Mgr inż. Paweł Fotowicz
Główny Urząd Miar

PROCEDURA SZACOWANIA NIEPEWNOŚCI POMIARU W LABORATORIUM ADMINISTRACJI MIAR

Przedstawiono procedurę szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu stosowaną w laboratoriach administracji miar. Omówiono metodykę postępowania krok po kroku w celu zapewnienia spójności pomiarowej. Przedstawione postępowanie można również wykorzystać przy opracowaniu dowolnego wyniku pomiaru.

THE PROCEDURE OF EVALUATION OF UNCERTAINTY OF MEASUREMENT IN THE LABORATORY OF ADMINISTRATION OF MEASURES

The procedure of evaluation of uncertainty of measurement in calibration at the laboratory of administration of measures is presented. Step by step calculating to ensure traceability is discussed. The procedure maybe used to evaluation of result in any measurement situation.

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru w administracji miar zaszły istotne zmiany. W wyniku wdrożenia Systemu Zarządzania Jakością powstała procedura szacowania niepewności pomiaru, która obowiązuje wszystkie laboratoria pomiarowe. Laboratoria te wykonują usługi metrologiczne polegające na wykonywaniu wzorcowań służących zapewnieniu spójności pomiarowej. Opracowany wynik każdego wzorcowania powinien być zgodny z przyjętymi w tym względzie zaleceniami międzynarodowych organizacji metrologicznych [1, 2].

Główny Urząd Miar przywiązuje istotną uwagę do zagadnień związanych z niepewnością pomiaru. Wynika to z obowiązku ustawowego wyrażonego w pierwszym artykule „Prawo o miarach" mówiącego o „zapewnieniu jednolitości miar i wymaganej dokładności pomiarów wielkości fizycznych w Rzeczypospolitej Polskiej", co zobowiązuje administrację miar, szczególnie w przededniu obchodów 85-lecia powstania GUM.

Procedura szacowania niepewności pomiaru umożliwia konsekwentny i przejrzysty sposób zapisu postępowania w celu opracowania wyniku wzorcowania. Tworzy algorytm składający się z sześciu kolejnych kroków, którymi są:

1) równanie pomiaru
2) równanie niepewności pomiaru
3) opis wielkości wejściowych
4) budżet niepewności
5) niepewność rozszerzona
6) zapis wyniku pomiaru

2. RÓWNANIE POMIARU

Równanie pomiaru powinno zawierać wszystkie wielkości wejściowe mające istotny wpływ na wynik pomiaru. Powinno też we właściwy sposób definiować wielkość mierzoną. Przy wzorcowaniu mamy do czynienia na ogół z dwoma podstawowymi sytuacjami pomiarowymi [3]. Pierwsza z nich dotyczy kalibracji wzorca miary. Równanie pomiaru wówczas przyjmuje ogólną postać

$$y_w = x_w + \delta x_d + \delta x_t + \delta x_m + \delta x_x + x_c + \delta x_c \tag{1}$$

gdzie: x_w – wzorzec odniesienia
δx_d – dryft wzorca odniesienia
δx_t – oddziaływania środowiskowe
δx_m – oddziaływania mechaniczne lub elektryczne
δx_x – pozostałe oddziaływania
x_c – wskazanie komparatora
δx_c – niedokładność komparatora

W równaniu powyższym mamy do czynienia z sumowaniem wielkości wejściowych. Można je podzielić na dwie grupy. Pierwsza związana jest z wzorcem odniesienia. Tworzą ją wielkości oznaczone indeksami „w", „d", „t", „m" i „x", wśród których wielkości wpływające poprzedzone są symbolem δ. Drugą grupę stanowią wielkości związane z komparatorem, którą tworzą: wskazanie komparatora x_c i jego niedokładność δx_c, również traktowana jak wielkość wpływająca.

Druga sytuacja pomiarowa dotyczy wyznaczania błędu przyrządu pomiarowego. Równanie realizuje definicję błędu przyrządu pomiarowego i w związku z tym przestawia różnicę wielkości wejściowych

$$e_p = x_p + \delta x_p - x_w - \delta x_d - \delta x_t - \delta x_m - \delta x_x \tag{2}$$

gdzie: x_p – wskazanie przyrządu pomiarowego
δx_p – rozdzielczość przyrządu pomiarowego
x_w – wzorzec odniesienia
δx_d – dryft wzorca odniesienia
δx_t – oddziaływania środowiskowe
δx_m – oddziaływania mechaniczne lub elektryczne
δx_x – pozostałe oddziaływania

W praktyce metrologicznej niektóre wielkości wejściowe zawierają kilka składowych, które analizuje się wspólnie. W wielu wypadkach pozostałe oddziaływania δx_x mogą obejmować zbiór składowych tym liczniejszy im dokładniejszy jest pomiar.

3. RÓWNANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU

Równanie niepewności to zapis zależności umożliwiającej wyznaczenie złożonej niepewności standardowej, które w przypadku gdy wielkości wejściowe są niezależne przyjmuje postać

$$u_c^2(y)=c_1^2u^2(x_1)+\ldots+c_N^2u^2(x_N)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i) \tag{3}$$

gdzie: $c_i=\frac{\partial y}{\partial x_i}$ to współczynnik wrażliwości, a $u(x_i)$ to niepewność standardowa wielkości wejściowej.

4. OPIS WIELKOŚCI WEJŚCIOWYCH

Wielkości wejściowe można podzielić na dwa rodzaje. Pierwsze pełnią rolę estymat i na ogół przypisuje im się niezerowe wartości oczekiwane bez określania ich odchyleń standardowych. Drugą grupę stanowią wielkości wpływające, jak rozrzut, rozdzielczość, oddziaływania środowiskowe czy inne miary niedokładności. Wielkościom tym przypisuje się zerowe wartości oczekiwane i zawsze niezerowe odchylenia standardowe.

Przy określaniu wielkości wejściowych należy każdej wielkości przypisać rozkład i oszacować jego dwa parametry: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe. Miarą wartości oczekiwanej jest zawsze wartość średnia, nominalna lub rzadziej środkowa. Miarą odchylenia standardowego jest niepewność standardowa. Sposób określania niepewności standardowej zależy od metody oceny niepewności. Jeżeli posługujemy się metodą typu A to wielkościom przypisujemy rozkład Studenta lub rozkład normalny. Wybór rozkładu zależy od liczebności próby, której dotyczy oszacowanie. W przypadku prób skończonych zawsze przyjmujemy rozkład Studenta. Przykładem prób skończonych jest zbiór wskazań wzorcowanego przyrządu pomiarowego.

W przypadku oceny wielkości na podstawie populacji jej wyników stosujemy rozkład normalny. Przykładem może być oszacowanie wskazania komparatora, do oceny niepewności którego zastosowano estymatę połączoną odchylenia standardowego. Estymator taki przybliża wartość odchylenia standardowego wszystkich możliwych wskazań komparatora, w więc z założenia dotyczy nieograniczonego liczebnie zbioru wyników.

Odczyty wskazań wraz z ich wartością średnią i odchyleniem standardowym eksperymentalnym najlepiej zestawić w tabeli 1. W celu obliczenia niepewności standardowej dla wielkości ocenianych metodą typu A stosujemy następujące zależności

$$u(x)=s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

lub

$$u(x)=\frac{s_p(x)}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

gdzie: n – liczba odczytów

$s(\bar{x})$ – odchylenie standardowe eksperymentalne średniej

$s_p(x)$ – połączona estymata odchylenia standardowego

odczyty	x_1 $\vdots$ x_N
wartość średnia	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
odchylenie standardowe eksperymentalne	$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Tabela 1. Przykład zestawienia informacji o danych eksperymentalnych

Istotnym zagadnieniem przy ocenie rozrzutu wskazań komparatora jest oszacowanie jego etymaty odchylania standardowego. Estymatorem tego parametru jest statystyka zwana estymatą połączoną odchylenia standardowego. Jej nazwa oznacza, że łączy wiele ocen doświadczalnych w postaci prób losowych wykonanych w celu zbadania rozrzutu wskazań. Jeżeli wykonamy kilka serii pomiarowych badających rozrzut wskazań, to na ich podstawie można ocenić rzeczywiste odchylenie standardowe związane z tą wielkością wejściową. Podstawową zależnością na estymatę połączoną odchylenia standardowego jest wzór

$$s_p(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} s_i^2(x)}{m}} \tag{6}$$

gdzie m to liczba serii pomiarowych o jednakowej liczebności, a $s_i(x)$ to odchylenie standardowe eksperymentalne i-tej serii pomiarowej.

W przypadku stosowania do oceny wielkości wejściowej metody typu B na ogół wielkości tej przypisujemy rozkład prostokątny. Ocena taka dotyczy głównie wielkości wpływających, dla których przede wszystkim można określić granice ich zmienności. Trudno jest bowiem naukowo uzasadnić przebieg tej zmienności, dlatego najprościej przyjąć zasadę jednakowego prawdopodobieństwa każdej wartości z przedziału jej zmienności. Nawet w przypadku pomyłki co do rozkładu prawdopodobieństwa, błąd oceny niepewności będzie najmniejszy z możliwych. Gdyby się okazało, że przyjęto dla wielkości rozkład typu U, a jej rzeczywistym rozkładem jest rozkład normalny lub odwrotnie, to zastosowanie przybliżenia rozkładam prostokątnym będzie najbardziej neutralne.

W celu obliczenia niepewności standardowej wielkości opisanej rozkładem prostokątnym stosujemy zależność

$$u(x)=\frac{a}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

gdzie a jest szerokością połówkową przedziału zmienności.

Przykładem typowej wielkości wejściowej jest wskazanie przyrządu pomiarowego. Estymatą tej wielkości jest średnia wskazań, a wielkościami wpływającymi: rozrzut i rozdzielczość, które należy traktować oddzielnie. Pierwsza z wymienionych wielkości wpływających oceniana jest metodą typu A, dla której należy obliczyć odchylenie standardowe eksperymentalne z ograniczonej na ogół liczebnie serii pomiarowej, przypisując jej rozkład Studenta o liczbie stopni swobody $\nu=n-1$. Druga z wielkości wpływających oceniana jest metodą typu B, przypisując jej rozkład prostokątny. Zakłada się bowiem, że każda wartość z zakresu odpowiadającego pojedynczemu kwantowi wskazania jest jednakowo prawdopodobna. Przez kwant wskazania należy rozumieć najmniejszą wartość wielkości mierzonej jaką można odczytać z urządzenia wskazującego przyrządu pomiarowego dla danego zakresu pomiarowego. W przypadku przyrządów cyfrowych jest to na ogół wartość odpowiadająca ostatniej cyfrze na wyświetlaczu lub wartości zmiany na ostatnim miejscu urządzenia wskazującego. W przypadku przyrządów analogowych na ogół jest to wartość odpowiadająca dziesiątej części działki elementarnej. Rozdzielczość obejmuje cały przedział jej zmienności, czyli $2a$. Traktowanie rozrzutu jako oddzielnej wielkości jest o tyle wygodne, że w wielu pomiarach nie obserwuje się zmiany wskazań w trakcie kolejnych odczytów i w związku z tym należy brać pod uwagę jedynie estymatę wielkości i rozdzielczość. Estymatą wielkości w tej sytuacji jest każde wskazanie przyrządu pomiarowego.

Przykładem innych typowych wielkości wpływających może być również randomizowana poprawka lub randomizowany błąd przyrządu pomiarowego. Randomizacja poprawek i błędów polega na tym, że oddziaływania systematyczne, znane co do wartości i znaku, traktowane są jak oddziaływania przypadkowe, mające charakter losowy, którym przypisuje się prostokątny rozkład prawdopodobieństwa o szerokości połówkowej równej granicznym wartościom tych oddziaływań.

5. BUDŻET NIEPEWNOŚCI

Wszystkie wielkości wejściowe należy zestawić w tabeli 2, zwanej budżetem niepewności. Należy pamiętać o użyciu właściwej jednostki miary odnoszącej się do poszczególnych wielkości.

Tabela taka obok symbolu wielkości mierzonej x_i, estymaty wielkości, niepewności standardowej $u(x_i)$ powinna zawierać współczynnik wrażliwości c_i oraz udział niepewności

$$u_i(y)=c_i \cdot u(x_i) \tag{8}$$

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
x_1	$\{x_1\}[x_1]$	$\{u(x_1)\}[u(x_1)]$	nazwa	$\{c_1\}[c_1]$	$\{u_1(y)\}[u_1(y)]$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_N	$\{x_N\}[x_N]$	$\{u(x_N)\}[u(x_N]$	nazwa	$\{c_N\}[c_N]$	$\{u_N(y)\}[u_N(y]$
y	$\{y\}[y]$				$\{u_c(y)\}[u_c(y)]$

Tabela 2. Budżet niepewności wielkości mierzonej

6. NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA

Przy obliczaniu niepewności rozszerzonej istotnym zagadnieniem jest wyznaczenie współczynnika rozszerzenia *k*, bowiem to on zapewnia właściwy poziom ufności wynikowi pomiaru. Niezbędna jest w tej sytuacji znajomość rozkładu wielkości wyjściowej. W przypadku gdy wszystkie wielkości wejściowe opisane są rozkładami normalnymi lub prostokątnym bądź powiązanymi z tymi rozkładami, np. Studenta, trójkątnym czy trapezowym, to można przybliżyć rozkład wielkości mierzonej rozkładem typu PN [4]. Aby wyznaczyć współczynnik rozszerzenia wystarczy określić wartość parametru tego rozkładu. Można to osiągnąć stosując równość

$$r = r_u \tag{9}$$

gdzie

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \tag{10}$$

$u_i(y)$ – największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym

Na podstawie znanego układu składowych w budżecie niepewności należy wyznaczyć iloraz udziału r_u, a następnie można posłużyć się jedną z dwóch metod wyznaczenia współczynnika rozszerzenia.

Pierwsza metoda polega na przybliżeniu nieznanego współczynnika współczynnikiem jak dla rozkładów: normalnego, trapezowego i prostokątnego [5]. Wybór odpowiedniego rozkładu zależy od wartości parametru r_u. Można to zapisać w postaci

$$k = k_N \text{ dla } 0 < r_u < 1$$
$$k = k_T \text{ dla } 1 \leq r_u \leq 10 \qquad (11)$$
$$k = k_P \text{ dla } r_u > 10$$

gdzie:

k_N – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego
k_T – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego
k_P – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}}\left(1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}\right) \qquad (12)$$

$$k_P = \sqrt{3}p \qquad (13)$$

p – poziom ufności

Druga dokładniejsza metoda polega na wykorzystaniu tabeli wartości współczynników rozszerzenia, jakie może on przyjmować dla określonego poziomu ufności [6]. Przy podawaniu niepewności rozszerzonej wystarczającą dokładnością jest przedstawianie współczynnika z dwoma miejscami dziesiętnymi. Przybliżenie to zapewnia uzyskanie powtarzalnej wartości niepewności rozszerzonej z dwoma miejscami znaczącymi, jakie dla pomiarów wzorcujących zalecają międzynarodowe organizacje metrologiczne. Można zatem tablicować wartości, jakie powinien przyjmować współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % (umowny poziom ufności stosowany przy wzorcowaniu) w zależności od wartości parametru r. Tablicę taką przedstawia tabela 3. Określa ona dla jakich granic parametru r_u następuje zmiana wartości współczynnika o 0,01 jego wartości. Wartość ta określa równocześnie rozdzielczość metody, około 0,5 %.

Praktyczne postępowanie przy wyznaczeniu współczynnika rozszerzenia jest następujące. Z pośród wszystkich składowych wielkości wejściowych o rozkładach prostokątnych wyszukujemy tę, która wnosi największy udział do budżetu niepewności. Należy pamiętać, że rozpatrujemy w tym kroku postępowania tylko składowe o rozkładzie prostokątnym, ignorując pozostałe. Następnie odnosimy wartość tego udziału do sumarycznego udziału wszystkich pozostałych składowych, posługując się formułą (10). W ten sposób obliczamy iloraz udziału r_u. Jeżeli $r_u < 1$, to współczynnik rozszerzenia można przyjąć jak dla rozkładu normalnego, którego wartość dla poziomu ufności 95 % wynosi $k_N = 1{,}96$. Jeżeli $0 \leq r_u \leq 10$ to stosujemy współczynnik rozszerzenia k_T, który obliczamy ze wzoru (12). Jeżeli natomiast $r_u > 10$ to współczynnik rozszerzenia przyjmujemy jak dla rozkładu prostokątnego, którego wartość dla poziomu ufności 95 % wynosi $k_P = 1{,}65$. W celu wyznaczenia wartości współczynnika można posłużyć się również tabelą 3.

k	r_u do wartości	k	r_u do wartości	k	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Tabela 3. Wartości współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

Jeżeli do oceny którejkolwiek wielkości wejściowej użyliśmy rozkładu Studenta to wyznaczamy liczbę stopni swobody

$$\nu = n - 1 \qquad (14)$$

gdzie n to liczba obserwacji. Następnie z tablic statystycznych dla rozkładu t-Studenta należy odczytać stosowną wartość kwantyla $t(\nu)$, nazywaną również wartością krytyczną, odpowiadającą obliczonej liczbie stopni swobody. Przyjmujemy wartość krytyczną dla poziomu ufności 95%, lub poziomu istotności 5 %. Obliczamy nową wartość złożonej niepewności standardowej ze wzoru [7]

$$u_c'(y) = \sqrt{u_c^2(y) + \frac{t_j^2(\nu) - k_N^2}{k_N^2} u_{Aj}^2(y)} \qquad (15)$$

gdzie $u_{Aj}(y)$ to udział niepewności wielkości wejściowej opisanej rozkładem Studenta.

7. ZAPIS WYNIKU POMIARU

Wynik pomiaru zawsze zapisujemy w postaci estymaty wielkości $\bar{y}$ i jej niepewności rozszerzonej U

$$y = \bar{y} \pm U \qquad (16)$$

gdzie:

$$U = k \cdot u_c(y) \qquad (17)$$

Wynik pomiaru należy przedstawić wraz z odpowiednią jednostką miary, z wyjątkiem przypadku gdy wielkość jest bezwymiarowa. Wartość liczbową estymaty wyniku pomiaru należy zaokrąglić tak, aby ostatnia jej cyfra znacząca była na takim samym miejscu, jak ostatnia cyfra niepewności rozszerzonej związanej z tą estymatą.

Wartość niepewności rozszerzonej należy podać z dwoma miejscami znaczącymi wraz z symbolem odpowiedniej jednostki miary, gdy jest to konieczne, stosując ogólne zasady zaokrąglania wartości liczbowych. Wyjątkiem jest sytuacja, gdy podanie jednej cyfry znaczącej zapewnia osiągnięcie założonego poziomu ufności 95%.

Podawanie niepewności rozszerzonej z dwoma miejscami znaczącymi wiąże się z koniecznością zapewnienia utrzymania poziomu ufności 95% w rozsądnych granicach. Może go zapewnić jedynie zaokrąglenie wyniku do dwóch miejsc znaczących, gdyż błąd takiego zaokrąglenia nie przekracza 5 %.

8. PODSUMOWANIE

Przedstawiona procedura szacowania niepewności pomiaru stosowana jest przez laboratoria administracji miar przy opracowaniu wyniku pomiaru związanego z wzorcowaniem. Zawiera nie tylko formalny zapis postępowania, ale również metodykę opracowania danych służących do poprawnego wyrażania niepewności pomiaru. Jest to ważne dla zachowania spójności pomiarowej i porównywalności wyników uzyskiwanych w różnych laboratoriach pomiarowych przy wykonywaniu tych samych czynności metrologicznych.

LITERATURA

[1] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. GUM, 1999.

[2] Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Europejska Współpraca w dziedzinie Akredytacji. Dokument EA-4/02, 1999.

[3] P. Fotowicz: Model matematyczny wielkości mierzonej przy wzorcowaniu. PAR nr 2, 2003 r.

[4] P. Fotowicz: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. PAR nr 5, 2001 r.

[5] P. Fotowicz: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR nr 9, 2001 r.

[6] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR nr 10, 2003 r.

[7] P. Fotowicz: Estymata niepewności rozszerzonej przy wzorcowaniu. PAR nr 7/8, 2002 r.