

Optymalizacja kształtu belek

Praca dotyczy zagadnienia optymalizacji kształtu na przykładzie belek wspornikowych obciążonych ciężarem własnym. Jako kryterium optymalizacji przyjęto ugięcie belki w danym punkcie. Warunki dodatkowe dotyczą ograniczeń geometrycznych (wymiary przekroju poprzecznego). Do rozwiązania postawionego zagadnienia optymalizacji zastosowano zasadę maksimum. Opracowano program komputerowy przy użyciu pakietu MATLAB/Simulink. Uzyskane wyniki analityczne i numeryczne dotyczą belki wspornikowej o przekroju dwuteowym.

Optimization of beams shape

Optimum design of single span beams under self-weight is considered from the viewpoint of minimum deflection. The Pontryagin's maximum principle is used. The computer program has been designed using of MATLAB/Simulink.

1. WPROWADZENIE

Rozważmy odpowiednią belkę (ze współczynnikiem gęstości γ) o szerokości $b(x)$ i wysokości h . Równanie linii ugięcia belki wzdłuż zmiennej przestrzennej x ma następującą postać (Szefer i Mikulski 1978):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} \right] = -u(x), \quad x \in (0, l), \quad u(x) = \gamma b(x)h \quad (1)$$

Zadaniem naszym jest dobranie szerokości $b(x)$ belki wspornikowej (zamocowanej na lewym końcu) pracującej pod własnym ciężarem w taki sposób, by uzyskać minimalne ugięcie na prawym końcu belki. Zbiór sterowań dopuszczalnych określamy w następujący sposób:

$$U = \{u : H_1 \leq u(x) \leq H_2\} \quad (2)$$

Istnienie ograniczeń (2) zapewnia odpowiedni sens fizyczny poszukiwanych rozwiązań (wykluczenie przekrojów zerowych i nieograniczonych).

W rozważanym przypadku funkcjonał jakości ma postać:

$$J(u) = y_1(l) \quad (3)$$

Zadaniem naszym jest znalezienie u^* takiego, że $J(u^*) \leq J(u)$ dla każdego u należącego do zbioru sterowań dopuszczalnych (2).

Do wyznaczenia sterowania ekstremalnego (czyli podejrzanego o to, że jest optymalne) zastosowano odpowiedni wariant zasady maksimum. Następnie rozważono problem istnienia rozwiązania optymalnego, analizując numerycznie wskaźnik jakości (3). Zaproponowano

odpowiedni algorytm wyznaczania rozwiązania optymalnego wykorzystując pakiet programowy MATLAB/Simulink.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I JEGO ROZWIĄZANIE

Niech $y(x) = [y_1(x) \ y_2(x) \ y_3(x) \ y_4(x)]^T$, przy czym (Szefer i Mikulski 1978)

$$y_1(x)' = y_2(x), \quad E J y_1(x)'' = y_3(x), \quad y_1(x)''' = y_4(x) \quad (4)$$

(gdzie np. $y_1(x)' = \frac{dy_1(x)}{dx}$). Wtedy równanie (1) dla belki wspornikowej pokazanej na rys. 1 można zapisać w postaci (Szefer i Mikulski 1978, s. 338 i 343):

$$\begin{aligned} y_1(x)' &= y_2(x), \quad y_2(x)' = \frac{y_3(x)}{a + cu(x)}, \quad y_3(x)' = y_4(x), \quad y_4(x)' = -u(x) \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(l) = 0, \quad y_4(l) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym:

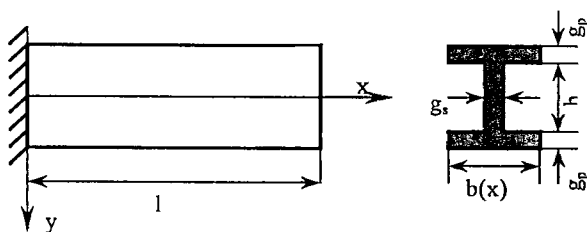
$$a = E \frac{g_s h^3}{12}, \quad c = 2Eg_p \left(\frac{h}{2} + \frac{g_p}{2} \right)^2 \quad (6)$$

lub w postaci wektorowego równania różniczkowego

$$y(x)' = f(y(x), u(x)), \quad f(y(x), u(x)) = [y_1(x) \ y_2(x) \ \frac{y_3(x)}{a + cu(x)} \ y_4(x) \ -u(x)]^T \quad (7)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) \in \Theta_0$, $y(l) \in \Theta_1$, przynależnymi do odpowiednich rozmaitości w przestrzeni R^4

$$\Theta_0 = \{y \in R^4 : y_1 = 0, y_2 = 0\}, \quad \Theta_1 = \{y \in R^4 : y_3 = 0, y_4 = 0\} \quad (8)$$



Rys. 1. Belka wspornikowa o przekroju dwuteowym.

Zadaniem naszym jest „przeprowadzenie” układu (7) z rozmaitości Θ_0 do rozmaitości Θ_1 , tak, by uzyskać minimalną wartość wskaźnika (3) przy ograniczeniach (2) na sterowanie u . Cechą charakterystyczną sformułowanego wyżej zadania optymalizacyjnego jest fakt, że rolę czasu odgrywa tutaj zmienna przestrzenna x , w naszym przypadku skończona długość belki. Natomiast sterowaniem jest wielkość proporcjonalna do szerokości belki $b(x)$.

Zauważmy (zob. (3) i (5)) również, że $J(u) = y_1(l) = \int_0^l y_2(x) dx$. Zatem dołączając do układu

(7) dodatkowe równanie $y_0(x)' = y_2(x)$, $y_0(0) = 0$ możemy bezpośrednio zastosować jeden z wariantów zasady maksimum (Bołtiański 1971, s. 351; zob. również Górecki 1993, s. 392 bez wprowadzania zmiennej y_0).

W wyniku zastosowania (Szefer i Mikulski 1978) zasady maksimum (Bołtiański 1971, s. 351) otrzymujemy następującą postać sterowania (o ile sterowanie istnieje):

$$u^*(x) = \begin{cases} H_1 & \text{dla } x \in [0, x_1] \\ \frac{1}{c} \sqrt{c(l-x) \frac{y_3(x)}{\lambda_4(x)}} - \frac{a}{c} & \text{dla } x \in [x_1, x_2] \\ H_2 & \text{dla } x \in [x_2, l] \end{cases} \quad (9)$$

W powyższym wzorze $y_3(x)$, x_1 , x_2 oraz zmienną sprzężoną $\lambda_4(x)$ należy wyznaczyć np. numerycznie z odpowiedniego układu kanonicznego rozważanego w przedziałach $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, l]$.

W przedziale $[0, x_1]$ układ kanoniczny ma postać:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x)' &= y_2(x), & y_1(0) &= 0 \\ y_2(x)' &= \frac{y_3(x)}{a + cH_2}, & y_2(0) &= 0 \\ y_3(x)' &= y_4(x), & y_3(0) &= y_3^0 \\ y_4(x)' &= -H_2, & y_4(0) &= y_4^0 \\ \lambda_3(x)' &= \frac{l-x}{a + cH_2}, & \lambda_3(0) &= 0 \\ \lambda_4(x)' &= -\lambda_3(x), & \lambda_4(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

przy czym dla $x = x_1$ ma być $\frac{1}{c} \sqrt{c(l-x_1) \frac{y_3(x_1)}{\lambda_4(x_1)}} - \frac{a}{c} = H_2$.

W przedziale $[x_1, x_2]$

$$\left. \begin{aligned} y_1(x)' &= y_2(x), & y_1(x_1) &= N_1 \\ y_2(x)' &= \frac{y_3(x)}{\sqrt{c(l-x) \frac{y_3(x)}{\lambda_4(x)}}}, & y_2(x_1) &= N_2 \\ y_3(x)' &= y_4(x), & y_3(x_1) &= N_3 \\ y_4(x)' &= -\frac{1}{c} \sqrt{c(l-x) \frac{y_3(x)}{\lambda_4(x)}} + \frac{a}{c}, & y_4(x_1) &= N_4 \\ \lambda_3(x)' &= \frac{l-x}{\sqrt{c(l-x) \frac{y_3(x)}{\lambda_4(x)}}}, & \lambda_3(x_1) &= N_5 \\ \lambda_4(x)' &= -\lambda_3(x), & \lambda_4(x_1) &= N_6 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{Dla } x = x_2 \text{ ma być } \frac{1}{c} \sqrt{c(l-x_2) \frac{y_3(x_2)}{\lambda_4(x_2)}} - \frac{a}{c} = H_1.$$

W przedziale $[x_2, l]$

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x)' = y_2(x), \quad y_1(x_2) = P_1 \\ y_2(x)' = \frac{y_3(x)}{a+cH_1}, \quad y_2(x_2) = P_2 \\ y_3(x)' = y_4(x), \quad y_3(x_2) = P_3 \\ y_4(x)' = -H_1, \quad y_4(x_2) = P_4 \\ \lambda_3(x)' = \frac{l-x}{a+cH_1}, \quad \lambda_3(x_2) = P_5 \\ \lambda_4(x)' = -\lambda_3(x), \quad \lambda_4(x_2) = P_6 \end{array} \right\} \quad (12)$$

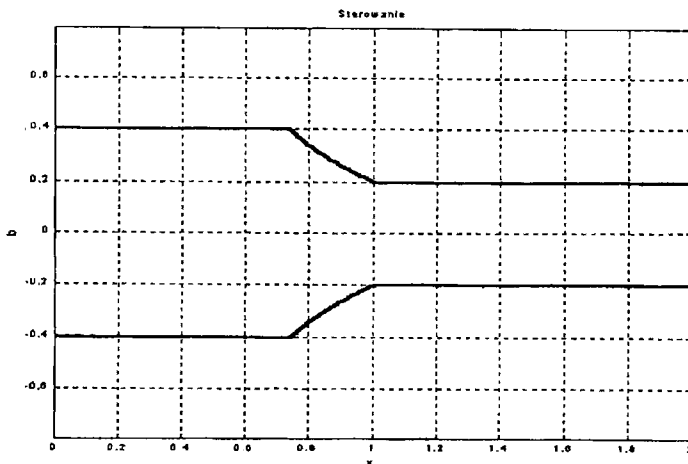
Parametry $y_3^0, y_4^0, N_i, P_i, i=1,2,\dots,6$ należy dobrać tak, by dla $x=l$

$$y_3(l) = 0, \quad y_4(l) = 0 \quad (13)$$

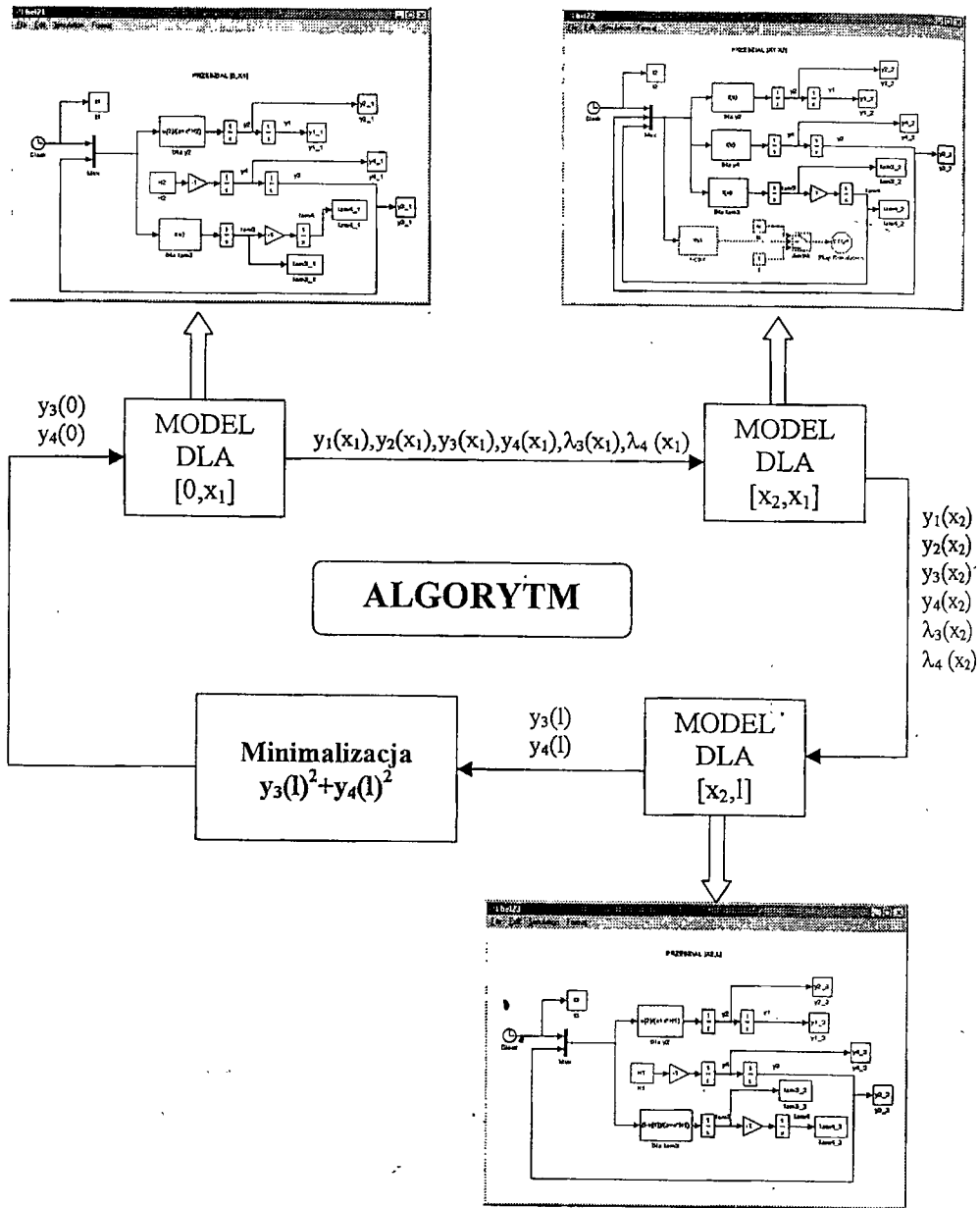
Przedstawiony wyżej algorytm został zaimplementowany w środowisku MATLAB/Simulink. Schemat postępowania przedstawiono na rys. 3. Spełnienie warunku (13) uzyskuje się minimalizując wyrażenie $y_3(l)^2 + y_4(l)^2$.

3. WYNIKI NUMERYCZNE

Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących danych: $l=2\text{m}, E=2.1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2, H_1=0.2\text{m}, H_2=0.4\text{m}, g_p=0.002\text{m}, g_s=0.0013\text{m}, \gamma=7.65 \cdot 10^4 \text{N/m}^3$. Kształt belki o optymalnej szerokości jest pokazany na rys. 2. Otrzymano $x_1=0.74\text{m}, x_2=1.004\text{m}, y_3^0=-0.4737, y_4^0=0.5712$.



Rys. 2. Optymalna szerokość belki.



Rys. 3. Schemat algorytmu.

4. ZAGADNIENIE ISTNIENIA ROZWIĄZANIA

Zasada maksimum jest warunkiem koniecznym optymalności. Aby zorientować się czy rozwiązanie optymalne istnieje przeprowadzono szereg eksperymentów numerycznych określających zachowanie wskaźnika jakości (ugięcie belki w punkcie $x=1$) w „otoczeniu” kształtu otrzymanego w wyniku zastosowania zasady maksimum i podejrzanego o optymalność. Innymi słowy badano $J(u)$ dane równością (3) w pewnym otoczeniu u^* . Wyniki eksperymentów pokazano na rys. 4, 5 i 6, 7. Na rys. 4 zaznaczono krzywe bliskie krzywej optymalnej przy ustalonych wartościach x_1 i x_2 . Na rys. 5 pokazano wartości wskaźnika jakości (3) dla różnych krzywych:

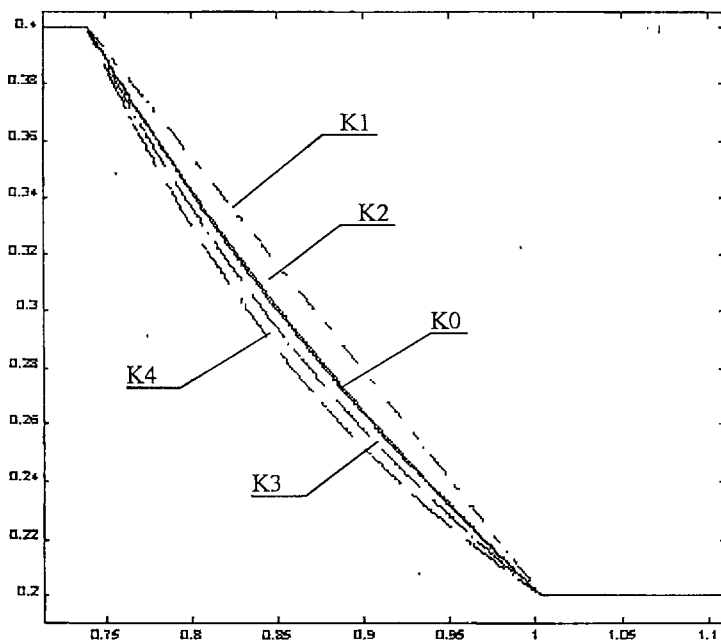
K0 – krzywa optymalna

K1 – krzywa o równaniu: $y = ax + b$, gdzie $a = -0.7576$, $b = 0.9606$

K2 – krzywa o równaniu: $y = ax^{-1} + b$, gdzie $a = 0.5628$, $b = -0.3606$

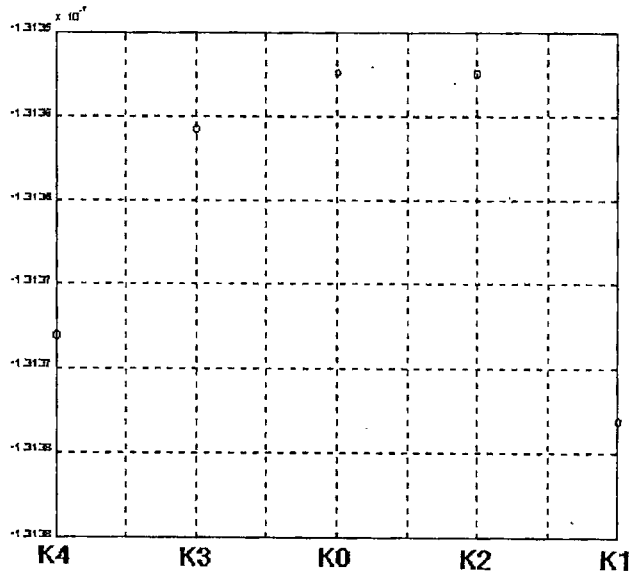
K3 – krzywa o równaniu: $y = ax^{-2} + b$, gdzie $a = 0.2398$, $b = -0.0379$

K4 – krzywa o równaniu: $y = ax^{-3} + b$, gdzie $a = 0.1352$, $b = 0.0664$



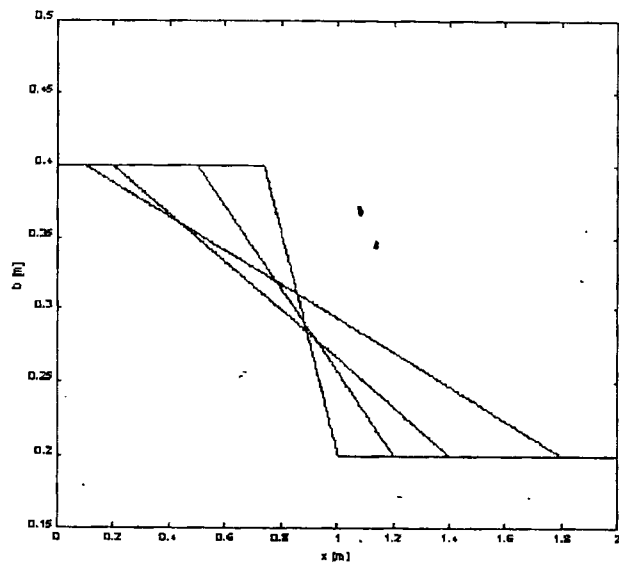
Rys. 4. Krzywe bliskie krzywej optymalnej.

Wskaźnik jakości dla K0 został wyliczony analitycznie na podstawie aproksymacji krzywej optymalnej wielomianem drugiego stopnia: $w(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie: $a = 0.9401$, $b = -2.3891$, $c = 1.6520$.

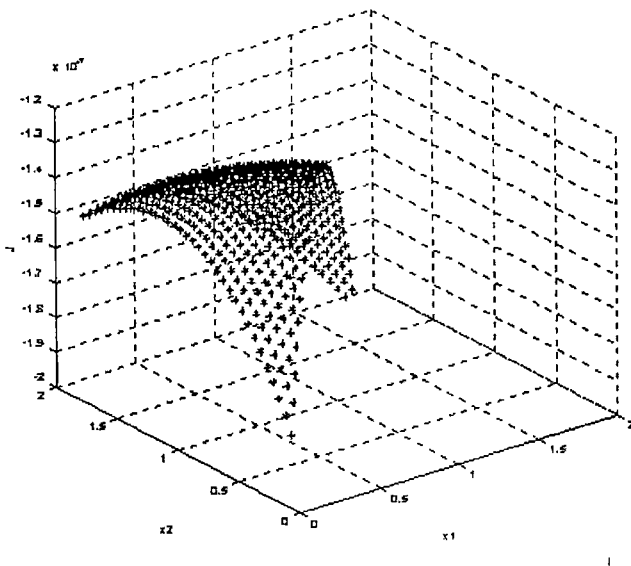


Rys. 5. Wartości wskaźnika (3) dla różnych krzywych.

Na rys. 6, dla ustalonego kształtu belki zmieniane są punkty graniczne x_1 i x_2 , w których zaczynają obowiązywać ograniczenia na wymiary przekroju belki. Rozważanym kształtem w interesującym zakresie $[x_1, x_2]$ jest linia prosta.



Rys. 6. Zmieniane punkty graniczne x_1 i x_2 .



Rys. 7. Zależność wskaźnika (3) od punktów granicznych x_1 i x_2 .

5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono efektywny algorytm wyznaczania optymalnego kształtu belki wspornikowej o przekroju dwuteowym. W obliczeniach numerycznych wykorzystano pakiet programowy MATLAB/Simulink. Metoda wyznaczania optymalnego kształtu, wykorzystująca zasadę maksimum, była przedmiotem prac (Szefer i Mikulski 1978 i 1984). W porównaniu z tymi pracami, w niniejszej pracy zostały uzupełnione badania symulacyjne zachowania się wskaźnika jakości (3). Tym sposobem eksperymenty numeryczne (zob. rys. 5 i 7, na których widać wyraźne ekstremum wskaźnika jakości) potwierdziły istnienie rozwiązania optymalnego. Sama zasada maksimum pozwala jedynie wyznaczać rozwiązania „podejrzane” o to, że są optymalne.

Praca była wykonywana w ramach działalności statutowej AGH – 11 11 120 230.

LITERATURA

- [1] Bołtiański W.G. (1971): *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. WNT, Warszawa.
- [2] Górecki H. (1993): *Optymalizacja systemów dynamicznych*. PWN, Warszawa.
- [3] Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- [4] Szefer G., Mikulski L. (1978): *Optymalizacja belek z zastosowaniem zasady maksimum Pontriagina*. Arch. Inż. Łądowej, t. XXIV, z. 3, 337-345.
- [5] Szefer G., Mikulski L. (1984): *Optimal design of elastic arches with a cross-section*. Rozprawy Inżynierskie, t. 32, z. 4, 467-480.