Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

DODATNIE UKŁADY JEDNO I DWU-WYMIAROWE ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

Streszczenie: *W pracy tej wykazano, że osiągalność i sterowalność do zera dodatnich układów dyskretnych jedno i dwuwymiarowych nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wektora stanu. Podano metody doboru macierzy sprzężeń zwrotnych dla dodatniego układu nieosiągalnego (niesterowalnego do zera) tak, aby układ zamknięty był osiągalny (sterowalny).*

POSITIVE 1D AND 2D SYSTEMS WITH STATE-FEEDBACKS

Abstract. *It is shown that the reachability and controllability to zero of positive 1D and 2D discrete linear systems are not invariant under the state-feedbacks. By suitable choice of state-feedbacks the unreachable (uncontrollable to zero) positive linear system can be made reachable (controllable to zero).*

1. Wprowadzenie.

Osiągalność i sterowalność układów dynamicznych jedno (1D) i dwu-wymiarowych (2D) należą do podstawowych pojęć teorii sterowania i systemów [1-6,11-26,29-31,33]. Przegląd wyników dotyczących tych pojęć można znaleźć w książkach [25,19] oraz w wielu artykułach [1-6,13,15,30,33]. Pojęcie dodatniego 2D modelu Roessera zostało wprowadzone w pracy [15], a osiągalność i sterowalność tego modelu była rozpatrywana w pracach [14-16]. Własności spektralne i asymptotyczne zachowanie dodatnich 2D układów liniowych były badane w pracach [9,10,14]. Jak wiadomo [19] osiągalność i sterowalność układów standardowych dyskretnych i ciągłowych jednowymiarowych są niezmiennicze względem sprzężenia zwrotnego , tzn. układ zamknięty (ze sprzężeniem zwrotnym) jest osiągalny (sterowalny) wtedy i tylko wtedy, gdy osiągalny (sterowalny) jest również układ otwarty (bez sprzężenia zwrotnego). W pracy [12] wykazano, że własność ta również zachodzi dla liniowych układów dwu-wymiarowych. W pracy tej zostanie udowodnione, że własność ta nie zachodzi dla układów dodatnich jedno i dwu-wymiarowych. Wykażemy, że dla dodatniego układu dyskretnego nieosiągalnego (niesterowalnego do zera) można dobrać sprzężenie zwrotne od wektora stanu tak, aby układ zamknięty był osiągalny (sterowalny).

2. Osiągalność układów jednowymiarowych.

Niech $R^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o elementach z ciała liczb rzeczywistych R i wymiarach $n\times m$ oraz $R^n := R^{n\times 1}$. Zbiór tych macierzy o elementach nieujemnych oznaczać będziemy przez $R_+^{n\times m}$ oraz $R_+^n := R_+^{n\times 1}$.
Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad, \; i \in Z_+ := \{0,1,...\} \tag{1a}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{1b}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$, $y_i \in R^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej i, a $A \in R_+^{n \times n}$, $B \in R_+^{n \times m}$, $C \in R_+^{p \times n}$ i $D \in R_+^{p \times m}$.

Definicja 1. Układ (1) nazywamy dodatnim (dokładniej wewnętrznie dodatnim), jeżeli dla każdego $x_0 \in R_+^n$ oraz dowolnego ciągu $u_i \in R_+^m$, $i \in Z_+$ mamy $x_i \in R_+^n$ oraz $y_i \in R^p$ dla $i \in Z_+$.

Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy [5,6]

$$A \in R_+^{n \times n}, \; B \in R_+^{n \times m}, \; C \in R_+^{p \times n}, \; D \in R_+^{p \times m} \tag{2}$$

Definicja 2. [5,6] Układ dodatni (1) nazywamy osiągalnym, w k-krokach, jeżeli dla każdego $x_f \in R_+^n$ (oraz $x_0 = 0$) istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$ dla $i = 0,1,...,k-1$ taki, że $x_k = x_f$.

Twierdzenie 1. [5,6] Układ dodatni (1) jest osiągalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki

1) rząd $R_n = n$, $R_n := [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ (3)
2) macierz R_n zawiera n liniowo niezależnych kolumn, z których każda zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.

2.1. Układy o jednym wejściu.

Na początku weźmy pod uwagę układ dodatni (1) o jednym wejściu ($m = 1$), którego macierze A i B mają następujące postacie kanoniczne

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in R_+^{n \times n}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R_+^n \tag{4}$$

Łatwo sprawdzić, że dla pary (4) jest spełniony warunek 1) twierdzenia 1, gdyż

$$\text{rząd}[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n \tag{5}$$

ale nie jest spełniony warunek 2) tego twierdzenia, jeżeli przynajmniej jeden współczynnik macierzy A $a_i \neq 0$ dla $i = 1,...,n-1$. W tym przypadku układ dodatni (1) nie jest osiągalny w n-krokach.

Weźmy pod uwagę układ dodatni (1) ze sprzężeniem zwrotnym

$$u_i = v_i + Kx_i \tag{6}$$

przy czym $K \in R^{1 \times n}$, a v_i jest nowym wymuszeniem.

Podstawiając (6) do (1a) otrzymamy

$$x_{i+1} = A_z x_i + Bv_i, \; i \in Z_+ \tag{7}$$

przy czym

$$A_z = A + BK \tag{8}$$

Dla pary (4) oraz

$$K = [a_0, a_1, ..., a_{n-1}] \tag{9}$$

macierz (8) ma postać

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Korzystając z (10) otrzymamy

$$[B, A_z B, \ldots, A_z^{n-1} B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Z (11) wynika, że dla układu ze sprzężeniem zwrotnym oba warunki twierdzenie 1 są spełnione i układ ten jest osiągalny w n-krokach. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Niech układ dodatni (1) z macierzami A i B o postaci (4) będzie nieosiągalny w n-krokach. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (6) jest osiągalny w n-krokach, jeżeli macierz K ma postać (9).

Z powyższych rozważań wynika następujący ważny wniosek

Wniosek 1. Osiągalność układu dodatniego (1) nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego (6).

2.2. Układ o wielu wejściach.

Weźmy z kolei pod uwagę układ dodatni (1) o m wejściach $(m > 1)$, którego macierze A i B mają następujące postacie kanoniczne

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}, \; B = diag[b_1, \ldots, b_m] \qquad (12a)$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{d_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \in R_+^{d_i \times d_i},$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{d_j-1}^{ij} \end{bmatrix} \in R_+^{d_i \times d_j}, \; i, j = 1, \ldots, m, \quad i \neq j \qquad (12b)$$

$$b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R_+^{d_i \times 1}, \quad \sum_{i=1}^{m} d_i = n$$

Łatwo sprawdzić, że dla pary (12) warunek 1) twierdzenia 1 jest spełniony, ale nie jest spełniony warunek 2) tego twierdzenia, jeżeli przynajmniej m współczynników $a_k^{ii} \neq 0$ dla $k = 1,...,d_{i-1}$, $i = 1,...,m$. W tym przypadku układ dodatni (1) nie jest osiągalny w n-krokach.
Weźmy pod uwagę układ dodatni (1) ze sprzężeniem zwrotnym (6). Niech macierz K tego sprzężenia zwrotnego ma postać

$$K = \begin{bmatrix} a_0^{11}, & a_1^{11} & ,\dots, & a_{d_1-1}^{11}, & a_0^{12}, & a_1^{12} & ,\dots, & a_{d_2-1}^{12} & ,\dots, & a_0^{1m}, & a_1^{1m} & ,\dots, & a_{d_m-1}^{1m} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ a_0^{m1}, & a_1^{m1} & ,\dots, & a_{d_1-1}^{m1}, & a_0^{m2}, & a_1^{m2} & ,\dots, & a_{d_2-1}^{m2} & ,\dots, & a_0^{mm}, & a_1^{mm} & ,\dots, & a_{d_m-1}^{mm} \end{bmatrix} \in R^{m \times n} \quad (13)$$

W tym przypadku macierz układu zamkniętego (8) ma postać

$$A_z = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R_+^{d_i \times d_i}, \; i = 1,...,m \quad (14)$$

Z (14) wynika, że dla układu ze sprzężeniem zwrotnym oba warunki twierdzenia 1 są spełnione i układ ten jest osiągalny w n-krokach. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 3. Niech układ dodatni (1) z macierzami A i B o postaci (12) będzie nieosiągalny w n-krokach. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (6) jest osiągalny w n-krokach jeżeli macierz K ma postać (13).

3. Sterowalność układów jednowymiarowych.

Definicja 3. [5,6] Układ dodatni (1) nazywamy sterowalnym do zera w k-krokach, jeżeli dla każdego niezerowego $x_0 \in R_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$ dla $i = 0,1,...,k-1$ taki, że $x_k = 0$.

Twierdzenie 4. [5,6] Układ dodatni (1) jest sterowalny do zera wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:
1) macierz R_n (określona przez (3)) zawiera n liniowo niezależnych kolumn z których każda zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru,
2) promień spektralny $\rho(A)$ macierzy A spełnia warunek
   a) $\rho(A) < 1$ jeżeli sprowadzenie stanu początkowego $x_0 \neq 0$ do zera zachodzi w nieskończonej liczbie kroków,
   b) $\rho(A) = 0$ jeżeli sprowadzenie stanu $x_0 \neq 0$ do zera zachodzi w skończonej liczbie kroków.

Weźmy pod uwagę układ dodatni (1) o m wejściach $(m>1)$, którego macierze A i B mają postacie kanoniczne (12).
Analogicznie jak w przypadku osiągalności łatwo wykazać, że warunek 1) twierdzenia 4 nie jest spełniony, jeżeli przynajmniej m współczynników $a_k^{ii} \neq 0$ dla $k=1,\dots,d_{i-1}$, $i=1,\dots,m$ i układ ten nie jest sterowalny do zera.
Macierz układu zamkniętego (8) dla macierzy K o postaci (13) przyjmuje postać (14). Macierz ta ma tylko zerowe wartości własne i jej promień spektralny $\rho(A_z)=0$. Mamy więc następujące twierdzenie

Twierdzenie 5. Niech układ dodatni (1) z macierzami A i B o postaci (12) będzie niesterowalny do zera. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (6) jest sterowalny do zera w skończonej liczbie kroków, jeżeli macierz K ma postać (13).
Z powyższych rozważań wynika następujący ważny wniosek

Wniosek 2. Sterowalność do zera układu dodatniego (1) nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego (6).

4. Osiągalność układów dwu-wymiarowych.

Weźmy pod uwagę 2D model Roessera opisany równaniami [31,20,25]

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} \qquad (15a)$$

$$y_{ij} = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + Du_{ij}, \quad i,j \in Z_+ \qquad (15b)$$

przy czym $x_{ij}^h \in R^{n_1}$ i $x_{ij}^v \in R^{n_2}$ są odpowiednio horyzontalnym i wertykalnym wektorem stanu w punkcie (i,j), $u_{ij} \in R^m$ i $y_{ij} \in R^p$ są odpowiednio wymuszeniem i odpowiedzią, a $A_{kl} \in R^{n_k \times n_l}, B_k \in R^{n_k \times m}, C_k \in R^{p \times n_k}, k,l = 1,2,\ D \in R^{p \times m}$.

Definicja 4. Układ (model) (15) nazywamy dodatnim (dokładniej wewnętrznie dodatnim), jeżeli dla wszystkich warunków brzegowych

$$x_{0j}^h \in R_+^{n_1}, j \in Z_+ \quad \text{i} \quad x_{i0}^v \in R_+^{n_2}, i \in Z_+ \qquad (16)$$

oraz każdego ciągu wymuszeń $u_{ij} \in R_+^m$, $i,j \in Z_+$ mamy $x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} \in R_+^n, n = n_1 + n_2$ oraz $y_{ij} \in R_+^p$ dla $i,j \in Z_+$.
Układ (15) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy [15]

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in R_+^{n \times n}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R_+^{n \times m}, C = [C_1 \ C_2] \in R_+^{p \times n}, D \in R_+^{p \times m} \qquad (17)$$

Definicja 5. Układ dodatni (15) nazywamy osiągalnym w punkcie $(h,k),(h,k \in Z_+, h,k > 0)$ dla zerowych warunków brzegowych (16) (ZWB), jeżeli dla każdego wektora $x_f \in R_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_{ij} \in R_+^m$ dla $(i,j) \in D_{hk}$ taki, że $x_{hk} = x_f$, gdzie

$$D_{hk} := \{(i,j) \in Z_+ \times Z_+ : 0 \le i \le h, 0 \le j \le k \;\; and \;\; i+j \ne h+k\} \tag{18}$$

Macierz tranzycji T_{ij} dla układu (15) jest określona następująco [31,20,25]

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n \; (macierz \;\; jednostkowa) \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dla \;\; i=1, j=0 \;\; oraz \;\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} dla \;\; i=0, j=1 \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} \;\; dla \;\; i,j \ge 0 (i+j > 0) \\ T_{ij} = 0 \;\; (macierz \;\; zerowa) \;\; dla \;\; i<0 \;\; oraz/\text{lub} \;\; j<0 \end{cases} \tag{19}$$

Z (19) wynika, że dla układu dodatniego (15) zachodzi $T_{ij} \in R_+^{n \times n}$ dla wszystkich $i,j \in Z_+$.

Twierdzenie 6. [15,16] Układ dodatni (15) jest osiągalny w punkcie (h,k) dla ZWB wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$R_{hk} := [M_{hk}, M_{h-1,k}, M_{h,k-1}, \ldots, M_{01}, M_{10}], \;\; M_{ij} := T_{i-1,j}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i,j-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

zawiera n liniowo niezależnych kolumn, z których każda zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.
Weźmy pod uwagę układ dodatni (15) o jednym wejściu ($m=1$), którego macierze A i B mają następujące postacie kanoniczne [20]

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n_1} \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n_2 1} & a_{n_2 2} & \cdots & a_{n_2 n_1} \end{bmatrix}, \; A_{22} = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ b_{n_2-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_{n_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2-1} \\ b_{n_2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

przy czym $a_l \ge 0, a_{kl} \ge 0, b_k \ge 0$ for $k = 1,\ldots,n_2$, $l = 1,\ldots,n_1$.

Weźmy pod uwagę układ dodatni (15) o jednym wejściu i macierzach (21) ze sprzężeniem zwrotnym

$$u_{ij} = v_{ij} + K\begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix}, \quad i,j \in Z_+. \tag{22}$$

przy czym $K = [K_1, K_2]$, $K_1 \in R^{1\times n_1}$, $K_2 \in R^{1\times n_2}$, a $v_{ij} \in R^m$ jest nowym wymuszeniem. Podstawiając (22) do (15a) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = A_c\begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + Bv_{ij} \tag{23}$$

gdzie

$$A_c = A + BK = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1, & A_{12} + B_1K_2 \\ A_{21} + B_2K_1, & A_{22} + B_2K_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli przynajmniej jeden ze współczynników $a_l \neq 0$ dla $l = 1,\dots,n_1$ lub $b_k \neq 0$ dla $k = 1,\dots,n_2$ wtedy warunki twierdzenia 6 nie są spełnione i układ dodatni (15) nie jest osiągalny w punkcie (n_1, n_2) dla ZWB. Załóżmy, że układ dodatni (15) nie jest osiągalny w punkcie (n_1, n_2) dla ZWB. Wykażemy, że istnieje sprzężenie zwrotne (22) takie, że układ zamknięty (12) jest osiągalny w punkcie (n_1, n_2).

Niech

$$K = [-a_1, -a_2, \dots, -a_{n_1}, -1, 0, \dots, 0] \tag{25}$$

Dla (21) i (25) macierz (24) ma postać

$$A_c = A + BK = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}, & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21}, & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{26a}$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11} + B_1K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[-a_0, -a_1, \dots, -a_{n_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{12} = A_{12} + B_1K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[-1 \quad 0 \dots 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{26b}$$

$$\overline{A}_{21}=A_{21}+B_2K_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1} \\ \hline a_{n_21} & a_{n_22} & \cdots & a_{n_2n_1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{bmatrix}\left[-a_0,-a_1,\dots,-a_{n_1}\right]=\begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n_1} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n_1} \\ \hline \overline{a}_{n_21} & \overline{a}_{n_22} & \cdots & \overline{a}_{n_2n_1} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_{22}=A_{22}+B_2K_2=\begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline b_{n_2-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_{n_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{bmatrix}\left[-1\ 0\cdots 0\right]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga. Jeżeli są spełnione założenia postaci kanonicznych (21), to $\overline{a}_{kl}\geq 0$ dla $k=1,\dots,n_2$, $l=1,\dots,n_1$ [20].

Dla uproszczenia obliczeń załóżmy, że $b_1=b_2=\cdots=b_{n_2-1}=0$, $b_{n_2}\neq 0$. Korzystając z (26), (19) i (20) otrzymamy

$$\begin{gathered} M_{10}=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}=e_{n_1}, M_{20}=T_{10}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}=e_{n_1-1},\dots,M_{n_10}=T_{10}^{n_1-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}=e_1 \\ M_{01}=\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}=b_{n_2}e_n,\ M_{02}=T_{01}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}=b_{n_2}e_{n-1},\cdots,M_{0n_2}=T_{01}^{n_2-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}=b_{n_2}e_{n_1+1} \end{gathered} \tag{27}$$

przy czym e_i jest i-tą kolumną macierzy jednostkowej I_n.

Z zależności (27) wynika, że w tym przypadku macierz

$$\left[M_{10},M_{20},\dots,M_{n_10},M_{01},M_{02},\dots,M_{0n_2}\right]$$

zawiera n liniowo niezależnych kolumn, z których każda ma tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.

W przypadku, gdy $b_k\neq 0$ dla $k=1,\dots,n_2$ dowód jest podobny, ale obliczenia są bardziej pracochłonne. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 7. Niech układ dodatni (15) z macierzami (21) będzie nieosiągalny w punkcie (n_1,n_2) dla ZWB. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (22) jest osiągalny w punkcie (n_1,n_2) dla ZWB, jeżeli macierz K ma postać (25).

Z rozważań powyższych wynika następujący ważny wniosek

Wniosek 3. Osiągalność układu dodatniego (15) nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego (22).

Przykład 1. Łatwo sprawdzić, że układ dodatni (15), którego macierze A i B mają postacie

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right],\ B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

jest nieosiągalny w punkcie (2,2) dla ZWB. W tym przypadku $n_1=n_2=2$ i $m=1$.

Korzystając z (25) i (24) otrzymamy

$$K = [-1,-2,-1,\, 0] \tag{29}$$

oraz

$$A_z = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [-1,-2,-1,\, 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Korzystając natomiast z (19) i (20) otrzymamy

$$M_{10} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ M_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ M_{11} = T_{01} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{10} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{20} = T_{10} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ M_{02} = T_{01} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$[M_{10}, M_{11}, M_{20}, M_{02}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Macierz (31) spełnia warunek twierdzenia 6. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (29) jest więc osiągalny w punkcie $(n_1, n_2) = (2,2)$ dla ZWB.

5. Sterowalność układów dwuwymiarowych.

Definicja 6. Układ dodatni (15) nazywamy sterowalnym do zera w punkcie $(h,k),(h,k \in Z_+, h,k > 0)$, jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych

$$x_{0j}^h \in R_+^{n_1},\ 0 \le j \le k \quad \text{oraz} \quad x_{i0}^v \in R_+^{n_2},\ 0 \le i \le h \tag{32}$$

istnieje ciąg wymuszeń $u_{ij} \in R_+^m$ dla $(i,j) \in D_{hk}$ taki, że $x_{hk} = 0$.

Twierdzenie 8. [15,16] Układ dodatni (15) jest sterowalny do zera w punkcie (n_1, n_2) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest macierzą nilpotentną, tzn. macierzą której wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{33}$$

Definicja 7. Mówimy, że sprzężenie zwrotne (22) psuje nilpotentność macierzy A, jeżeli macierz układu zamkniętego (24) nie jest macierzą nilpotentną.
Z twierdzenia 8 i definicji 7 otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek 4. Układ zamknięty (23) jest sterowalny do zera w punkcie (n_1, n_2), jeżeli sprzężenie zwrotne (22) nie psuje nilpotentności macierzy A.

Wniosek 5. Sterowalność do zera układu dodatniego (15) nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego (22).

Przykład 2. Weźmy pod uwagę model dodatni (15), którego macierze A i B mają postacie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

W tym przypadku $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ oraz

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} z_2 - A_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & -1 & -1 \\ 0 & z_1 & -1 \\ 0 & 0 & z_2 \end{vmatrix} = z_1^2 z_2$$

Korzystając z (19) otrzymamy

$$T_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{20} = T_{10}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dla } \begin{cases} i > 2 \text{ oraz } j = 0 \\ i = 0 \text{ oraz } j > 1 \\ i > 0 \text{ oraz } j > 0 \end{cases}$$

Składowa wywołana dowolnymi niezerowymi warunkami brzegowymi (16) zanika do zera

$$x_{bc}(i,j) = \sum_{k=0}^{i} T_{i-k,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{k0}^v \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{j} T_{i,j-l} \begin{bmatrix} x_{0l}^h \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dla } i > 2,\; j > 1$$

Zauważmy, że jeżeli macierz B ma postać (34) wtedy dowolna niezerowa macierz sprzężenia zwrotnego $K = [k_1, k_2, k_3]$ psuje nilpotentność macierzy A, gdyż

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 + 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Jeżeli natomiast macierz B ma postać $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, to

$$A + BK = \begin{bmatrix} k_1 & 1 + k_2 & 1 + k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i dla $k_1 = 0$ nilpotentność A nie zostaje zepsuta.

Uwagi końcowe.

Wykazano, że:

1) osiągalność i sterowalność do zera dodatnich układów dyskretnych jedno i dwuwymiarowych nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wektora stanu,
2) dla dodatniego układu nieosiągalnego (niesterowalnego) można dobrać macierz proporcjonalnych sprzężeń zwrotnych od wektora stanu tak, aby układ zamknięty był osiągalny (sterowalny).

Przedstawione w tej pracy rozważania dla dodatnich układów dwuwymiarowych opisanych modelem Roessera można uogólnić na:

1) układy dodatnie o wielu wejściach ($m > 1$) opisane 2D modelem Roessera oraz nD ($n > 2$) modelem Roessera,
2) układy dodatnie opisane 2D pierwszym modelem Fornasiniego-Marchesiniego [7], który stanowi przypadek szczególny dodatniego modelu Roessera.

Bardziej złożone jest uogólnienie tych rozważań na przypadek drugiego modelu Fornasiniego-Marchesiniego [8] oraz ogólnego modelu [27].

Problemem otwartym jest uogólnienie tych rozważań na:

1) ciągłe dodatnie układy jednowymiarowe, standardowe i singularne [18,21],
2) singularne układy dwuwymiarowe dyskretne [19,22,25] i ciągło-dyskretne [14].

REFERENCES

[1] S.L.Campbell, N.K. Nichols and W.J. Terrell, *Duality, observability and controllablity for linear time-varying descriptor systems,* Circuits Systems Signal Process, vol. 10, No 4, 1991, pp. 455-470.

[2] K.-W. E. Chu, *Controllability of descriptor systems,* Int. j. Control, 1987, vol. 46, No 5. pp. 1761-1770.

[3] D. Cobb, *Controllability, observability and duality in singular systems,* IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-29, No 12, 1984, pp. 1076-1082.

[4] P.G. Coxson, *Positive input reachability and controllability of positive systems,* Linear Algebra and its Applications 94, 1987, pp. 35-53.

[5] M.P. Fanti, B. Maione and B. Turchiano, *Controllability of linear single-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, 1989, vol. 50, No 6, pp. 2523-2542.

[6] M.P. Fanti, B. Maione and B. Turchiano, *Controllability of multi-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, 1990, vol. 51, No 6, pp. 1295-1308.

[7] E. Fornasini, G. Marchesini, *State space realization of two-dimensional filters,* IEEE Trans.Autom.Control, **AC-21**, 1976, pp. 484-491.

[8] E.Fornasini, G.Marchesini, *Doubly indexed dynamical systems: State space models and structural properties, Math. Syst.Theory* 12 ,1978.

[9] E. Fornasini, M.E. Valcher, *On the spectral and combinatorial structure of 2D positive system,* Linear Algebra and its Applications, 1996, pp. 223-258.

[10] E. Fornasini, M.E. Valcher, *Recent developments in 2D positive system theory,* Applied Math. and Computer Science, vol. 7, No 4, 1997.

[11] T. Kaczorek, *Computation of fundamental matrices and reachability of positive singular discrete linear systems,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 47, No. 4, 1998.

[12] T. Kaczorek, *Invariance of the local reachability and local controllability under feedbacks of 2-D linear systems,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.,vol. 41, No 3, 1993, pp. 215-220.

[13] T. Kaczorek, *Positive singular discrete linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 46, No. 4, 1997, pp. 619-631.

[14] T. Kaczorek, *Positive 2D linear systems*, Computational Intelligence and Applications, Physica-Verlag 1998, pp. 59-84.

[15] T.Kaczorek, *Reachability and controllability of nonnegative 2-D Roesser type models*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol .44, No 4, 1996, pp.405-410.

[16] T. Kaczorek, *Reachability and controllability of positve 2D Roesser type models*, 3rd International Conference on Automation of Hybrid Systems, ADPM'98 , Reims – France, 19-20 March 1998, pp. 164-168.

[17] T. Kaczorek, *Reachability and controlability of positive linear systems with state feedbacks*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 47, No 1, 1999, pp. 67-73.

[18] T. Kaczorek, *Reachability and controllability of weakly positive singular discrete linear systems*, 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems, Wiedeń, 11-17 kwiecień 1998, pp. 3-8.

[19] T. Kaczorek, *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa 1999.

[20] T. Kaczorek, *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1985.

[21] T. Kaczorek, *Weakly positive continuous-time linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 46, No. 2, 1998, pp. 233-245.

[22] J. Klamka, *Complete controllability of singular 2-D system*, Proc. 13 IMACS World Congress, Dublin, 1991, pp. 1839-1840.

[23] J. Klamka, *Constrained controllability of 2-D linear systems*, Proc. 12 World IMACS Congress, Paris, 1988, vol. 2, pp. 166-169.

[24] J. Klamka, *Controllability of Dynamical Systems – A survey*, Archives of Control Sciences, vol. 2, No 3-4, 1993, pp. 281-307.

[25] J. Klamka, *Controllability of Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

[26] J. Klamka, *Controllability of 2-D Linear Systems*, Advances in Control Highlights of ECC'99, Springer, 1999, pp. 319-326

[27] J. Kurek, *The general state-space model for a two-dimensional linear digital system*,IEEE Trans. Autom. Contr. AC-30, June 1985, pp. 600-602.

[28] D.N.P. Murthy, *Controllability of a linear positive dynamic system*, Int. J. Systems Sci., 1986, vol. 17, No 1, pp. 49-54.

[29] Y. Ohta, H. Madea and S. Kodama, *Reachability, observability and realizability of continuous-time positive systems*, SIAM J. Control and Optimization, vol. 22, No 2, 1984, pp. 171-180.

[30] K. Özçaldiran, *A geometric characterization of the reachable and the controllable subspaces of descriptor systems*, Circuits, Syst., Signal Processing, vol. 5, no 1. 1986, pp. 37-48.

[31] P.R. Roesser, *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Trans. Autom. Contr. 1975, vol. AC-20, No. 1, pp. 1-10.

[32] M.E. Valcher and E. Fornasini, *State Models and Asymptotic Behaviour of 2D Positive Systems*, IMA Journal of Mathematical Control & Information, No 12, 1995, pp. 17-36.

[33] E.L. Yip and E.F. Sinovec, *Solvability, controllability and observability of continuous descriptor*