatni 2W model Roessera nie mający nilpotentnej macierzy nodelu jest nieosiągalny dla niezerowych warunków brzegowych oraz model ten jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz modelu jest macierzą nilpotentną. Został sformułowany i rozwiązany problem sterowania z minimalną energią modelu Roessera. Podano warunki dostateczne istnienia dodatniej realizacji w postaci kanonicznej dla 2W funckji wymiernej.

POSITIVE 2D SYSTEMS DESCRIBED BY THE ROESSER TYPE MODELS

A new class of positive 2D Roesser type models is introduced. Necessary and sufficient conditions are established for the reachability for zero boundary conditions and the controllability (to zero) of the positive 2D Roesser type model. It is shown that the positive 2D Roesser type model having not nilpotent system matrix is unreachable for nonzero boundary conditions and it is controllable (to zero) if and only if the system matrix is a nilpotent matrix. The minimum energy control problem for positive 2D Roesser type model is formulated and solved. Sufficient conditions for the existence of a positive realisation in canonical form are established.

1. WPROWADZENIE

Podstawowymi modelami dwuwymiarowych (2W) układów liniowych są modele zaproponowane przez Roessera [32], oraz Fornasiniego i Marchesiniego [4,5]. Osiągalność i sterowalność dodatnich układów jednowymiarowych były rozpatrywane w pracach [1,2]. Osiągalność i sterowalność oraz sterowanie z minimalną energią układów 2W były analizowane w pracach [8-10, 23-30]. Metodę rozwiązania zadania sterowania z minimalną energią klasycznego modelu Roessera podał po raz pierwszy Klamka [30]. Metoda ta została następnie uogólniona na inne modele [28-31]. Własności dodatnich układów 2W opisanych modelem Fornasiniego - Marchesiniego były analizowane w pracy [6,33]. Problem dodatniej realizacji dla układów jednowymiarowych był rozpatrywany w wielu pracach między innymi [19], a dla układów 2W opisanych modelem Roessera w pracach [20-22].

Celem tej pracy jest syntetyczne przedstawienie niektórych wyników autora dotyczących dodatnich układów 2W opisanych modelem Roessera. Zostaną podane warunki konieczne i wystarczające osiągalności i sterowalności do zera dodatniego modelu Roessera. Zostanie sformułowane i rozwiązane zadanie sterowania z minimalną energią dodatniego modelu Roessera. Podane zostaną warunki wystarczające na istnienie dodatniej realizacji w postaci kanonicznej oraz procedura wyznaczania tej realizacji.

2. PODSTAWOWE MODELE I DEFINICJE.

Niech $R_+ := [0,+\infty)$ oraz $Z_+ := \{0,1,2,...\}$. Zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach $n \times m$ i nieujemnych elementach oznaczać będziemy przez $R_+^{n\times m}$ oraz $R_+^n := R_+^{n\times 1}$.

Weźmy pod uwagę model Roessera [32]

$$x_{ij}^{(1)} = Ax_{ij} + Bu_{ij}\,, \quad y_{ij} = Cx_{ij} + Du_{ij}$$

$$x_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix}, \quad x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} \quad i,j \in Z_+ \tag{1}$$

przy czym $x_{ij}^h \in R^{n_1}$ jest horyzontalnym wektorem stanu, $x_{ij}^v \in R^{n_2}$ jest wertykalnym wektorem stanu, $u_{ij} \in R^m$ jest wektorem wymuszeń, $y_{ij} \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2]$$

$$A_1 \in R^{n_1\times n_1}, B_1 \in R^{n_1\times m}, C_1 \in R^{p\times n_1}, \quad A_4 \in R^{n_2\times n_2}, B_2 \in R^{n_2\times m}, C_2 \in R^{p\times n_2}$$

Definicja 1. Model (1) nazywamy dodatnim modelem Roessera, jeżeli dla wszystkich warunków brzegowych

$$x_{0j}^h \in R_+^{n_1}, j \in Z_+, \; x_{i0}^v \in R_+^{n_2}, i \in Z_+ \tag{2}$$

oraz wszystkich $u_{ij} \in R_+^m$, $i,j \in Z_+$ mamy $x_{ij} \in R_+^n, n = n_1 + n_2$ oraz $y_{ij} \in R_+^p$ dla $i,j \in Z_+$.

Twierdzenie 1 [16,17.18]. Model Roessera (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A \in R_+^{n\times n}, B \in R_+^{n\times m}, \; C \in R_+^{p\times n}, D \in R_+^{p\times m} \tag{3}$$

Macierz tranzycji T_{ij} dla (1) jest określona następująco [32, 30, 7]

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n \; (macierz \;\; jednostkowa) & dla \;\; i = j = 0 \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} & dla \;\; i,j \ge 0 \;\; (i+j \ne 0) \\ T_{ij} = 0 \; (macierz \; zerowa) & dla \; i < 0 \text{ lub } j < 0 \end{cases} \tag{4}$$

przy czym

$$T_{10}:=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01}:=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 2 [16,17]. Macierz tranzycji T_{ij} dodatniego modelu Roessera (1) jest dodatnia

$$T_{ij} \in R_+^{n\times n} \quad dla \ wszystkich \ i,j \in Z_+ \tag{5}$$

Rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi (2) ma postać [32,30,7]

$$x_{ij} = x_{bc}(i,j) + \sum_{(p,q)\in D_{ij}} M_{i-p,j-q} u_{pq} \tag{6}$$

przy czym

$$x_{bc}(i,j) := \sum_{p=0}^{i} T_{i-p,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{p0}^v \end{bmatrix} + \sum_{q=0}^{j} T_{i,j-q} \begin{bmatrix} x_{0q}^h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_{i-p,j-q} := T_{i-p-1,j-q} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i-p,j-q-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$D_{ij} := \{(p,q) \in Z_+ \times Z_+, \ 0 \le p \le i, \ 0 \le q \le j, \ p+q \ne i+j\} \tag{8}$$

3. OSIĄGALNOŚĆ DODATNIEGO MODELU ROESSERA.

Definicja 2. Dodatni model Roessera (1) nazywamy osiągalnym dla zerowych warunków brzegowych (ZWB) w punkcie $(h,k), h,k \in Z_+$, jeżeli dla ZWB (2) i każdego $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_{ij} \in R_+^m$, $(i,j) \in D_{hk}$ taki, że $x_{hk} = x_f$.

Definicja 3. Dodatni model Roessera nazywamy osiągalnym dla niezerowych warunków brzegowych (NWB) w punkcie $(h,k), h,k \in Z_+$, jeżeli dla dowolnych NWB (2) i każdego $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_{ij} \in R_+^n$, $(i,j) \in D_{hk}$ taki, że $x_{hk} = x_f$

Definicja 4. Zbiór wszystkich nieujemnych kombinacji liniowych kolumn macierzy $A \in R^{n\times m}$ nazywamy dodatnim obrazem A (oznaczonym przez $\mathrm{Im}_+ A$)

$$\mathrm{Im}_+ A := \{y \in R_+^n : y = Ax \ dla \ wszystkich \ x \in R_+^m\} \tag{9}$$

Definicja 5. Macierz $R_n \in R^{n\times n}$ nazywamy uogólnioną dodatnią macierzą permutacji wtedy i tylko wtedy, gdy R_n ma tylko jeden dodatni element w każdym wierszu i kolumnie i pozostałe elementy zerowe

Twierdzenie 3 [16,17]. Dodatni model Roessera (1) jest osiągalny dla ZWB w punkcie (h,k) wtedy i tylko wtedy, gdy

i) $\mathrm{Im}_+ R_{hk} = R_+^n$ (10)

lub równoważnie

ii) istnieje uogólniona dodatnia macierz permutacji R_n złożona z n kolumn R_{hk}

przy czym

$$R_{hk} := \left[M_{hk}, M_{h-1,k}, M_{h,k-1}, \dots, M_{10}, M_{01} \right] \tag{11}$$

Uwaga 1. Model Roessera (1) o skończonej pamięci ma nilpotentną macierz A

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_1 \,, & -A_2 \\ -A_3 & , I_{n_2} z_2 - A_4 \end{bmatrix} = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{12}$$

Korzystając z (7) łatwo wykazać, że jeżeli zachodzi (12) to $x_{bc}(i,j) = 0$ dla $i > n_1$, $j > n_2$.

Twierdzenie 4 [16,17]. Dodatni model Roessera (1) mający nilpotentną A jest nieosiągalny dla NWB

Twierdzenie 5 [16,17]. Dodatni model Roessera (1) jest osiągalny dla ZWB w punkcie (h,k), jeżeli $rank\, R_{hk} = n$ oraz istnieje macierz R_{hk}^r taka, że

$$R_{hk}^r \in R_+^{(h+1)(k+1)m \times n} \tag{13}$$

przy czym R_{hk}^r jest prawą odwrotnością $R_{hk} \left(R_{hk} R_{hk}^r = I_n \right)$.

Przykład 1. Weźmy pod uwagę model (1) z

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right], B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{array}\right] \tag{14}$$

W tym wypadku $n_1 = 2, n_2 = 1$ oraz $m = 1$

Aby sprawdzić osiągalność tego modelu w punkcie $(h,k) = (1,2)$ korzystając (14), (7) i (11) obliczamy

$$R_{12} = \left[M_{12}, M_{02}, M_{11}, M_{10}, M_{01} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Łatwo zauważyć, że $\mathrm{Im}_+ R_{12} = 3$. Warunek (10) jest więc spełniony i model ten jest osiągalny w punkcie (1,2).

Macierz

$$R_3 = \left[M_{11}, M_{10}, M_{01} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest uogólnioną dodatnią macierzą permutacji. Warunek ii) twierdzenia 3 jest więc również spełniony. Ciąg wymuszeń $u(1,2)$, który sprowadza model ten z ZWB do stanu $x_f \in R_+^3$ w punkcie (1,2) ma postać

$$u(1,2) = \left[u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{02}, u_{11} \right]^T = \left[0 \;\; 0 \;\; u_3^T \right]^T$$

przy czym

$$u_3 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{11} \end{bmatrix} = R_3^{-1} x_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_f$$

Korzystając z (15) otrzymamy

$$R_{12}^r = R_{12}^T \left[R_{12} R_{12}^T \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \in R_+^{6\times 3}$$

Warunek (13) jest spełniony i zgodnie z twierdzeniem 5 model ten jest osiągalny w punkcie (1,2).

4. SEROWALNOŚĆ DODATNIEGO MODELU ROESSERA.

Definicja 6. Dodatni model Roessera (1) nazywamy sterowalnym (do zera), jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $u_{ij} \in R_+^m$, $(i,j) \in D_{hk}$ dla dowolnych NWB taki, że $x_{hk} = 0$.

Twierdzenie 6 [22]. Dodatni model Roessera (1) jest sterowalny (do zera) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A tego modelu jest macierzą nilpotentną.

5. STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ DODATNIEGO MODELU ROESSERA

Weźmy pod uwagę dodatni model Roessera (1) oraz wskaźnik jakości o postaci

$$I(u) := \sum_{(p,q)\in D_{hk}} u_{pq}^T Q u_{pq} \tag{16}$$

przy czym Q jest $m \times m$ symetryczną dodatnio określoną macierzą wag taką, że $Q^{-1} \in R_+^{m\times m}$.

Dane są macierze A, B modeli (1), macierz weg Q i punkt (h,k), należy wyznaczyć ciąg $u_{ij} \in R_+^m$, $(i,j) \in D_{hk}$, który przeprowadza ten model z ZWB do pożądanego stanu $x_f = x_{hk}$ oraz minimalizuje wskaźnik jakości (16).

Aby rozwiązać ten problem definiujemy macierz

$$W_Q(h,k) := \sum_{(p,q)\in D_{hk}} M_{h-p,k-q} Q^{-1} M_{h-p,k-q}^T = R_{hk} Q_d R_{hk}^T \tag{17}$$

przy czym $M_{h-p,k-q}$, R_{hk} są określone przez (7) i (11)

$$Q_d := diag\left[Q^{-1}, \dots, Q^{-1}\right] \in R_+^{hkm\times hkm}$$

Łatwo wykazać, że macierz $W_Q(h,k) \in R_+^{n\times n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy R_{hk} ma pełny rząd wierszowy

Definiujemy ciąg wymuszeń

$$\hat{u}_{ij} := Q^{-1} M_{h-i,k-j}^{T} W_{Q}^{-1}(h,k) x_f, \quad (i,j) \in D_{hk} \tag{18}$$

Zauważmy, że $\hat{u}_{ij} \in R_{+}^{m}$ dla każdego $x_f \in R_{+}^{n}$ jeżeli

$$W_{Q}^{-1}(h,k) \in R_{+}^{n \times n} \tag{19}$$

Twierdzenie 7. [17]
Załóżmy, że
i) dodatni model Roessera (1) jest osiągalny dla ZWB w punkcie (h,k),

ii) $Q^{-1} \in R_{+}^{m \times m}$ oraz (19) jest spełniony,

iii) $\bar{u}_{ij}, (i,j) \in D_{hk}$ jest dowolnym ciągiem wymuszeń, który przeprowadza ten model z ZWB do pożądanego stanu $x_f = x_{hk}$.

Wtedy ciąg wymuszeń (18) realizuje to samo zadanie oraz

$$I(\hat{u}) \le I(\bar{u}) \tag{20}$$

Ponadto minimalna wartość wskaźnika (16) jest równa

$$I(\hat{u}) = x_f^T W_Q^{-1}(h,k) x_f \tag{21}$$

6. DODATNIA REALIZACJA MODELU ROESSERA W POSTACI KANONICZNEJ.

Macierz transmitancji modelu (1) dana jest zależnością [32,30,7]

$$T(z_1, z_2) = C \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_1, & -A_2 \\ -A_3 & , I_{n_2} z_2 - A_4 \end{bmatrix}^{-1} B + D \in R^{p \times m}(z_1, z_2) \tag{22}$$

Definicja 7. [21,22]. Macierze A,B,C,D nazywamy realizacją macierzy $T(z_1,z_2)$ jeżeli macierze te spełniają równość (22). Realizację (A,B,C,D) nazywamy minimalną, jeżeli macierz A ma najmniejszy wymiar wśród wszystkich realizacji macierzy $T(z_1,z_2)$.

Definicja 8. [21,22]. Macierze (3) spełniające (22) nazywamy dodatnią realizacją macierzy $T(z_1,z_2)$.

Definicja 9. [23]. Model Roessera o jednym wejściu i jednym wyjściu ma postać kanoniczny jeżeli podmacierze $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1$ i C_2 mają następującą strukturę

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} & \cdots & -a_{0n_1} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n_1} \\ \hdashline a_{n_2-1,1} & \cdots & a_{n_2-1,n_1} \\ a_{n_21} & \cdots & a_{n_2n_1} \end{bmatrix}, \quad A_{22}=\begin{bmatrix} -a_{10} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{20} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline -a_{n_2-1,0} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n_20} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{bmatrix}, \quad C_1=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n_1} \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} c_{21} & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$$

Weźmy pd uwagę właściwą transmitancję peratorową o postaci

$$T(z_1,z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{ij} z_1^{n-i} z_2^{m-j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} z_1^{n-i} z_2^{m-j}} \qquad (a_{00}=1) \tag{24}$$

przy czym b_{ij} i a_{ij} dla $i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m$ są rzeczywistymi współczynnikami.

Twierdzenie 8. [22]. Istnieje dodatnia realizacja w postaci kanonicznej transmitancji (24), jeżeli

$$b_{ij}\geq 0 \text{ oraz } a_{ij}\leq 0 \text{ dla } i=0,1,\dots,n, \quad j=0,1,\dots,m, \qquad (a_{00}=1) \tag{25}$$

Ta dodatnia realizacja ma postać

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n0} & -a_{n-1,0} & -a_{n-2,0} & \cdots & -a_{10} \end{bmatrix}\in R_+^{n\times n}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\in R_+^{n\times 2m}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} -\bar{a}_{n1} & -\bar{a}_{n-1,1} & \cdots & -\bar{a}_{11} \\ -\bar{a}_{n2} & -\bar{a}_{n-1,2} & \cdots & -\bar{a}_{12} \\ \hdashline -\bar{a}_{nm} & -\bar{a}_{n-1,m} & \cdots & -\bar{a}_{1m} \\ \bar{b}_{n1} & \bar{b}_{n-1,1} & \cdots & \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{n2} & \bar{b}_{n-1,2} & \cdots & \bar{b}_{21} \\ \hdashline \bar{b}_{nm} & \bar{b}_{n-1,m} & \cdots & \bar{b}_{1m} \end{bmatrix}\in R_+^{2m\times n},$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix} -a_{01} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{02} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline -a_{0m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ b_{02} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline b_{0m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\in R_+^{2m\times 2m} \tag{26}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\in R^{n\times 1},\quad B_2=\begin{bmatrix}-a_{01}\\ -a_{02}\\ \vdots\\ -a_{0m}\\ b_{01}\\ b_{02}\\ b_{0m}\end{bmatrix}\in R_+^{2m\times 1},\quad \begin{matrix} C_1=\begin{bmatrix}\bar{b}_{n0} & \bar{b}_{n-1,0} & \cdots & \bar{b}_{10}\end{bmatrix}\in R_+^{1\times n}\\ C_2=\begin{bmatrix}b_{00} & \underbrace{0\cdots 0}_{m} & 1 & 0\cdots 0\end{bmatrix}\in R_+^{1\times 2m}\end{matrix},\quad D=\begin{bmatrix}b_{00}\end{bmatrix}\in R_+^{1\times 1}$$

$$\text{przy czym}\quad \bar{a}_{ij}=a_{ij}-a_{i0}a_{0j}\ \text{dla}\ \begin{matrix}i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m\end{matrix}\quad\text{oraz}\quad \bar{b}_{ij}=b_{ij}-a_{i0}b_{0j}\ \text{for}\ \begin{matrix}i=1,\dots,n\\ j=0,1,\dots,m\end{matrix} \tag{27}$$

Przykład. Wyznaczyć dodatnią realizację (26) transmitancji operatorowej

$$T(z_1,z_2)=\frac{2z_1^2z_2+3z_1^2+z_1z_2+z_1}{z_1^2z_2-z_1^2-2z_1-z_2} \tag{28}$$

Transmitancja ta spełnia warunki (26) gdyż $a_{00}=1$, $a_{20}=-1$, $a_{10}=-2$, $a_{01}=-1$, $b_{00}=2$, $b_{01}=3$, $b_{11}=1$, $b_{10}=1$.

W tym przypadku $\bar{a}_{11}=a_{11}-a_{10}a_{01}=-2$, $\bar{a}_{21}=a_{21}-a_{20}a_{01}=-1$ oraz $\bar{b}_{11}=b_{11}-a_{10}b_{01}=1$, $\bar{b}_{21}=b_{21}-a_{20}b_{01}=3$, $\bar{b}_{20}=b_{20}-a_{20}b_{00}=2$, $\bar{b}_{10}=b_{10}-a_{10}b_{00}=1$.

Poszukiwana realizacja (26) ma postać

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 1 & 0 & 0\\ -a_{20} & -a_{10} & 1 & 0\\ \hdashline -\bar{a}_{21} & -\bar{a}_{11} & -a_{01} & 0\\ \bar{b}_{20} & \bar{b}_{11} & b_{01} & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&2&1&0\\3&1&3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -a_{01}\\ b_{01}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\3\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_{20} & \bar{b}_{10} & b_{00} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}b_{00}\end{bmatrix}=2$$

Transmitancję (24) można napisać w postaci

$$T(z_1,z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}b_{ij}z_1^{-i}z_2^{-j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}z_1^{-i}z_2^{-j}}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}z_1^{-i}z_2^{-j}\quad (a_{00}=1) \tag{29}$$

Twierdzenie 9. [22]. Jeżeli są spełnione warunki (25), to odpowiedź impulsowa tego modelu Roessera przyjmuje tylko wartości nieujemne

$$h_{ij}\ge 0\ \text{dla}\ i\ge 0\ \text{oraz}\ j\ge 0 \tag{30}$$

Uwagi końcowe:

W pracy dokonano syntetycznego przeglądu niektórych wyników dotyczących dodatnich liniowych układów 2W opisanych modelem Roessera. Ze względu na ograniczoną objętość tej pracy nie zostały przedstawione inne ostatnie wyniki autora dotyczące między innymi:

1. dodatnich układów 2W ciągło-dyskretnych, w których jedna zmienna niezależna jest ciągła, a druga dyskretna [12]
2. problemu regularyzacji singularnych układów 2W za pomocą sprzężeń zwrotnych od stanu lub wyjścia [11,13,14]
3. stabilizacji układów 2W ciągło-dyskretnych za pomocą sprzężeń zwrotnych [12]
4. innych postaci warunków istnienia realizacji dodatnich oraz metod ich wyznaczania dla danych 2W macierzy transmitancji [20,21]

LITERATURA

[1] P.G. Coxson, *Positive input reachability and controllability a positive systems,* Linear Algebra and its Applications, vol. 94, 1987, str. 35-53.

[2] M.P. Fanti, B. Maione and B. Turchiano, *Controllability of linear single-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, vol. 50, No 6, 1989, str. 2523-2542.

[3] M.P. Fanti, B. Maione and B. Turchiano, *Controllability of multi-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, vol. 51, No 6, 1990, str. 1295-1308.

[4] E.Fornasini, G.Marchesini, *State space realization of two-dimensional filters,* IEEE Trans. Autom.Control, **AC-21** (1976), str. 484-491.

[5] E.Fornasini, G.Marchesini, *Doubly indexed dynamical systems: State space models and structural properties, Math. Syst.Theory* **12** (1978).

[6] E. Fonasini and M.E. Valcher, *Recent developments in 2D positive system theory,* Applied Mathematics and Computer Science, vol. 7, No 4, 1997.

[7] T. Kaczorek, *Linear Control Systems,* vol. 2, Research Studies Press and J. Wiley, New York 1993.

[8] T. Kaczorek, *When does the local controllability of the general model of 2-D linear systems imply its local reachability?,* Systems and Control Letters, No. 23, 1994, str. 445-452

[9] T. Kaczorek, *When the local controllability of Roesser model implies its local reachability,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 42, No 2, 1994, str. 261-267.

[10] T. Kaczorek, *U-Reachability and U-Controllability of 2-D Roesser Model,* , Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 43, No 1, 1995, str. 31-37.

[11] T. Kaczorek, *Regularization of a singular 2-D Roesser model by output-feedback,* (co-author: Nguyen Bang Giang), Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 45, No 3, 1997, str. 417-426.

[12] T. Kaczorek, *Stabilization of singular 2-D continuous-discrete systems by output-feedback controllers,* SAMS,vol. 28, 1997, str. 21-30.

[13] T. Kaczorek, *Regularisation of a singular 2-D Fornasini-Marchesini model by output-feedback,* (co-author: Nguyen Bang Giang), Applied Mathematics and Computer Science, vol. 7, No 4, 1997.

[14] T. Kaczorek, *Regularisation of a singular 2-D linear models by output-feedback,* Applied Mathematics and Computer Science, vol. 7, No 4, 1997.

[15] T. Kaczorek, *Positive singular discrete linear systems,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 45.No. 4, 1997, str. 619-631.

[16] T. Kaczorek, *Reachability and controllability of non-negative 2-D Roesser type models,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 44. No. 4, 1997, str. 405-410.

[17] T. Kaczorek, *Reachability and minimum energy control of positive 2D Roesser type models,* Proceedings of the 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Berlin, Sierpeiń 24-19, 1997, str. 279-284.

[18] T. Kaczorek, *Reachability and controllability of positive 2D Roesser type models*, Proc. 3rd Intern. Conf. Automation of Mixed Processes, 19-20 March 1998 Reims-France.

[19] T. Kaczorek, *Positive realisations of improper transfer matrices of discrete-time linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol .45, No 2, 1997, str. 277-286.

[20] T. Kaczorek, *Realization problem for positive 2-D Roesser type model*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 45, No 4, 1997, str. 607-618.

[21] T. Kaczorek, *Realisation problem for 2-D positive systems*, 2nd Workshop „New Trends in Design of Control Systems" NTDCS'97, Smolenice, Slovakia, September 7-10.1997, str. 502-507.

[22] T. Kaczorek, *Positive realization in canonical form of the 2D Roesser type model*, 36th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'97 , San Diego ,10-12.12.97

[23] T. Kaczorek and J. Klamka, *Minimum energy control of 2-D linear systems with variable coefficients*, Int. J. Control, vol. 44, No. 3, str. 645-650, 1986.

[24] T. Kaczorek and J. Klamka, *Minimum energy control for general model of 2-D linear systems*, Int. J. Control, vol. 47, No. 5, str. 1555-1562, 1988.

[25] J. Klamka, *M-dimensional nonstationary linear discrete systems in Banach spaces*, Proc. 12 World IMACS Congress, Paris, 1988, vol. 4, str. 31-33.

[26] J. Klamka, *Constrained controllability of 2-D linear systems*, Proc. 12 World IMACS Congress, Paris, 1988, vol. 2, str. 166-169.

[27] J. Klamka, *Complete controllability of singular 2-D system*, Proc. 13 IMACS World Congress, Dublin, 1991, str. 1839-1840.

[28] J. Klamka, *Minimum energy control of singular 2-D linear systems with variable coefficients*, Proc. IMACS Symp. Lille 1991, vol. 2, str. 155-159.

[29] J. Klamka, *Minimum energy control problem for general linear 2-D systems in Hilbert spaces*, Proc. IEEE Symp. Crete, 1993.

[30] J. Klamka, *Controllability of Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

[31] J. Klamka, *Constrained Controllability of Discrete 2-D Linear Systems*, Proc. IMACS Intern. Symp. Signal Processing, Robotics and Neural Networks, April 25-27, 1994, Lille, str. 166-169.

[32] P.R. Roesser, *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Trans. Autom. Contr. 1975, vol. AC-20, No. 1, str. 1-10.

[33] M.E. Valcher and E. Fornasini, *State Models and Asymptotic Behaviour of 2D Positive Systems*, IMA Journal of Mathematical Control & Information, No 12, 1995, str. 17-36.