Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

UKŁADY ANTYCYPACYJNE JEDNO I DWUWYMIAROWE

Streszczenie. *W pracy zostały wprowadzone pojęcia układów antycypacyjnych jednowymiarowych ciągłych i dyskretnych oraz dyskretnych układów dwuwymiarowych (2D). Układ dyskretny jest nazywany antycypacyjnym, jeżeli jego wektor stanu oraz wektor odpowiedzi zależą od przyszłych wartości wymuszeń. Układ ciągły jest nazywany antycypacyjnym, jeżeli jego wektor stanu oraz wektor odpowiedzi zależą od pochodnych wymuszeń. Zostały sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające dla antycypacji singularnych liniowych układów ciągłych i dyskretnych. Zostało wykazane, że: 1) singularne obwody elektryczne nie są układami antycypacyjnymi; 2) układ dyskretny otrzymany w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego jest antycypacyjny dla dowolnej długości kroku dyskretyzacji wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest antycypacyjny. Zostały również sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające dla antycypacji singularnego 2D modelu Fornasiniego-Marchesiniego oraz singularnego 2D modelu Roessera.*

ANTICIPATORY 1D AND 2D SYSTEMS

Abstract. *Notions of anticipatory systems for discrete-time and continuous-time 1D linear systems and 2D discrete linear systems are introduced. A discrete-time system is called anticipatory if its state vector and output vector depend on the future values of inputs. A continuous-time system is called anticipatory if its state vector and output vector depend on the derivatives of inputs. Necessary and sufficient conditions for the anticipation of singular discrete-time and continuous-time 1D linear systems are established. It is shown that: 1) the singular electrical circuits are not anticipatory systems; 2) the discrete-time system obtained by discretisation from continuous-time one is anticipatory for any value of the discretisation step if and only if the continuous-time system is anticipatory. Necessary and sufficient conditions for the anticipation of the singular 2D Fornasini-Marchesini model and the singular 2D Roesser model are established.*

1. *Wprowadzenie*

W ostatnich latach obserwuje się dynamiczny rozwój teorii układów antycypacyjnych, głównie dyskretnych [26,3,4]. Definicje układów antycypacyjnych są różne i na ogół mało precyzyjne [26]. W pracy tej zostaną podane precyzyjne definicje antycypacyjnych dyskretnych i ciągłych układów liniowych. Układ dyskretny nazywać będziemy antycypacyjnym jeżeli wektory stanu i odpowiedzi zależą od przyszłych wartości wymuszeń. Układ ciągły natomiast nazywać będziemy antycypacyjnym, jeżeli wektory stanu i odpowiedzi zależą od wartości pochodnych wymuszeń. W pracach [7-10] wykazano, że w singularnych układach dyskretnych przebiegi odpowiedzi mogą zależeć od przyszłych wartości wymuszeń, a w singularnych układach ciągłych od wartości pochodnych wymuszeń. Obwody elektryczne są przykładami układów singularnych [8]. Pojawia się więc pytanie czy i przy spełnieniu jakich warunków te obwody elektryczne są układami antycypacyjnymi. Niech singularny liniowy układ ciągły będzie układem antycypacyjnym. Z układu singularnego ciągłego w wyniku dyskretyzacji otrzymamy odpowiedni singularny układ dyskretny. Czy otrzymany układ dyskretny może być układem antycypacyjnym? Czy własność antycypacji zależy od długości kroku dyskretyzacji? Celem tej pracy jest danie odpowiedzi na powyższe pytania. Zostaną sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające na to, aby układ singularny dyskretny i ciągły był układem antycypacyjnym. Zostanie wykazane, że układ dyskretny powstały w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego jest układem antycypacyjnym dla dowolnej długości kroku dyskretyzacji wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest antycypacyjny. Zostaną również sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające dla antycypacji singularnego 2D modelu Fornasiniego-Marchesiniego oraz singularnego 2D modelu Roessera.

2. *Układy dyskretne.*

Niech $R^{p\times n}$ będzie zbiorem macierzy o elementach rzeczywistych i wymiarach $p\times n$ oraz $R^p := R^{p\times 1}$.

Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$Ex_{i+1} = Fx_i + Gu_i \quad \text{(1a)} \qquad y_i = Cx_i + Du_i \qquad i \in Z_+ := \{0,1,2,...\} \qquad \text{(1b)}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$, $y_i \in R^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej i, a $E,F \in R^{n\times n}$, $G \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ i $D \in R^{p\times m}$.

Jeżeli $\det E \neq 0$ to układ (1) nazywamy standardowym. Natomiast jeżeli $\det E = 0$, to układ ten nazywamy singularnym.

Zakładamy, że pęk (E,F) jest regularny, tzn.

$$\det[Ez - F] \neq 0 \text{ dla pewnych } z \in \mathbf{C} \text{ (zbiór liczb zespolonych)} \tag{2}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (2), to

$$[Ez - F]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i z^{-(i+1)} \tag{3}$$

przy czym μ jest indeksem nilpotentności, a Φ_i jest macierzą fundamentalną określoną zależnością

$$E\Phi_i - F\Phi_{i-1} = \Phi_i E - \Phi_{i-1} F = \begin{cases} I_n & dla \quad i = 0 \\ 0 & dla \quad i \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

I_n - macierz jednostkowa stopnia n

Rozwiązanie równania (1a) ma postać [11,10,21-23]

$$x_i = \Phi_i E x_0 + \sum_{k=0}^{i+\mu-1} \Phi_{i-k-1} G u_k \tag{5}$$

Z zależności (5) wynika, że jeżeli $\mu > 1$, to rozwiązanie x_i zależy od przyszłych wartości wymuszeń, czyli u_k dla $k>i$.

Definicja 1 Układ dyskretny (1) nazywamy antycypacyjnym, jeżeli wektor stanu x_i i wektor odpowiedzi y_i w chwili dyskretnej *i* zależą od przyszłych wymuszeń u_k dla $k>i$.

Twierdzenie 1. Układ standardowy (1) nie jest układem antycypacyjnym.

Dowód. Jeżeli $\det E \neq 0$, to istnieje E^{-1} i możemy napisać

$$[Ez-F]^{-1} = \left[E\left(I_n z - E^{-1}F\right)\right]^{-1} = \left(I_n z - E^{-1}F\right)^{-1} E^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(E^{-1}F\right)^i E^{-1} z^{-(i+1)} \tag{6}$$

gdyż $\left(I_n z - E^{-1}F\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(E^{-1}F\right)^i z^{-(i+1)}$

Wobec tego z (6) mamy $\Phi_i = \begin{cases} \left(E^{-1}F\right)^i E^{-1} & dla \quad i \geq 0 \\ 0 & dla \quad i < 0 \end{cases}$ oraz μ=0. Z (5) wynika, że w tym przypadku x_i (a więc również y_i) nie zależy od przyszłych wartości wymuszeń. □

Twierdzenie 2. Singularny układ dyskretny (1) jest antycypacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}E > st.\det[Ez-F] \tag{7}$$

gdzie $st.\det[Ez-F]$ oznacza stopień wielomianu, który otrzymujemy po rozwinięciu wyznacznika $\det[Ez-F]$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o dekompozycji pęku regularnego (E,F) [11] wykażemy, że indeks nilpotentności $\mu>1$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (7). Jeżeli jest spełniony warunek (2), to istnieją macierze nieosobliwe $P,Q \in R^{n\times n}$ takie, że [11]

$$P[Ez-F]Q = \begin{bmatrix} I_{n_1}z - A_1 & 0 \\ 0 & Nz - I_{n_2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

przy czym $n_1 = st.\det[Ez-F]$, $n_2 = n - n_1$, $A_1 \in R^{n_1\times n_1}$, a $N \in R^{n_2\times n_2}$ jest macierzą nilpotentną o indeksie μ, tzn. $N^{\mu-1} \neq 0$, $N^{\mu} = 0$. Indeks nilpotentności μ jest wymiarem największej klatki Jordana odpowiadającej zerowej wartości własnej pary (E,F) [11]. Z zależności (8) wynika natychmiast, że $\text{rząd}\,E = n_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy N=0 czyli gdy μ=1. Warunek (7) jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu>1$. Ze wzoru (5) wynika, że w tym przypadku x_i zależy od u_k dla $k>i$. □

3. *Układy ciągłe*

Weźmy pod uwagę układ ciągły opisany równaniami

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0 \quad \text{(9a)} \qquad y = Cx + Du \qquad \text{(9b)}$$

przy czym $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R^m$, $y = y(t) \in R^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili t, a $E, A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ i $D \in R^{p\times m}$.
Jeżeli $\det E \neq 0$ to układ (9) nazywamy standardowym. Jeżeli natomiast $\det E = 0$, to układ ten nazywamy singularnym.
Zakładamy, że pęk (E,A) jest regularny, tzn.

$$\det[Es - A] \neq 0 \text{ dla pewnych } s \in \mathbf{C} \tag{10}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (10), to

$$[Es - A]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)} \tag{11}$$

przy czym μ jest indeksem nilpotentności, a Φ_i jest macierzą fundamentalną określoną zależnością [16,22,23]

$$E\Phi_i - A\Phi_{i-1} = \Phi_i E - \Phi_{i-1} A = \begin{cases} I_n & dla \quad i = 0 \\ 0 & dla \quad i \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

Rozwiązanie $x(t)$ równania (9a) ma postać [16,8]

$$x(t) = e^{\Phi_0 A t}\Phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\Phi_0 A(t-\tau)}\Phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \Phi_{-j}\left(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right) \tag{13}$$

przy czym $u^{(j)} = \dfrac{d^j u}{dt^j}$, $\delta^{(j)}$ oznacza pochodną (dystrybucyjną) *j-tego* rzędu impulsu (dystrybucji) Diraca $\delta(t)$.
Z (13) wynika, że jeżeli μ>1, to rozwiązanie $x(t)$ zależy od pochodnych wymuszenia $u(t)$.

Definicja 2. Układ ciągły (9) nazywamy antycypacyjnym, jeżeli wektor stanu x i wektor odpowiedzi y zależą od pochodnych wymuszeń u.

Twierdzenie 3. Układ standardowy (9) nie jest układem antycypacyjnym.

Dowód. Jeżeli $\det E \neq 0$, to analogicznie jak dla układu dyskretnego (1) można udowodnić, że

$$\Phi_i = \begin{cases} \left(E^{-1}A\right)^i E^{-1} & dla \quad i \geq 0 \\ 0 & dla \quad i < 0 \end{cases} \qquad \text{oraz } \mu = 0. \tag{14}$$

W tym przypadku ze wzoru (13) wynika, że x nie zależy od pochodnych wymuszenia u. □

Twierdzenie 4. Singularny układ ciągły (9) jest antycypacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}E > st.\det[Es\text{-}A] \tag{15}$$

Dowód. W sposób analogiczny jak dla układu dyskretnego (1) można udowodnić, że warunek (15) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy indeks nilpotentności μ>1. Ze wzoru (13) wynika, że w tym przypadku x zależy od pochodnych wymuszenia u. □

4. *Obwody elektryczne*

W pracy [19] wykazano, że jeżeli w obwodzie elektrycznym za zmienne stanu (składowe wektora x) przyjąć napięcia na kondensatorach i w obwodzie tym występuje przynajmniej jedno oczko zawierające wyłącznie idealne kondensatory oraz idealne źródła napięcia to macierz E w równaniu (9) tego obwodu jest osobliwa. Dualnie jeżeli w obwodzie elektrycznym za zmienne stanu przyjąć prądy w cewkach i w obwodzie tym występuje przynajmniej jeden węzeł, do którego są dołączone tylko idealne cewki oraz idealne źródła prądu, to macierz E w równaniu (9) tego obwodu jest osobliwa. Obwody elektryczne typu R,L lub R,C są przykładami słabo dodatnich układów singularnych [16,8]. Pojawia się więc pytanie czy są one również przykładami układów antycypacyjnych. Aby odpowiedzieć na to pytanie weźmy pod uwagę obwód n oczkowy o danych rezystancjach i indukcyjnościach $L_1, L_2, \ldots, L_r$, oraz m napięciach źródłowych $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Niech $i_1, i_2, \ldots, i_n$ będą prądami oczkowymi tego obwodu. Korzystając z metody oczkowej [19] możemy napisać dla tego obwodu równanie (9a), w którym $x = [i_1 \ \ i_2 \ \ \ldots \ \ i_n]^T$, $u = [e_1 \ \ e_2 \ \ \ldots \ \ e_m]^T$ (T - oznacza transpozycję)

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \in R^{n\times n}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R^{n\times m}, A_1 := \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & \frac{R_{12}}{L_1} & \ldots & \frac{R_{1r}}{L_1} \\ \frac{R_{21}}{L_2} & -\frac{R_{22}}{L_2} & \ldots & \frac{R_{2r}}{L_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_{r1}}{L_r} & \frac{R_{r2}}{L_r} & \ldots & -\frac{R_{rr}}{L_r} \end{bmatrix},$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} \frac{R_{1,r+1}}{L_1} & \ldots & \frac{R_{1n}}{L_1} \\ \frac{R_{2,r+1}}{L_2} & \ldots & \frac{R_{2n}}{L_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_{r,r+1}}{L_r} & \ldots & \frac{R_{rn}}{L_r} \end{bmatrix}, A_3 := \begin{bmatrix} R_{r+1,1} & \ldots & R_{r+1,r} \\ R_{r+2,1} & \ldots & R_{r+2,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \ldots & R_{nr} \end{bmatrix}, A_4 := \begin{bmatrix} -R_{r+1,r+1} & R_{r+1,r+2} & \ldots & R_{r+1,n} \\ R_{r+2,r+1} & -R_{r+2,r+2} & \ldots & R_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n,r+1} & R_{n,r+2} & \ldots & -R_{nn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

R_{ij} są rezystancjami własnymi $(i = j)$ oraz wzajemnymi $(i \neq j)$ oczek spełniającymi warunki

$$R_{ij} = R_{ji} \begin{cases} > 0 & dla \quad i = j \\ \geq 0 & dla \quad i \neq j \end{cases} \text{ oraz } R_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} R_{ij}, \ i=1,\ldots,n \quad (17)$$

Łatwo wykazać, że macierz A_4, której elementy spełniają warunki (17), jest macierzą nieosobliwą [19], $\det A_4 \neq 0$.

Wykażemy, że dla tego obwodu macierz N w dekompozycji Weierstrassa (8) pęku (E,A) jest macierzą zerową i indeks nilpotentności μ=1.

Biorąc pod uwagę, że istnieje macierz odwrotna A_4^{-1} wybieramy w tym przypadku

$$P = \begin{bmatrix} I_r & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_4^{-1} A_3 & A_4^{-1} \end{bmatrix}$$

Z zależności (23) wynika, że $s_i = \frac{z_i - 1}{\Delta t}$, czyli $z_i = 1 + \Delta t s_i$ dla i=1,2,...,n. □

Twierdzenie 6. Układ dyskretny (1), powstały w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego (9), jest układem antycypacyjnym dla dowolnej długości kroku $\Delta t > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest układem antycypacyjnym.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniami 2 i 4 teza zostanie udowodniona, jeżeli wykażemy, że

$$st.\det[Ez - F] = st.\det[Es - A] \tag{24}$$

Z lematu wynika, że liczba wartości własnych par (E,A) i (E,F), a więc również stopnie wielomianów $\det[Es\text{-}A]$ i $\det[Ez\text{-}F]$ są takie same. Zachodzi więc równość (24). □

6. Dwuwymiarowe układy liniowe.

6.1. Singularny model Fornasiniego-Marchesiniego.

Rozważmy liniowy układ 2D opisany równaniami

$$Ex_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + Bu_{ij} \quad (25a) \qquad y_{ij} = Cx_{ij} + Du_{ij} \quad (25b) \qquad i,j \in Z_+$$

gdzie $x_{ij} \in R^n$ jest semiwektorem stanu w punkcie (i,j), $u_{ij} \in R^m$ jest wektorem wymuszenia, $y_{ij} \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $E \in R^{n\times n}, A_k \in R^{n\times n}$, $k = 0,1,2$, $B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}$, $D \in R^{p\times m}$. Układ (model) (25) nazywamy singularnym pierwszym modelem Fornasiniego-Marchesiniego jeżeli $\det E = 0$ oraz standardowym jeżeli $\det E \neq 0$. Załóżmy, że

$$\det[Ez_1 z_2 - A_0 - A_1 z_1 - A_2 z_2] = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} d_{ij} z_1^i z_2^j \tag{26}$$

oraz $d_{n_1 n_2} \neq 0$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n_1, n_2 $(n_1 < n,\ n_2 < n)$.

Jeżeli powyższe założenie jest spełnione, wówczas [11]

$$[Ez_1 z_2 - A_0 - A_1 z_1 - A_2 z_2]^{-1} = \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{j=-\mu_2}^{\infty} T_{ij} z_1^{-(i+1)} z_2^{-(j+1)} \tag{27}$$

przy czym para (μ_1, μ_2) jest indeksem nilpotentności układu (25) oraz macierze tranzycji T_{ij} są zdefiniowane następująco

$$ET_{ij} = \begin{cases} A_0 T_{-1,-1} + A_1 T_{0,-1} + A_2 T_{-1,0} + I_n & dla\ \ i = j = 0 \\ A_0 T_{i-1,j-1} + A_1 T_{i,j-1} + A_2 T_{i-1,j} & dla\ \ i \neq 0 \quad i/\text{lub}\ \ j \neq 0 \end{cases} \tag{28}$$

i $T_{ij} = 0$ dla $i < -\mu_1$ $i/$lub $j < -\mu_2$.

Rozwiązanie x_{ij} równania (25) z warunkami brzegowymi

$$x_{i0} \ \text{dla}\ i \in Z_+ \ \text{i}\ x_{0j} \ \text{dla}\ j \in Z_+ \tag{29}$$

oraz dla ciągu wymuszeń u_{ij} jest dane przez [11]

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{i+\mu_1} \sum_{l=1}^{j+\mu_2} T_{i-k-1,j-l-1} Bu_{kl} + \sum_{k=1}^{i+\mu_1} \left(T_{i-k-1,j-l-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{k0} \\ u_{k0} \end{bmatrix} + T_{i-k,j-1} A_1 x_{k0} \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j+\mu_2} \left(T_{i-1,j-l-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{0l} \\ u_{0l} \end{bmatrix} + T_{i-1,j-l} A_2 x_{0l} \right) + T_{i-1,j-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{00} \\ u_{00} \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad i,j \geq 0 \tag{30}$$

Ze wzoru (30) wynika, że jeżeli $\mu_1 \geq 1$ *oraz*/lub $\mu_2 \geq 1$ wówczas rozwiązanie x_{ij} zależy od przyszłych wartości wymuszeń u_{kl} dla $k > i, l > j$.

Definicja 3. Układ (model) (25) nazywamy antycypacyjnym, jeżeli semiwektor stanu x_{ij} oraz wektor odpowiedzi y_{ij} zależą od przyszłych wartości wymuszeń u_{kl} dla $k > i, l > j$.

Twierdzenie 7. Singularny układ 2D (25) jest antycypacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$st_{z_i}\, adj[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \geq st_{z_i} \det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] \text{ dla } i = 1,2 \tag{31}$$

przy czym st_{z_i} oznacza stopień macierzy wielomianów (lub wielomianu) względem do z_i, $i = 1,2$ oraz $adj\, A(z_1, z_2)$ oznacza macierz dołączoną macierzy $A(z_1, z_2)$.

Dowód. Niech $st_{z_i}\, adj[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = q_i$
oraz $st_{z_i} \det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = n_i$ dla $i = 1,2$.
Wówczas, wykorzystując dobrze znaną procedurę dzielenia wielomianów z

$$[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]^{-1} = \frac{adj[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]}{\det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]} \tag{32}$$

otrzymujemy (27) gdzie $\mu_i = q_i - n_i + 1$ dla $i = 1,2$. Zatem, jeżeli zachodzi (31) wówczas $\mu_i \geq 1$ i ze wzoru (30) wynika, że rozwiązanie x_{ij} zależy od przyszłych wartości wymuszeń. W tym przypadku z równania (25b) wynika, że y_{ij} również zależy od przyszłych wartości wymuszeń. Zgodnie z definicją 3 układ (25) jest więc antycypacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (31). □

Uwaga: Niech rządE=rząd$[E, A_1, A_2]$. Wówczas (31) jest spełnione tylko wtedy, gdy rząd$E \geq st_{z_i} \det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]$ dla $i = 1,2$.

Przykład. Rozważmy model (25a), dla którego

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

W tym przypadku $n = 3, m = 1$

$$\det[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2] = \begin{vmatrix} -1 & z_1z_2 - z_2 & 0 \\ -z_2 & -z_1 & z_1z_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -z_1z_2$$

oraz $d_{11} = -1, n_1 = n_2 = 1$.
Korzystając z (32) otrzymujemy

$$[Ez_1z_2 - A_0 - A_1z_1 - A_2z_2]^{-1} = \frac{1}{z_1z_2} \begin{bmatrix} -z_1z_2 & 0 & z_1z_2^2 - z_1^2z_2^2 \\ 0 & 0 & -z_1z_2 \\ -z_2 & 1 & -z_1z_2^2 + z_2^2 - z_1 \end{bmatrix} =$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 0 & z_2 - z_1 z_2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -z_1^{-1} & z_1^{-1} z_2^{-1} & -z_2 + z_1^{-1} z_2 - z_2^{-1} \end{bmatrix} = T_{-2,-2} z_1 z_2 + T_{-1,-2} z_2 + T_{0,-2} z_1^{-1} z_2 + T_{-1,-1} + T_{-1,0} z_2^{-1} + T_{0-1} z_1^{-1} + T_{00} z_1^{-1} z_2^{-1}
$$

gdzie

$$
T_{-2,-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{-1,-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, T_{0,-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{-1,-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
T_{-1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Stąd $q_1 = q_2 = 2$ i $\mu_i - q_i - n_i + 1$ dla $i = 1,2$.
Stosując (30) otrzymujemy

$$
x_{ij} = \sum_{k=1}^{i+2} \sum_{l=1}^{j+2} T_{i-k-1,j-l-1} B u_{kl} + \sum_{k=1}^{i+2} \left(T_{i-k-1,j-l-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{k0} \\ u_{k0} \end{bmatrix} + T_{i-k,j-1} A_1 x_{k0} \right) +
$$

$$
+ \sum_{l=1}^{j+2} \left(T_{i-1,j-l-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{0l} \\ u_{0l} \end{bmatrix} + T_{i-1,j-l} A_2 x_{0l} \right) + T_{i-1,j-1} [A_0, B] \begin{bmatrix} x_{00} \\ u_{00} \end{bmatrix} \tag{34}
$$

oraz

$$
x_{1,1} = \begin{bmatrix} -u_{22} + u_{12} - u_{11} + u_{02} \\ -u_{11} \\ -u_{12} + u_{02} - u_{20} - 2u_{01} - u_{10} + u_{10} - u_{20} \end{bmatrix}
$$

$$
x_{1,j} = \begin{bmatrix} -u_{2,j+1} + u_{1,j+1} - u_{1,j} + u_{0,j+1} \\ -u_{1,j} \\ -u_{1,j+1} + u_{0,j+1} - u_{0,j} - u_{1,j-1} - u_{0,j} \end{bmatrix} \text{ dla } \quad j > 1
$$

$$
x_{i,1} = \begin{bmatrix} -u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,1} \\ -u_{i,1} \\ -u_{i,2} + u_{i-1,2} - u_{i-1,1} - u_{i,0} - u_{i+1,0} + x_{i,0} - x_{i+1,0} \end{bmatrix} \text{ dla } \quad i > 1
$$

$$
x_{i,j} = \begin{bmatrix} -u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i,j} \\ -u_{i,j} \\ -u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \end{bmatrix} \text{ dla } \quad i > 1 \text{ i } j > 1
$$

6.2. *Singularny model Roessera.*

Rozważmy liniowy układ 2D opisany równaniami

$$E\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x^h_{ij} \\ x^v_{ij} \end{bmatrix} + Bu_{ij} \tag{35a}$$

$$y_{ij} = C\begin{bmatrix} x^h_{ij} \\ x^v_{ij} \end{bmatrix} + Du_{ij} \tag{35b}$$

gdzie $x^h_{ij} \in R^{n_1}$ jest horyzontalnym semiwektorem stanu, $x^v_{ij} \in R^{n_2}$ jest wertykalnym semiwektorem stanu, $u_{ij} \in R^m$ jest wektorem wymuszenia, $y_{ij} \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi oraz

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \begin{matrix} E_{11} \in R^{n_1 \times n_1} \\ E_{22} \in R^{n_2 \times n_2} \end{matrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{matrix} A_{11} \in R^{n_1 \times n_1} \\ A_{22} \in R^{n_2 \times n_2} \end{matrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} B_1 \in R^{n_1 \times m} \\ B_2 \in R^{n_2 \times m} \end{matrix}, C \in R^{p \times (n_1+n_2)}, D \in R^{p \times m}$$

Układ (model) (35) nazywamy singularnym modelem Roessera jeżeli $\det E = 0$ i standardowym modelem Roessera jeżeli $\det E \neq 0$.

Załóżmy, że

$$d(z_1, z_2) = \det\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{r_1}\sum_{j=0}^{r_2} d_{ij} z_1^i z_2^j \tag{36}$$

oraz $d_{r_1 r_2} \neq 0$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $r_1, r_2 (r_1 \leq n_1, r_2 \leq n_2)$.

Jeżeli to założenie jest spełnione, wówczas [11]

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \sum_{i=-\mu_1}^{\infty}\sum_{j=-\mu_2}^{\infty} T_{ij} z_1^{-(i+1)} z_2^{-(j+1)} \tag{37}$$

gdzie para (μ_1, μ_2) jest indeksem nilpotentności układu (35) a macierze tranzycji T_{ij} są zdefiniowane następująco [11]

$$[E_1, 0]T_{i,j-1} + [0, E_2]T_{i-1,j} - AT_{i-1,j-1} = \begin{cases} I_n & dla \quad i = j = 0 \\ 0 & dla \quad i \neq 0 \;\; i/\text{lub} \;\; j \neq 0 \end{cases}, E_1 = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \end{bmatrix} \tag{38}$$

oraz $T_{ij} = 0$ dla $i < -\mu_1$, i/lub $j < -\mu_2$

Rozwiązanie x_{ij} równania (35a) z warunkami brzegowymi

$$x^h_{0j}, j \in Z_+, x^v_{i0}, i \in Z_+ \tag{39}$$

jest dane przez [11]

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{i+\mu_1-1}\sum_{l=0}^{j+\mu_2-1} T_{i-k-1,j-l-1}Bu_{kl} + \sum_{l=0}^{i+\mu_2-1} T_{i,j-l-1}E_1 x^h_{0l} + \sum_{k=0}^{i+\mu_1-1} T_{i-k-1,j}E_2 x^v_{k0} \tag{40}$$

Ze wzoru (40) wynika, że jeżeli $\mu_1 > 1$ oraz/lub $\mu_2 > 1$ wówczas rozwiązanie x_{ij} zależy od przyszłych wartości wymuszeń u_{kl} dla $k > i, l > j$.

Definicja 4. Układ (model) (35) nazywamy antycypacyjnym, jeżeli semiwektor stanu x_{ij} oraz wektor odpowiedzi y_{ij} zależą od przyszłych wartości wymuszeń u_{kl} dla $k > i, l > j$.

Twierdzenie 8. Singularny układ (35) jest antycypacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, E_i > st_{\,z_i} d(z_1, z_2) \quad \text{dla} \quad i = 1,2 \tag{41}$$

gdzie $d(z_1, z_2)$ jest określone przez (36).

Dowód. Łatwo pokazać, że

$$st_{\,z_i} adj \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \text{rząd}\, E_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2 \tag{42}$$

Wykorzystując dobrze znaną procedurę dzielenia wilomianów do

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d(z_1, z_2)} adj \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} \tag{43}$$

otrzymujemy $\mu_i = \text{rząd}\, E_i - r_i + 1$ dla $i = 1,2$. Zatem, jeżeli zachodzi (41) wówczas $\mu_i > 1$ i ze wzoru (40) wynika, że rozwiązanie x_{ij} zależy od przyszłych wartości wymuszeń. □

Przykład 3. Rozważmy model (35a), dla którego

$$E = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad A = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline -1 \\ 1 \end{array}\right] \tag{44}$$

W tym przypadku $n_1 = n_2 = 2$, $m = 1$

$$d(z_1, z_2) = \det \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & z_1 - 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & z_2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z_1 z_2$$

oraz $r_1 = r_2 = 1$.

Wykorzystując (43) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & z_1 - 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & z_2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z_1 z_2} \begin{bmatrix} z_2 & z_2 & 0 & z_1 z_2 \\ 0 & 0 & 0 & -z_1 z_2 \\ -1 & -z_1 - 1 & z_1 & -z_1^2 + 2z_1 \\ 0 & -z_1 z_2 & 0 & -z_1^2 z_2 + z_1 z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_1^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -z_1^{-1} z_2^{-1} & -z_2^{-1} - z_1^{-1} z_2^{-1} & z_2^{-1} & -z_1 z_2^{-1} + 2z_2^{-1} \\ 0 & -1 & 0 & -z_1 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= T_{-2-1} z_1 + T_{-20} z_1 z_2^{-1} + T_{-1-1} + T_{-10} z_2^{-1} + T_{-01} z_1^{-1} + T_{00} z_1^{-1} z_2^{-1}$$

gdzie

$$T_{-2-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}, T_{-20}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}, T_{-1-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix},$$

$$T_{-1,0}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}, T_{0-1}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, T_{00}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Stąd $\mu_1 =$rząd$E_1 - r_1 + 1 = 2$ oraz $\mu_2 =$rząd$E_2 - r_2 + 1 = 1$

Stosując (40) otrzymujemy

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{i+1}\sum_{l=0}^{j} T_{i-k-1,j-l-1}Bu_{kl} + \sum_{l=0}^{j} T_{i,j-l-1}E_1x_{0l}^h + \sum_{k=0}^{i+1} T_{i-k-1,j}E_2x_{k0}^v = \begin{bmatrix} u_{ij}+u_{i-1,j} \\ -u_{ij} \\ -u_{i+1,j-1}+u_{i,j-1}-u_{i-1,j-1} \\ -u_{i+1,j}+u_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{dla } i,j>0$$

7. Uwagi końcowe i problemy otwarte

Liniowe układy standardowe ciągłe i dyskretne są układami nieantycypacyjnymi. Singularne układy ciągłe są układami antycypacyjnymi wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (15), a singularne układy dyskretne, gdy jest spełniony warunek (7).

Wykazano, że:

1) obwody elektryczne nie są układami antycypacyjnymi
2) układ dyskretny powstały w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego jest układem antycypacyjnym dla dowolnej długości kroku dyskretyzacji wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest antycypacyjny.

Zostały sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające dla antycypacji singularnych liniowych układów dyskretnych 2D.

W pracy [17] przeprowadzono analizę wpływu długości kroku dyskretyzacji na wewnętrzną i zewnętrzną dodatniość i stabilność asymptotyczną układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego.

Problemem otwartym jest analiza wpływu długości kroku dyskretyzacji na osiągalność, sterowalność i obserwowalność dodatniego układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z dodatniego układu ciągłego [11,20].

Problemem otwartym jest również przeniesienie tych rozważań na singularne układy dwuwymiarowe ciągło-dyskretne [18].

Literatura.

[1] Campbel S. L.: Singular systems of differential equation. Pitman Advanced Publishing Program. pp.138-143

[2] Dai L.: Singular Control Systems. Lectures Note in Control and Information Sciences. 1989 Springer-Verlag

[3] Dubois D. M.: Computing Anticipatory Systems with Incursion and Hyperincursion. CP437, Computing Anticipatory Systems: CAYS-First mt. Corif. edited by Daniel M. Dubois, The American Institute of Physics, 1998, pp.3-28
[4] Dubois D. M.: Incursive Anticipatory Control of a Chaotic Robot Arm., CP437, Computing Anticipatory Systems: CAYS- First mt. Cotif edited by Daniel M. Dubois, The American Institute of Physics, 1998, pp. 406-417
[5] Fornasini E. and Marchesini G.: State-space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. AC-21, 1976, pp. 484-491.
[6] Fornasini E. and Marchesini G.: Doubly-indexed dynamical systens: State-space models and structural properties, Math. Syst. Theory, vol. 12, 1978, pp. 59-72.
[7] Kaczorek T.: Computation of fundamental matrices and rechability of positive singular discrete linear systems, Bull. Pol. Acad. Teclm. Sci. vol.46, No 4, 1998, pp. 501-511.
[8] Kaczorek T.: Electrical circuits as example of positive singular continuous-time systems. SPETO '98, Ustroń 20-22.05.98. pp.37-43
[9] Kaczorek T.: Positive linear systems and their relationship witch electrical circuits. SPETO '97, Ustroń 21-24.05.1997, pp.33-41
[10]Kaczorek T.: Positive singular discrete linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci. vol.45; 1997 No 4, pp. 619-631
[11]Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów, PWN Warszawa 1999.
[12]Kaczorek T.: Reachability and controllability of non-negative 2-D Roesser type models, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn., vol. 44, No 4, 1996, pp. 405-410.
[13]Kaczorek T.: Two-Dimensional Linear Systems, Springer-Verlag, Berlin 1985.
[14]Kaczorek T.: Singular general model of 2-D systems and its solution, IEEE Trans. on Autom. Contr., vol. AC-33, No 11, 1988, pp. 1060-1061
[15]Kaczorek T.: Positive descriptor discrete-time linear systems. International Jouraal: Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems; 1998 No 1(7), pp.38-54
[16]Kaczorek T.: Weakly positive continuous-time linear systems, Bull. Pol. Acad. Sci. vol 46; 1998 No.2, pp.233-245
[17]Kaczorek T.: Influence of value of the discretisation sten on positivity and stability of linear dynamic systems Pomiary, Automatyka, Kontrola, PAK 12, 1999, pp. 3-7.
[18]Kaczorek T.: Singular 2-D continuous-discrete linear systems, Dynamics of continuous, discrete and impulse systems, Advances in Systems Science and Applications, 1995, pp. 103-108.
[19]Kaczorek T.: Słabo dodatnie układy w elektrotechnice. Przegląd Elektrotechniczny R. LXXIV; 1998 nr 11, pp.277-281
[20]Klamka J.: Controllability of dynamical systems, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.
[21]Kurek J.: The general state-space model for a two-dimensional linear digital system, IEEE Trans. Autom. Contr. AC-30, June 1985, pp. 600-602.
[22]Lewis F. L.: A survey of linear singular systems. Circuits Systems Signal Process, Vol.5; 1986 No.1, pp.1-36
[23]Lewis F. L.: Descriptor systems: Decomposition into forward and backward subsystems, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-29; 1984, pp.167-170
[24]Mertzios B. G. and Lewis F. L.: Fundamental matrix of discrete singular systems. Circuits, Syst., Signal Processing Vol.8; 1989 No.3, pp.341-355
[25]Roesser R.B.: A discrete state space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Contr. AC-20, 1975, pp. 1-10.
[26]Rosen R.: Anticipatory Systems, Pergamon Press 1985
[27]Valcher M.E.: On the internal stability and asymptotic behaviour of 2-D positive systems, IEEE Trans. on Circuits and Systems – I, vol. 44, No 7, 1997, pp. 602-61