dr inż. Andrzej Sawicki
Przemysłowy Instytut
Automatyki i Pomiarów
PIAP-Warszawa

TEORETYCZNE PODSTAWY GLOBALNEJ OCENY ROBOTA I INNYCH URZĄDZEŃ PODDANYCH DZIAŁANIU NARAŻEŃ

Badania powtarzalności [4] jak i sztywności [5] pod wpływem narażeń wykazały,że olbrzymie ilości danych wymagają pewnej miary syntetycznej pewnego wskaźnika, który byłby miarą globalną jakości robota lub innego urządzenia,którego parametry wielokrotnie są sprawdzane w różnych okolicznościach. W pracy proponuje się wykorzystać przestrzeń - R^n, n - wymiarową, ortogonalną, normowaną i umiejscowić w niej wektory odpowiadające badanym parametrom, stworzyć macierz i wyznacznik, który spełnia wymagania miary Lebesgue'a i może być utworzony jako wyznacznik Grama. Ten ostatni proponowany jest jako miara globalna.

BASIC THEORETICAL GLOBAL ESTIMATION OF ROBOTS AND OTHER DEVICE PUT ON TEST OF ENVIRONMENT

.The methods of analysis regression which was applied to estmate the robots, was discussed in the II Conference - Mechatronika' 94. (Warsaw - 1994r.) The present paper describes the conception of the global estimate of the orthogonal polynomials. In order to make the comparisson between them possible, the space R^n with the matrix of their coefficient polynomials was introduced. For the purpose of the finding the common measure between this polynomials, the Grama matrix was introduced.

1. WSTĘP

Badania doświadczalne wykazują [4] [5] , że z dużym powodzeniem można stosować regresję krzywoliniową do oceny urządzeń szczególnie poddanych narażeniom. Doświadczenie uczy, że aproksymacja funkcji F za pomocą wielomianów na całym zbiorze Z jest zadawalająca z praktycznego punktu widzenia, okazuje się, że wielomiany dobrze spełniają swoją rolę,, szczególnie gdy służą lokalnej aproksymacji funkcji regresji i dużo gorzej gdy stosowane są do globalnej aproksymacji tej funkcji na całym obszarze jej określoności. Z kolei, inne niż wielomiany funkcje aproksymujące, nastręczają wiele kłopotów numerycznych. Dlatego mają wielomiany wielkie zastosowanie, a wielomiany potęgowe ortogonalne są szczególnie bardzo wygodne i z tego powodu wykorzystywane są w proponowanej ocenie.

2. REGRESJA KRZYWOLINIOWA

Korzystamy z niej, gdy pragniemy znaleźć zależność nieliniową cechy - y od cechy - x,postać wielomianu

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_p x^p \qquad (1)$$

który jest wielomianem p - tego stopnia względem x. gdzie: p = 0, 1, 2.......
Wykorzystując regresję krzywoliniową opartą na wielomianach ortogonalnych uzyskuje się prostotę równań normalnych a ponadto pozwala określać kolejny wyższy wielomian, bez wyliczania od początku wszystkich współczynników jedynie dodając współczynniki związane z zwiększaniem stopnia wielomianu.

W przypadku gdy wykonujemy badania w różnych warunkach dla różnych środowisk i narażeń otrzymujemy wówczas zbiory wielomianów szczegóły w pracach [3][4][5], które wymagają pewnej oceny ,jakościowej i ilościowej. Istotą zagadnienia jest dopasowanie do danych liczbowych wielomianu (1). Z problemem dopasowania danych paraboli p-tego stopnia jak podano wyżej wiążą się dwa pytania: którego stopnia wielomian najlepiej wyrównuje dane liczbowe i jak wyznaczyć ten wielomian, tzn. jak wyznaczyć współczyniki regresji $a_0, a_1, \ldots a_p$?
W tym celu wykorzystujemy metodę najmniejszych kwadratów wprowadzając warunek:

$$\sum (y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots\cdots - a_p x^p)^2 = \min \qquad (2)$$

Jest to metoda parabolicznego wyrównywania. Pozwala ona na wyznaczenie równań normalnych, z których można oszacować współczynniki wg. [1][2][3].

Wprowadzając dwa wielomiany $W_1 = W_1(x)$ i $W_2 = W_2(x)$ uważamy je za ortogonalne gdy $\Sigma N_h W_1 W_2 = 0$ gdzie sumowanie przebiega po wszystkich c -wartościach zmiennej x : $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_c$, występujących odpowiednio $N_1, N_2 \ldots\ldots\ldots\ldots N_c$ razy.

Dzięki wykorzystaniu wielomianów możemy wielomian (1) przedstawić w postaci niezależnych lub nieskorelowanych składników: $b_1 w_1, b_2 w_2, \ldots\ldots\ldots b_p w_p$.
Fakt ten stanowi podstawową korzyść z stosowania wielomianów ortogonalnych. Własność ta pozwala na obliczenia, każdego ze współczynników regresji - b niezależnie od pozostałych, na szybkie i proste zweryfikowanie istotności każdego ze współczynników.
Wtedy warunek minimalizacji kwadratów przyjmuje postać:

$$\sum (y - b_0 W_0 - b_1 W_1 - b_2 W_2 - \cdots - b_p W_p)^2 = \min \qquad (3)$$

Pochodna tej sumy obliczona względem współczynników: $b_0, b_1, \ldots\ldots b_p$ i przyrównane do zera dają tzw. równanie normalne gdzie: $W_i = W_i(x_h)$ ($h = 1,2,\ldots\ldots,c,\ i = 0,1,2,\ldots\ldots,p$)
Z równania normalnego (4) uzyskujemy niezależną ocenę współczynnika b_i.

$$b_i \sum_h^c N_h W_i^2 = \sum_h^c N_h y_h w_i \qquad (4)$$

W ten sposób przechodzimy dzięki wielomianom ortogonalnym z analizy wielomianu potęgowego do analizy w przestrzeni liniowej.

3.WPROWADZENIE DO PRZESTRZENI N-WYMIAROWEJ

Jeżeli chce się dokonać oceny ilościowej, to niezbędną sprawą wydaje się potraktować współczynniki : a_1........a_p jako wektory . Wtedy możemy zapisać, że będą dane wektory $a_r = (a_{1r}, ...a_{mr}) \in R^m$, $r = 1,2,.......k$; przy czym $k \leq m$. Jeżeli przyjmujemy , że mamy przestrzeń liniową E nad ciałem liczb rzeczywistych R z określonym iloczynem skalarnym, to znaczy, że mamy przestrzeń euklidesową (E).

W ramach tej przestrzeni istnieje baza - baza ortogonalna występuje jeżeli każde dwa wektory różne ε_i, ε_k tej bazy są ortogonalne, czyli $\Lambda\ \varepsilon_i \cdot \varepsilon_k = 0$. Bazą ortogonalną nazywamy unormowaną (lub ortonormalną), gdy $\Lambda \| \varepsilon_i \| = 1$. Otóż, jeżeli $\{\beta_1, \beta_2,...... \beta_n\}$ będzie dowolną , nie koniecznie ortogonalną bazą przestrzeni E to stosujemy procedurę (w literaturze przedmiotu nazywa się procesem ortogonalizacji) Grama - Schmidta.[1][2].

Wektory $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_n\}$ otrzymane w wyniku procesu ortogonalizacji z wektorów bazy $\{ \beta_o, \beta_1 ..... \beta_n\}$ tworzą ortogonalną bazę przestrzeni euklidesowej. W ramach tej przestrzeni zbiór $\beta_o = 1$; $\beta_1 = t$; ..$\beta_{n-1} = t^{n-1}$ wykazuje liniową niezależność. Wobec tego każda ze zmiennych z wykładnikiem potęgowym liczb całkowitych, może być przyjęta jako baza w przestrzeni euklidesowej.

4. OCENA PRZY POMOCY WIELOMIANU

Jeżeli przyjmiemy, że zmiany parametrów danego urządzenia możemy opisywać przy pomocy

$$V(E) = a_0 \cdot E_o + a_1 \cdot E_1 + ...+ a_n \cdot E_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E_i$$

„wielomianów narażeń " krzywych regresji w postaci $w(x) = a_o + a_1 \cdot x + ...a_n \cdot x^{n-1}$ dla różnych narażeń, mamy k - krzywych, a dla p urządzeń uzyskujemy ilość krzywych m=k x p.Aby dokonywać porównania między zbiorami krzywych wprowadzamy przestrzeń z bazą:Eo=1; $E_1=X$; ....$E_n= X^N$. Wtedy dowolny wielomian regresyjny można przedstawić w postaci : W ten sposób zagadnienie sprowadzamy do zagadnienia algebry liniowej.Izomorfizm odwzorowujący przestrzeń $W(x) \rightarrow R^n(E)$ przyporządkowujący wektorom ich współrzędne względem bazy, ma postać: $V(W(x)) = [a_0, a_1, a_2 ....a_n]$.W celu porównania poszczególnych wielomianów możemy współczynniki wielomianów przedstawić w postaci macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jeżeli φ przyjmiemy za wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie, to możemy przejść do układu wektorów: $[\varphi(\beta_1); \varphi(\beta_2); .... \varphi(\beta_n)]$ i ustawić je w następującą macierz: jest to macierz $A = [a_{ij}]$.

$$\begin{bmatrix} \varphi(\beta_1) \\ \varphi(\beta_2) \\ . \\ . \\ \varphi(\beta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

W celu znalezienia wspólnej miary wydaje się sensownym wprowadzić macierz Grama o postaci $G = A^T \cdot A$. Wyznacznik macierzy Grama zapisujemy : $\det G\ [a_1 \ldots a_n]$. Jest on równy kwadratowi objętości k - wymiarowego równoległościanu wyznaczonego przez wektory $a_{11} \ldots \ldots a_{mn}$. Wyznacznik Grama dowolnego układu wektorów jest zawsze większy lub równy zeru. Jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy wektory z których jest utworzony są liniowo zależne. Ze względu na powyzszą cechę możemy ją przyjąć jako podstawę do oceny zbiorów współczynników wielomianu.

Wprowadzamy więc określenie błędu objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $a_1 \ldots\ldots a_n$. Błędem objętości - ΔV równoległościanu rozpiętego na wektorach $a_1 \ldots . a_n$. nazywamy następujące wyrażenie:

$$\Delta V = \left| \sqrt{\det G_1} - \sqrt{\det G_2} \right|$$

gdzie: $\det G_1$ - wyznacznik Grama uzyskany przy narażeniach pierwszych,
$\det G_2$ - wyznacznik Grama uzyskany przy narażeniach drugich.

Określenie wyżej podane pozwala na ocenę zbiorów wielomianów regresyjnych jak i ich porównanie. Należy wyraźnie zwrócić uwagę, że $\det G\ [a_1 \ldots\ldots a_n]$ może być wykorzystany jako wzorcowa wielkość do porównywania innych. Głównie interesująca jest tutaj możliwość przyjęcia pewnej miary dla różnych zbiorów współczynników wielomianów otrzymanych w różnych narażeniach oraz dla różnych wyrobów. Wydaje się, że przyjęcie tej miary umożliwia wprowadzenie pewnej oceny i dopuszczalnych przedziałów zmienności..

5. OCENA GLOBALNA JAKO MIARA LEBESGUE'A

Konstrukcję miary Lebesgue'a (L) wprowadzić możemy przy następujacych założeniach. Niech R^n oznacza n - wymiarową przestrzeń euklidesową. Przedziałem w przestrzeni R^nnazywamy zbiór p-tów $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ takich że: $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i = 1 \ldots\ldots n)$ lub zbiór p-tów, scharakteryzowanych przez ww. nierówności, w których cz ęść lub wszystkie znaki $\leq$ zostały zastąpione przez <.. Nie wykluczamy możliwosci, że dla pewnej wartości i jest $a_i = b_i$, w szczególności przedziałem jest zbiór pusty.

Jeżeli A jest sumą skończonej ilości przedziałów, to mówimy, że A jest zbiorem elementarnym.

Z reguły jeśli istnieje ciąg $\{A_n\}$ zbiorów elementarnych taki, że $A_n \to A$, to mówimy, że zbiór A jest skończenie μ - mierzalny i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} = d(A, A_n) = 0$$

Gdzie przyjmujemy $A_n \to A$ jeśli

$$A \in M_p$$

Funkcja $d(A,A_n)$ ma podstawowe własności odległości.
W rzeczywistości główne zarysy teorii ukazują się znacznie wyraźniej w przypadku ogólnym, gdy widać dobrze, że wszystko zależy jedynie od przeliczalnej addytywności miary μ określanej na pewnym σ - pierścieniu.
Jeżeli I jest przedziałem, to definiujemy :

$$m(I) = \prod_{i=1}^{p} (a_i - b_i)$$

bez względu na to czy w ww. nierównościach znak równości występuje czy nie.
Jeśli $A = I_1 \cup \ldots\ldots \cup I_n$ i jeśli te przedziały są parami rozłączne, przyjmujemy że: $m(A) = m(I_1) + \ldots\ldots + m(I_n)$. A jest sumą skończonej ilości przedziałów rozłącznych w danej przestrzeni a m jest w niej funkcją addytywną.

Zauważmy że jeśli p = 1,2,3 , to m jest odpowiednio długością, powierzchnią, objętością. Z tego względu wyznacznik Grama, odpowiada konstrukcji miary (L). W ramach tej przestrzeni występuje skończona liczba elementarnych objętości związanych z wyznacznikiem Grama i może być przedłużona do przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru odpowiednio mierzalnej.

Elementarne objętości wynikajace z zasady tworzenia wyznacznika Grama, tworzą objetosciowo przestrzeń z miarą, a elementy zbioru są zbiorami mierzalnymi, a nieujemna przeliczalna addytywna funkcja zbioru, która może być zwana miarą, określona jest na danych zbiorach mierzalnych.

Ujęcie ww. miary w aspekcie teorii (L) wydaje się uzasadnione, ponieważ pozwala je uogólnić i stwierdzić, że jest możliwe wykorzystanie jako miary wyznacznika Grama, ze względu na jego właściwości i możliwe jest budowanie pochodnych pojęć miar syntetyzujących w oparciu o jego własności.

6. WNIOSKI

1.Teoria miary Lebesgue'a w R^m pozwala wykazać [3], że miara ta jest uogólnieniem

$$vol = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

objętości przedziału. Jeśli P jest przedziałem to przy założeniu, że vol $\varnothing$ =0.

2.Jeżeli przedział $P \in R^m$ jest przedziałem domkniętym, to dla każdego podziału $\{P_1, P_2 .... P_3\}$ przedziału P mamy :

$$P = \bigcup_{j=1}^{n} P_j \quad \text{oraz} \quad vol(P) = \sum_{j=1}^{n} vol(P_j)$$

3.Jak wspomniano wyznacznik Grama jest równy kwadratowi objetości k- wymiarowego równoległościanu wyznaczonego przez wektory a_{11} .... a_{mn}.

4. Jeżeli wyznacznik Gram spełnia wymagania miary Lebesgue'a, tzn.,że możemy tworzyć pojecie objętości wzorcowej w przestrzeni R^m i porównywać z nią inne objętości. Pamietamy przy tym, że elementami wyznacznika są wektory a_{11}........... a_{mn}, które są współczynnikami odpowiednich wielomianów aproksymujących.

5. W przedstawiony sposób miara objętości, może stać sie miarą globalną pozwalającą ocenić " jakość" stopnia aproksymacji.

7.LITERATURA

1. Białynicki - Birula A: Algebra . PWN - Warszawa 1980 r.
2. Jefimow N.W., Rozendorn E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN-Warszawa 1974r.
3. Rudin W. Podstawy analizy matematycznej, PWN -Warszawa 1976r.
4. Sawicki A.: Ocena metrologiczna przyrządów automatyki pod wpływem narażeń. VIII Krajowa Konferencja Metrologii. Warszawa 18 ÷ 20 października 1995r.
5. Sawicki A.: Regresja nieliniowa w ocenie robotów. Materiały Konferencyjne. XIV Ogólnopolska Konferencja Naukowo - Dydaktyczna Teorii Maszyn i Mechanizmów. Gdańsk/Gdynia , 23÷26 listopada 1994r.
6. Sawicki A.: Ocena sztywności robota. Materiały Konferencyjne. XV Ogólnopolska Konferencja Naukowo - Dydaktyczna.Teorii Maszyn i Mechanizmów . Białystok - Białowieża, 17 ÷ 21 września 1996r.
7 Sawicki A.: Regresja nieliniowa w ocenie robotów. II Krajowa Konferencja Naukowo - Techniczna. Mechatronika'94 , Warszawa 22 ÷ 23 września 1994r.