Prof, dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK
Prof. dr hab. inż. Mikołaj BUSŁOWICZ
Politechnika Białostocka

WYZNACZANIE DODATNICH REALIZACJI MINIMALNYCH DYSKRETNYCH UKŁADÓW Z OPÓŹNIENIAMI

Podano metodę wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych dla dyskretnych układów liniowych z wieloma opóźnieniami w wektorze stanu. Sformułowano warunki wystarczające istnienia dodatnich realizacji oraz podano procedurę wyznaczania tych realizacji dla danej właściwej funkcji wymiernej. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

DETERMINATION OF POSITIVE MINIMAL REALIZATIONS OF DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS

A method for finding of positive minimal realizations of linear discrete-time systems with delays in state-vector is proposed. Sufficient conditions for the existence of positive minimal realizations are established and a procedure for computation of the positive minimal realizations for a given proper rational function is presented. The considerations are illustrated by a numerical example.

1. WPROWADZENIE

W układach dodatnich zmienne stanu, wymuszenia, warunki początkowe i odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykładami układów dodatnich są procesy przemysłowe zawierające reaktory chemiczne, wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne, układy kompartmentalne, modele zanieczyszczeń wody i atmosfery. Różne modele układów dodatnich można spotkać w naukach technicznych, w układach zarządzania, ekonomii, naukach społecznych, biologii, medycynie, itp.
Liniowe układy dodatnie są zdefiniowane w przestrzeniach stożków, a nie w przestrzeniach liniowych. Z tego względu teoria układów dodatnich jest bardziej złożona i mniej rozwinięta. Przegląd stanu aktualnego teorii układów dodatnich jest podany w monografiach [4,5]. Niektóre nowsze wyniki teorii układów dodatnich są podane w pracy [6].

Rozwiązanie równań opisujących liniowe układy dyskretne z opóźnieniami zostało podane w pracy [2]. Problem wyznaczania realizacji dodatnich dla układów bez opóźnień był rozpatrywany w wielu pracach [1,4,5]. Problem wyznaczania dodatnich realizacji dla układów dyskretnych z jednym opóźnieniem został sformułowany i częściowo rozwiązany w pracy [7]. Zagadnienia osiągalności, sterowalności i sterowania optymalnego z minimalną energią układów dyskretnych z opóźnieniami były rozpatrywane w pracach [3,8]. Podstawowym celem tej pracy jest uogólnienie metody przedstawionej w pracy [7] na przypadek układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami. Zostaną podane warunki wystarczające istnienia dodatnich realizacji minimalnych oraz procedura wyznaczania tych realizacji dla danej właściwej funkcji wymiernej.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Niech $R^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy rzeczywistych o n wierszach i m kolumnach oraz $R^n = R^{n\times 1}$.

Weźmy pod uwagę liniowy układ dyskretny o jednym wejściu i jednym wyjściu z h opóźnieniami opisany równaniami

$$x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + \cdots + A_h x_{i-h} + bu_i \qquad i \in Z_+ = \{0,1,\ldots\} \quad \text{(1a)}$$

$$y_i = cx_i + du_i \quad \text{(1b)}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R$, $y_i \in R$ jest odpowiednio wektorem stanu, wymuszeniem i odpowiedzią, a $A_k \in R^{n\times n}$, $k = 0,1,\ldots,h$, $b \in R^n$, $c \in R^{1\times n}$, $d \in R$.

Warunki początkowe dla (1a) mają postać

$$x_{-k} \in R^n \text{ dla } k = 0,1,\ldots,h \quad (2)$$

Niech $R_+^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy rzeczywistych o wymiarze $n \times m$ i elementach nieujemnych oraz $R_+^n = R_+^{n\times 1}$.

Definicja 1. [3,7]. Układ (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim, jeżeli dla każdego $x_{-k} \in R_+^n, k = 0,1,\ldots,h$ oraz wszystkich wymuszeń $u_i \in R_+$, $i \in Z_+$ mamy $x_i \in R_+^n$ oraz $y_i \in R_+$ dla $i \in Z_+$.

Twierdzenie 1. [3,7,5] Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_k \in R_+^{n\times n}, k = 0,1,\ldots,h,\ b \in R_+^n,\ c \in R_+^{1\times n},\ d \in R_+ \quad (3)$$

Transmitancja układu (1) ma postać

$$T(z) = c\left[I_n z - A_0 - A_1 z^{-1} - \dots - A_h z^{-h}\right]^{-1} b + d \tag{4}$$

Definicja 2. Macierz (3) nazywamy realizacją dodatnią danej właściwej funkcji wymiernej $T(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one równość (4). Realizację (3) nazywamy minimalną wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar $n \times n$ macierzy $A_k, k = 0,1,\dots,h$ jest minimalny wśród wszystkich realizacji funkcji wymiernej $T(z)$.

Zadanie wyznaczania dodatnich realizacji można sformułować następująco:

Dana jest właściwa funkcja wymierna $T(z)$. Należy wyznaczyć realizację dodatnią minimalną (3) funkcji wymiernej $T(z)$.

W pracy tej zostaną podane warunki konieczne i wystarczające istnienia oraz procedura wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych (3) dla danej funkcji wymiernej $T(z)$.

3. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Transmitancję (4) możemy napisać w postaci

$$T(z) = \frac{z^h c Adj H(z) b}{\det H(z)} + d = \frac{n(z)}{d(z)} + d \tag{5}$$

gdzie

$$H(z) = [I_n z^{h+1} - A_0 z^h - A_1 z^{h-1} - \dots - A_h]$$

$$n(z) = z^h c Adj H(z) b = n_{N-1} z^{N-1} + n_{N-2} z^{N-2} + \dots + n_h z^h$$
$$d(z) = \det H(z) = z^N - a_{N-1} z^{N-1} - \dots - a_1 z - a_0$$

(6)

a $Adj\, M$ oznacza macierz dołączoną macierzy M, a $N = n(h+1)$.

Z zależności (5) mamy

$$d = \lim_{z \to \infty} T(z) \tag{7}$$

gdyż $\lim_{z \to \infty} \left[z^{-h} H(z)\right]^{-1} = 0$..

Część ściśle właściwa funkcji $T(z)$ ma postać

$$T_{sp}(z)=T(z)-d=\frac{n(z)}{d(z)} \tag{8}$$

Tak więc wyznaczanie dodatniej realizacji zostało sprowadzone do wyznaczania macierzy

$$A_k \in R_+^{n\times n}, k=0,1,\dots,h, b\in R_+^n, c\in R_+^{1\times n} \tag{9}$$

dla danej ściśle właściwej funkcji wymiernej (8)..

Lemat 1. Ściśle właściwa funkcja wymierna (8) ma postać

$$T_{sp}(z)=\frac{n'(z)}{d'(z)} \tag{10}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A_h = 0$ przy czym

$$n'(z)=\frac{n(z)}{z}, d'(z)=z^{N-1}-a_{N-1}z^{N-2}-\dots-a_2z-a_1 \tag{11}$$

Dowód. Z definicji $d(z)$ dla $z=0$ wynika, że $a_0=\det A_h$. Zauważmy, że $d(z)=zd'(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0=0$ oraz (8) można zredukować do postaci (10) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A_h=0$. □

Lemat 2. Jeżeli macierze $A_k, k=0,1,\dots,h$ mają jedną

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2h+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-3h-4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{N-2h-3} & 0 & \dots & 0 & a_{N-h-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-1} \end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{h-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2h} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-3h-5} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{N-2(h+2)} & 0 & \dots & 0 & a_{N-h-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} \end{bmatrix},$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
a_{h-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
a_{2h-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{N-3(h+2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
a_{N-2h-5} & 0 & \dots & 0 & a_{N-h-4} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-3}
\end{bmatrix}, \dots,
$$

$$
A_h = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_{h+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{N-4(h+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_{N-3(h+1)} & 0 & 0 & & 1 & 0 & a_{N-2(h+1)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{N-(h+1)}
\end{bmatrix}
$$

$$
\overline{A}_k = A_k^T, k = 0,1,\dots,h \quad (T \text{ oznacza transpozycję}) \tag{12b}
$$

$$
\hat{A}_k = PA_kP, k = 0,1,\dots,h,\ P = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{12c}
$$

$$
\widetilde{A}_k = \hat{A}_k^T, k = 0,1,\dots,h \tag{12d}
$$

wtedy

$$
\begin{aligned}
\det H(z) &= \det\left[I_n z^{h+1} - A_0 z^h - A_1 z^{h-1} - \dots - A_h\right] = \\
&= \det\left[I_n z^{h+1} - \overline{A}_0 z^h - \overline{A}_1 z^{h-1} - \dots - \overline{A}_h\right] = \\
&= \det\left[I_n z^{h+1} - \hat{A}_0 z^h - \hat{A}_1 z^{h-1} - \dots - \hat{A}_h\right] = \\
&= \det\left[I_n z^{h+1} - \widetilde{A}_0 z^h - \widetilde{A}_1 z^{h-1} - \dots - \widetilde{A}_h\right] = \\
&= z^N - a_{N-1} z^{N-1} - a_{N-2} z^{N-2} - \dots a_1 z - a_0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dowód. Rozwijając wyznacznik względem pierwszego wiersza otrzymamy $\det H(z) =$

$$
\begin{vmatrix}
z^{h+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-a_h z^h - a_{h-1} z_{h-1} - \dots - a_0 & z^{h+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{2h+1} z^h - a_{2h} z^{h-1} - \ldots - a_{h+1} & -1 & z^{h+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-a_{N-3h-4} z^h - a_{N-3h-5} z^{h-1} - \dots - a_{N-4(h+1)} & 0 & 0 & z^{h+1} & z^{h+1} & 0 & 0 \\
-a_{N-2h-3} z^h - a_{N-2(h+2)} z^{h-1} - \dots - a_{N-3(h+1)} & 0 & 0 & -1 & -1 & z^{h+1} & -a_{N-h-2} z^h - a_{N-h-3} z^{h-1} - \dots - a_{N-2(h+1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & z^{h+1} - a_{N-1} z^h - a_{N-2} z^{h-1} - \dots - a_{N-(h+1)}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= z^{(n-2)(h+1)}
\begin{vmatrix}
z^{h+1} & -a_{N-h-2} z^h - a_{N-h-3} z^{h-1} - \dots - a_{N-2(h+1)} \\
-1 & z^{h+1} - a_{N-1} z^h - a_{N-2} z^{h-1} - \dots - a_{N-(h+1)}
\end{vmatrix} +
$$

$$
+(-1)^{n+2}
\begin{vmatrix}
-a_h z^h - a_{h-1} z^{h-1} - \dots - a_0 & z^{h+1} & \cdots & 0 & 0 \\
-a_{2h+1} z^h - a_{2h} z^{h-1} - \dots - a_{h+1} & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-a_{N-2h-3} z^h - a_{N-2(h+2)} z^{h-1} - \dots - a_{N-3(h+1)} & 0 & \cdots & -1 & z^{h+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -1
\end{vmatrix} = \dots =
$$

$$
= z^N - a_{N-1} z^{N-1} - a_{N-2} z^{N-2} - \dots - a_1 z - a_0
$$

Dowód dla macierzy (12b) wynika z faktu. że transpozycja nie zmienia wartości wyznacznika, czyli

$$\det\left[I_n z^{h+1} - \overline{A}_0 z^h - \overline{A}_1 z^{h-1} - \dots - \overline{A}_h\right] = \det H^T(z) = \det H(z)$$

Biorąc pod uwagę (12c) oraz $P^{-1} = P^T = P$ otrzymamy

$$\det\left[I_n z^{h+1} - \hat{A}_0 z^h - \hat{A}_1 z^{h-1} - \dots - \hat{A}_h\right] = \det\left[I_n z^{h+1} - A_0 z^h - A_1 z^{h-1} - \dots - A_h\right]$$

Dowód dla macierzy (12d) jest analogiczny do dowodu dla macierzy (12b). □

Uwaga 1. Macierze (12) mają nieujemne elementy wtedy i tylko wtedy, gdy współczyniki $a_k, k = 0,1,\dots,N-1$ wielomianu (13) są nieujemne.

Uwaga 2. Wymiar $n \times n$ macierzy (12) jest najmniejszy z możliwych wymiarów realizacji funkcji wymiernej (8).

Definicja 3. Macierze $A_k, k = 0,1,\dots,h$ nazywamy cyklicznymi wtędy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny

$$d(z) = \det H(z) = z^N - a_{N-1} z^{N-1} - a_{N-2} z^{N-2} - \dots - a_1 z - a_0 \tag{14}$$

jest równy wielomianowi minimalnemu $\Psi(z)$, tzn.

$$d(z) = \Psi(z) \tag{15}$$

Jak wiadomo wielomiany te są związane zależnością

$$\Psi(z) = \frac{d(z)}{D_{n-1}(z)} \tag{16}$$

a $\Psi(z) = d(z)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $D_{n-1}(z) = 1$, przy czym $D_{n-1}(z)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia $n-1$ - szego macierzy $H(z)$

Lemat 3. Macierze (12) są cykliczne dla dowolnych wartości współczynników $a_k, k = 0,1,\dots,N-1$.

Dowód zostanie podany tylko dla macierzy (12a), gdyż w pozostałych przypadkach jest analogiczny. Zauważmy, że minor otrzymany przez wykreślenie pierwszej kolumny i drugiego wiersza macierzy $H(z)$ jest równy $(-1)^{n-1}$. Wobec tego $D_{n-1}(z)=1$, a zgodnie z zależnością (15) mamy $\Psi(z)=d(z)$. □

Macierz odwrotną macierzy $H(z)$ możemy napisać w postaci

$$\left[H^{-1}(z)\right]^{-1}=\frac{N(z)}{d(z)} \tag{17}$$

przy czym $N(z)$ jest macierzą wielomianową, a wielomian $d(z)$ jest określony zależnością (14).

Macierz (17) nazywamy w postaci standardowej, jeżeli macierz $\frac{N(z)}{d(z)}$ jest nieredukowalna, a współczynnik przy największej potędze wielomianu $d(z)$ jest równy 1.

Definicja 4. Macierz standardową (17) dla $n \geq 2$ nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $N(z)$ jest podzielny (bez reszty) przez wielomian $d(z)$.

Lemat 4. Macierz standardowa (17) dla $n \geq 2$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $A_k, k=0,1,...,h$ są cykliczne.

Dowód. ***Dostateczność.*** Niech macierze $A_k, k=0,1,...,h$ są cykliczne. Wtedy zgodnie z definicją 3, $\Psi(z)=d(z)$ oraz postać kanoniczna Smitha macierzy $H(z)$ jest równa

$$H(z)_S = diag[1,1,..,1,d(z)] \tag{18}$$

Macierz dołączona macierzy (18) ma postać

$$AdjH(z)_S = diag[d(z),d(z),..,d(z),1] \tag{19}$$

Każdy niezerowy minor stopnia 2-go macierzy (19) jest więc podzielny przez wielomian $d(z)$. Zgodnie z twierdzeniem Bineta-Cauchy'ego każdy niezerowy minor stopnia 2-go macierzy

$$V(z)AdjH(z)_S U(z) \tag{20}$$

jest również podzielny prze $d(z)$, gdyż jest on sumą iloczynów minorów 2-go stopnia macierzy unimodularnych $V(s),U(s)$ oraz (19). Macierz (17) jest więc macierzą normalną.

Konieczność zostanie udowodniona metodą przez zaprzeczenie. Z założenia macierz (17) jest nieredukowalna. Przypuśćmy, że macierz (17) nie jest cykliczna. Wtedy $\Psi(z) \neq d(z)$, a zgodnie z zależnością (16) $D_{n-1}(z) \neq 1$. W tym przypadku $d(z) = D_{n-1}(z)d(z)$ i macierz (17) jest redukowalna. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, a więc macierz (17) jest cykliczna. □

Lemat 4. Jeżeli macierze $A_k, k = 0,1,...,h$ mają postać (12a) wtedy macierz dołączoną $Adj[I_n z^{h+1} - A_0 z^h - A_1 z^{h-1} - \cdots - A_h]$ można rozłożyć następująco

$$N(z) = AdjH(z) = \overline{P}(z)\overline{Q}(z) + d(z)\overline{G}(z) \tag{21}$$

gdzie

$$\overline{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \\ p_3(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} p_2(z) = z^{N-(h+1)} - a_{N-1}z^{N-(h+2)} - a_{N-2}z^{N-(h+3)} - \cdots - a_{h+2}z - a_{h+1}z \\ p_3(z) = z^{N-2(h+1)} - a_{N-1}z^{N-(2h+3)} - a_{N-2}z^{N-2(h+2)} - \cdots - a_{2h+3}z - a_{2(h+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}(z) = z^{2(h+1)} - a_{N-1}z^{2h+1} - a_{N-2}z^{2h} - \cdots - a_{N-(h+1)}z^{h+1} \\ p_n(z) = z^{h+1} \end{array} \tag{22}$$

$$\overline{Q}(z) = [q_1(z) \;\; 1 \;\; q_3(z) \ldots q_n(z)]$$

$$q_1(z) = z^{N-(h+1)} - a_{N-1}z^{N-(h+2)} - a_{N-2}z^{N-(h+3)} - \cdots - a_{N-2(h+1)}z^{N-3(h+1)} \tag{23}$$

$$q_{n-1}(z) = z^{N-3(h+1)}, \; q_n(z) = z^{N-2(h+1)}$$

$$\overline{G}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & * & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & 0 & * & \cdots & * & * \\ * & 0 & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

(* oznacza elementy nieistotne w tych rozważaniach)

Analogiczne rozkłady zachodzą dla macierzy (12b)-(12d).

Dowód. Łatwo sprawdzić, że macierz dołączona ma postać

$$AdjH(z) = \left[\begin{array}{ccccc} q_1(z) & 1 & q_3(z) & \cdots & q_n(z) \\ * & p_2(z) & * & \cdots & * \\ * & p_3(z) & * & \cdots & * \\ \hdashline * & p_{n-1}(z) & * & \cdots & * \\ * & p_n(z) & * & \cdots & * \end{array}\right] \tag{24}$$

Zauważmy, że macierz (24) można napisać w postaci (21), gdyż zgodnie z lematem 4 każdy jej niezerowy minor stopnia 2-go jest podzielny przez $d(z)$. Łatwo sprawdzić, że macierze (22) i (23) spełniają równość (21). □

Podstawiając (21) do (17) otrzymamy

$$T_{sp}(z) = \frac{P(z)Q(z)}{d(z)} + G(z) \tag{25}$$

gdzie

$$P(z) = z^h c\overline{P}(z),\; Q(z) = \overline{Q}(z)b, G(z) = z^h c\overline{G}(z)b \tag{26}$$

Uwaga 3. Z zależności (26) wynika, że realizacja dodatnia (9) funkcji wymiernej $T_{sp}(z)$ nie zależy od macierzy wielomianowej $G(z)$, gdyż $G(z)$ jest macierzą wielomianową, a $T_{sp}(z)$ jest macierzą wymierną.

Z zależności (22) i (25) mamy

$$P(z) = cz^h\overline{P}(z) = [c_1 \quad c_2 \cdots c_n]z^h \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{bmatrix} = c_2 z^{N-1} - c_2 a_{N-1} z^{N-2} +$$

$$+ (c_3 - a_{N-2}c_2)z^{N-3} + \cdots + (c_n - a_{N-(h+1)}c_{n-1} + \cdots)z^{2h+1} +$$

$$+ \cdots - (a_{h+2}c_2 + a_{2h+3}c_3 + \cdots)z^{h+1} + (c_1 - a_{h+1}c_2 - a_{2(h+1)}c_3 - \cdots)z^h \,. \tag{27}$$

$$Q(z) = \overline{Q}(z)b = [q_1(z) \quad 1 \quad q_3(z) \cdots q_n(z)] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 z^{N-(h+1)} - a_{N-1}b_1 z^{N-(h+2)} +$$

$$+ (b_{n-1} - a_{N-2(h+1)}b_1)z^{N-3(h+1)} + b_2$$

Załóżmy, że wielomian $n(z)$ funkcji wymiernej (8) można rozłożyć na następujący iloczyn

$$n(z) = p(z)q(z) \tag{28}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{N-(h+1)}z^{N-1} - p_{N-(h+2)}z^{N-2} + \cdots + p_2 z^{h+2} - p_1 z^{h+1} + p_0 z^h \\ q(z) &= q_{N-(h+1)}z^{N-(h+1)} - q_{N-(h+2)}z^{N-(h+2)} + \cdots + q_2 z^2 - q_1 z + q_0 \end{aligned} \tag{29}$$

Porównanie (27) i (29) daje

$$\begin{aligned} p_{N-(h+1)} &= c_2, p_{N-(h+2)} = c_2 a_{N-1}, \cdots, p_0 = c_1 - a_{h+1}c_2 - a_{2(h+1)}c_3 - \cdots \\ q_{N-(h+1)} &= b_1, q_{N-(h+2)} = a_{N-1}b_1, \cdots, q_0 = b_2 \end{aligned} \tag{30}$$

Znając współczynniki p_k oraz q_k dla $k = 0,1,...,N-(h+1)$ możemy wyznaczyć z zależności (30) elementy b_i oraz $c_i, i = 1,...,n$ macierzy b i c.

Z zależności (30) wynika, że $b_i \geq 0$ oraz $c_i \geq 0$ dla $i = 1,...,n$ wtedy, gdy $p_k \geq 0$ i $q_k \geq 0$ dla $k = 0,1,...,N-(h+1)$ oraz $a_j \geq 0$ dla $j = 0,1,...,N-1$.

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Istnieje realizacja dodatnia (3) funkcji wymiernej $T(z)$ jeżeli są spełnione następujące trzy warunki

i) $T(\infty) = \lim_{z\to\infty} T(z) \in R_+$

ii) Współczynniki a_k, $k = 0,1,\ldots,N-1$ wielomianu $d(z)$ są nieujemne, tzn.

$$a_k \geq 0 \text{ dla } k = 0,1,...,N-1 \tag{31}$$

iii) Licznik $n(z)$ funkcji wymiernej (8) można rozłożyć tak, aby wielomiany p_k i q_k (określone przez (29)) miały nieujemne współczynniki, tzn.

$$p_k \geq 0 \text{ i } q_k \geq 0 \text{ dla } k = 0,1,...,N-(h+1) \tag{32}$$

oraz były spełnione zależności (30).

Jeżeli warunki twierdzenia 2 spełnione, to dodatnią realizację minimalną (3) funkcji wymiernej $T(z)$ można wyznaczyć korzystając z następującej procedury

Procedura

Krok 1. Korzystając z (7) i (8) wyznaczamy d oraz ściśle właściwą funkcję $T_{sp}(z)$

Krok 2. Znając współczynniki a_k, $k = 0,1,\dots,2n-1$ wielomianu $d(z)$ wyznaczamy macierze (12a) (lub (12b)-(12d)).

Krok 3. Wyznaczamy rozkład (28) wielomianu $n(z)$ oraz współczynniki p_k i q_k, $k = 0,1,\dots, N-(h+1)$ wielomianu (29).

Krok 4. Korzystając (30) wyznaczamy b_i i $c_i, i = 1,\dots,n$ oraz macierze b i c.

Uwaga 4. Stopień N wielomianu $d(z)$, rząd minimalny realizacji n oraz liczba opóźnień h są związanen zależnością $N = n(h+1)$.

Biorąc pod uwagę Lemat 1 dla przyjętej liczby opóźnień h możemy wyznaczyć minimalny rząd realizacji z zależności

$$n = \begin{cases} \dfrac{N}{h+1} & dla\ N\ parzystego \\ \dfrac{N+1}{h+1} & dla\ N\ nieparzystego \end{cases} \tag{33}$$

Dla przyjętego minimalnego rzędu realizacji n możemy wyznaczyć liczbę opóźnień z zależności

$$h = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n} & dla\ N\ parzystego \\ \dfrac{N-n+1}{n} & dla\ N\ nieparzystego \end{cases} \tag{34}$$

4. PRZYKŁAD

Dla danej transmitancji

$$T(z) = \frac{2z^5 - z^4 - z^3 - 4z^2 - 3z - 2}{z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1} \tag{35}$$

wyznaczyć dodatnią realizację (3).

Korzystając z (33) dla $h = 1$ oraz $N = 5$ otrzymamy $n = \dfrac{N+1}{h+1} = 3$ a z zależności (34) dla $n = 2$ mamy $h = \dfrac{N-n+1}{n} = 2$. Istnieją więc potencjalnie realizacje dodat-

nie (3) transmitancji (35) rzędu $n = 3$ z jednym opóźnieniem ($h = 1$) oraz rzędu $n = 2$ z dwoma opóźnieniami ($h = 2$).
Korzystając z powyższej procedury dla $n = 3, h = 1$ otrzymamy

Krok 1. Korzystając z (7) otrzymamy

$$d = T(\infty) = \lim_{z \to \infty} T(z) = 2 \tag{36}$$

oraz

$$T_{sp}(z) = T(z) - d = \frac{z^4 - z^3 - z}{z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1} \tag{37}$$

Krok 2. Biorąc pod uwagę , że
$d'(z) = z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1$ ($a_5 = a_2 = a_1 = 1, a_3 = 2, a_4 = a_0 = 0$) oraz (12a) dla $h = 1$ dostaniemy

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Krok 3. W tym przypadku

$$[Iz^2 - A_0 z - A_1]^{-1} = \begin{bmatrix} z^2 & 0 & -1 \\ -z & z^2 & -2z-1 \\ 0 & -1 & z^2 - z \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z(z^5 - z^4 - 2z^2 - z - 1)} \begin{bmatrix} z^4 - z^3 - 2z - 1 & 1 & z^2 \\ z^3 - z^2 & z^4 - z^3 & 2z^3 + z^2 + z \\ z & z^2 & z^4 \end{bmatrix}$$

a z (22) i (23) otrzymamy

$$\overline{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ p_2(z) \\ p_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ z^4 - z^3 \\ z^2 \end{bmatrix}, \overline{Q}(z) = [z^4 - z^3 - 2z - 1, 1, z^2] \tag{39}$$

Wobec tego z (27) i (39) mamy

$$P(z)=[c_1\ c_2\ c_3]z\begin{bmatrix}1\\ z^4-z^3\\ z^2\end{bmatrix}=z\left[c_1+c_2(z^4-z^3)+c_3z^2\right]$$

$$Q(z)=\left[z^4-z^3-2z-1,\ 1,\ z^2\right]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=b_1(z^4-z^3-2z-1)+b_2+b_3z^2 \tag{40}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach z równości $P(z)Q(z)=z^4-z^3-z$ łatwo sprawdzić, że nie istnieje rozwiązanie nieujemne $(b_i\geq 0,\ c_i\geq 0, i=1,2,3)$. Nie istnieje więc realizacja dodatnia (3) dla $n=3$ i $h=1$.

W przypadku, gdy $n=2, h=2$ otrzymamy

Krok 1. To samo $d=2$ oraz $T_{sp}(z)$

Krok 2. Korzystając z (12a) dla $h=2$ otrzymamy

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ a_2 & a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ a_1 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_0 & a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{41}$$

Krok 3. W tym przypadku

$$[Iz^3-A_0z^2-A_1z-A_2]^{-1}=\begin{bmatrix}z^3 & -1\\ -z^2-z & z^3-z^2-2\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{z(z^5-z^4-2z^2-z-1)}\begin{bmatrix}z^3-z^2-2 & 1\\ z^2+z & z^3\end{bmatrix}$$

oraz

$$\overline{P}(z)=\begin{bmatrix}1\\ p_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ z^3\end{bmatrix}, \overline{Q}(z)=\left[z^3-z^2-2,\ 1\right] \tag{42}$$

Korzystając z (27) i (42) otrzymamy

$$P(z) = [c_1 \;\; c_2]z^2\begin{bmatrix} 1 \\ z^3 \end{bmatrix} = z^2(c_1 + c_2 z^3), \; Q(z) =$$

$$= [z^3 - z^2 - 2, 1]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1(z^3 - z^2 - 2) + b_2$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach z równości

$$P(z)Q(z) = z^2(c_1 + c_2 z^3)[b_1(z^3 - z^2 - 2) + b_2] = z^2(z^3 - z^2 - 1)$$

otrzymamy $b_1 = b_2 = 1$ oraz $c_1 = 1, c_2 = 0$

Wobec tego

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1 \;\; 0] \tag{43}$$

Poszukiwana realizacja dodatnia ma postać (41), (43) i (36).

5. UWAGI KOŃCOWE

Został sformułowany i rozwiązany problem wyznaczania dodatniej realizacji minimalnej dla układów dyskretnych o jednym wejściu i jednym wyjściu z wieloma opóźnieniami. Wprowadzono postacie specjalne (12) macierzy $A_k, k = 0,1,\ldots,h$. Wykazano, że macierze (12) są cykliczne, a macierz standardowa (17) $n \geq 2$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $A_k, k = 0,1,\ldots,h$ są cykliczne. Sformułowano warunki wystarczające istnienia minimalnej realizacji dodatniej (3) dla danej właściwej funkcji wymiernej $T(z)$. Podano procedurę wyznaczania tej minimalnej realizacji oraz zilustrowano ją przykładami liczbowymi. Rozważania te można uogólnić na układy ciągłe o wielu wejściach i wyjściach oraz wielu opóźnieniach. Problemem otwartym jest uogólnienie tych rozważań na układy singularne i dwuwymiarowe.

References

1. L. Benvenuti and L. Farina, *A tutorial on the positive realization problem,* IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, No 5, 2004, pp. 651-664.
2. M. Busłowicz, *Explicit solution of discrete-delay equations,* Foundations of Control Engineering, vol. 7, No. 2, 1982, pp. 67-71
3. M. Busłowicz and T. Kaczorek, *Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay,* 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 6-9, 2004, Kasadasi, Izmir, Turkey

4. L. Farina and S. Rinaldi, Positive Linear Systems; Theory and Applications, J. Wiley, New York, 2000
5. T. Kaczorek, Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002
6. T. Kaczorek, *Some recent developments in positive systems,* Proc. 7th Conference of Dynamical Systems Theory and Applications, pp. 25-35, Łódź 2003.
7. T. Kaczorek and M. Busłowicz, Minimal realization for positive multivariable linear systems with delay, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2004, vol. 14, No 2, pp. 181-187
8. G. Xie, L. Wang, Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays, in L. Benvenuti, A. De Santis and L. Farina (eds): Positive Systems, LNCIS 294, Springer-Verlag, Berlin 2003, pp. 377-384.