Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
Politechnika Białostocka

ZUPEŁNA OSIĄGALNOŚĆ LINIOWYCH DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z JEDNOSTKOWYM OPÓŹNIENIEM

W pracy rozpatrzono problem zupełnej osiągalności (zadany stan końcowy jest stanem zupełnym) dodatnich układów dyskretnych z jednym jednostkowym opóźnieniem. Taki rodzaj osiągalności (w odróżnieniu od zwykłej osiągalności, gdy stan końcowy jest stanem chwilowym) nazywany osiągalnością zupełną lub całkowitą. Wykazano, że w przypadku ogólnym dodatni układ z opóźnieniem nie jest całkowicie osiągalny. Całkowicie osiągalnym może być tylko dodatni układ z czystym opóźnieniem. Sformułowano kryteria całkowitej osiągalności dodatniego układu z czystym opóźnieniem oraz podano metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego rozpatrywany układ z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego.

COMPLETE REACHABILITY OF LINEAR POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH UNIT DELAY

The problem of complete reachability of positive discrete-time linear systems with one unit delay is considered. It is shown that the positive discrete-time system with delay is not complete reachable in general case. The positive system may be complete reachable only in the case of system with pure delay. Necessary and sufficient conditions for complete reachability of the system with pure delay are established and a method for computing of the control sequence which transfer the system from zero complete initial state to the desired complete final state is given.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Liniowe układy dodatnie nie są zdefiniowane w przestrzeniach liniowych lecz w przestrzeniach stożków. Z tego powodu teoria takich układów jest mniej zaawansowana w porównaniu z teorią układów liniowych "niedodatnich".

Problem analizy i syntezy układów dodatnich, ale bez opóźnień, jest tematem wielu publikacji od kilku lat, patrz np. monografie [5, 6, 7] oraz prace [1, 8] i cytowaną tam literaturę.

Ostatnio problem osiągalności dyskretnych dodatnich układów liniowych z opóźnieniami rozpatrzono w pracach [3, 4, 10, 11]. Kryteria sterowania z minimalną energią takich układów podano w pracach [3, 9, 10].

W niniejszej pracy rozpatrzymy ogólniejszy rodzaj osiągalności dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem, a mianowicie tzw. osiągalność całkowitą, zwaną też osiągalnością zupełną.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$ przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dyskretny dodatni układ liniowy stacjonarny z opóźnieniem, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

o macierzach $A_0 \in \Re_+^{n\times n}$, $A_1 \in \Re_+^{n\times n}$, $B \in \Re_+^{n\times m}$, z warunkiem początkowym

$$x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n. \tag{2}$$

Jeżeli $u_i \in \Re_+^m$ dla $i \in Z_+$, to przy spełnieniu powyższych założeń rozwiązanie równania stanu (1) jest nieujemne dla każdego $i \in Z_+$, tzn. $x_i \in \Re_+^n$ dla $i \in Z_+$.

Rozwiązanie równania stanu (1) z warunkiem początkowym (2) ma postać [2]

$$x_i = \Phi(i)x_0 + \Phi(i-1)A_1 x_{-1} + \sum_{r=0}^{i-1} \Phi(i-1-r)Bu_r, \tag{3}$$

gdzie

$$\Phi(i) = Z^{-1}\{(zI - A_0 - A_1 z^{-1})^{-1} z\}. \tag{4}$$

Macierz podstawowa $\Phi(i)$ spełnia równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) \tag{5}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{6}$$

Definicje stanu chwilowego, stanu zupełnego układu (1) oraz osiągalności tych stanów można sformułować w sposób podany poniżej.

Definicja 1. Stan $x_i \in \Re_+^n$ nazywamy stanem (chwilowym) układu (1) w dyskretnej chwili i.

Definicja 2. Stan $\widetilde{x}_i^{\mathrm{T}} = [x_i^{\mathrm{T}}, x_{i-1}^{\mathrm{T}}]$ układu (1), określony przez parę wektorów $x_i \in \Re_+^n$ i $x_{i-1} \in \Re_+^n$, nazywamy stanem zupełnym tego układu w dyskretnej chwili i. Stan $\widetilde{x}_0^{\mathrm{T}} = [x_0^{\mathrm{T}}, x_{-1}^{\mathrm{T}}]$ nazywamy zupełnym stanem początkowym układu (1).

Definicja 3. Stan $x_f \in \Re_+^n$ nazywamy osiągalnym w N krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$ dla $i = 0,1,\ldots N-1$, który przeprowadza ten układ z zerowego zupełnego stanu początkowego (2) (tj. $\widetilde{x}_0^{\mathrm{T}} = [x_0^{\mathrm{T}}, x_{-1}^{\mathrm{T}}] = 0$) do stanu końcowego x_f.

Definicja 4. Jeżeli każdy stan $x_f \in \Re_+^n$ jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy $\Re_+^n$-osiągalnym lub osiągalnym w N krokach.

Definicja 5. Jeżeli dla każdego stanu $x_f \in \Re_+^n$ istnieje taka liczba naturalna N, że stan ten jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy $\Re_+^n$-osiągalnym lub krótko osiągalnym.

Definicja 6. Stan zupełny $\widetilde{x}_f \in \Re_+^{2n}$ nazywamy osiągalnym w N krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,,\ldots,N-1$, który przeprowadza ten układ z zerowego zupełnego stanu początkowego $\widetilde{x}_0 = 0$ do zupełnego stanu końcowego $\widetilde{x}_f$, tj. $\widetilde{x}_N^{\mathrm{T}} = [x_N^{\mathrm{T}}, x_{N-1}^{\mathrm{T}}] = \widetilde{x}_f^{\mathrm{T}}$.

Definicja 7. Jeżeli każdy stan zupełny $\widetilde{x}_f$ jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy całkowicie osiągalnym w N krokach.

Definicja 8. Jeżeli dla każdego zupełnego stanu końcowego $\widetilde{x}_f \in \Re_+^{2n}$ istnieje taka liczba naturalna N, że stan ten jest całkowicie osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy całkowicie osiągalnym.

Problem $\Re_+^n$-osiągalności (osiągalności) dodatniego układu (1) oraz problem sterowania z minimalną energią tego układu został rozpatrzony w pracach [3, 4, 9, 10, 11].

Celem niniejszej pracy jest analiza problemu całkowitej osiągalności dodatniego układu (1), podanie warunków całkowitej osiągalności tego układu i metody wyznaczania sterowania przeprowadzającego ten układ z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Definiując

$$\widetilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n}, \quad \widetilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n}, \tag{7}$$

równanie stanu dyskretnego dodatniego układu z opóźnieniem (1) napiszemy w postaci równania stanu równoważnego dyskretnego układu bez opóźnienia

$$\widetilde{x}_{i+1} = A\widetilde{x}_i + \widetilde{B}u_i, \quad i \in Z_+, \tag{8}$$

z warunkiem początkowym $\widetilde{x}_0 \in \Re_+^{2n}$, przy czym

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Zatem problem całkowitej osiągalności dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniem (1) jest równoważny z problemem osiągalności dodatniego układu dyskretnego bez opóźnienia (8) o macierzach (9).

Rozwiązanie równania (8) ma postać

$$\widetilde{x}_i = A^i \widetilde{x}_0 + \sum_{r=0}^{i-1} A^{i-r-1} \widetilde{B} u_r. \tag{10}$$

Dla $\widetilde{x}_0 = 0$ oraz $i = N$ wzór (10) można napisać w postaci

$$\widetilde{x}_N = \widetilde{R}_N u_0^N, \tag{11}$$

gdzie

$$\widetilde{R}_N = [\widetilde{B}, A\widetilde{B}, \ldots, A^{N-1}\widetilde{B}], \quad u_0^N = \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Istotne znaczenie w teorii osiągalności dodatnich układów dyskretnych opisanych równaniem stanu (8) odgrywa macierz osiągalności

$$\widetilde{R}_N = [\widetilde{B}, A\widetilde{B}, \ldots, A^{N-1}\widetilde{B}]. \tag{13}$$

Macierz (13) ma $2n$ wierszy i Nm kolumn. Może ona mieć pełny rząd wierszowy tylko wtedy, gdy $Nm \geq 2n$. Zatem przy $m = 1$ musi być $N \geq 2n$, natomiast przy $m > 1$ liczba N może być mniejsza od $2n$.

Uwzględniając warunki osiągalności równoważnego układu dodatniego bez opóźnienia (8) (np. [6, 7]), warunek konieczny i wystarczający osiągalności dodatniego układu z opóźnieniem (1), można sformułować w sposób podany poniżej.

Twierdzenie 1. Dodatni układ z opóźnieniem (1) jest całkowicie osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że jest spełniony przynajmniej jeden z następujących warunków:

1. z macierzy $\widetilde{R}_N$ można wybrać $2n$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\overline{R}_N$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe).
2. z macierzy $\widetilde{R}_N$ można wybrać $2n$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz odwrotna $\widetilde{R}_{2n}^{-1}$ macierzy utworzonej z tych kolumn ma elementy nieujemne, tzn. $\widetilde{R}_{2n}^{-1} \in \Re_+^{2n\times 2n}$.

Istotne znaczenie w dalszych rozważaniach ma poniższy lemat oraz twierdzenie.

Lemat 1. Jeżeli macierz $[A, \widetilde{B}]$ nie ma $2n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn (w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe), to nie istnieje liczba naturalna N taka, że dodatni układ z opóźnieniem (1) jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Jeżeli dodatni układ (1) jest całkowicie osiągalny, to macierz $\widetilde{R}_N$ o postaci (13) ma $2n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Łatwo zauważyć, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy macierz $[A, \widetilde{B}]$ ma $2n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. ■

Twierdzenie 2. Jeżeli $A_0 \neq 0$, to dodatni układ z opóźnieniem (1) nie jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Jeżeli $A_0 \neq 0$, to macierz

$$[A, \widetilde{B}] = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & B \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

nie ma $2n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Może ona mieć co najwyżej $n+(n-1)=2n-1$ takich kolumn. Zatem, zgodnie lematem 1, przy $A_0 \neq 0$ dodatni układ z opóźnieniem (1) nie jest całkowicie osiągalny. ■

Uwzględniając twierdzenie 2 w dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać dodatni układ z czystym opóźnieniem, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_1 x_{i-1} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{15}$$

gdzie $A_1 \in \Re_+^{n\times n}$, $B \in \Re_+^{n\times m}$, z warunkiem początkowym (2). Może on być układem całkowicie osiągalnym, zgodnie z powyższymi rozważaniami.

Układ bez opóźnienia, równoważny układowi z opóźnieniem (15), można opisać równaniem stanu (8) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

z warunkiem początkowym $\widetilde{x}_0 \in \Re_+^{2n}$.

Lemat 2. Jeżeli macierz $[A_1, B]$ nie ma n liniowo niezależnych monomialnych kolumn, to dodatni układ (15) nie jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Macierz

$$[A, \widetilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & B \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

ma co najmniej n liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Nie ma ona $2n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn, jeżeli macierz $[A_1, B]$ nie ma n liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Teza lematu wynika zatem z lematu 1. ■

Uwzględniając strukturę macierzy (16), łatwo można pokazać, że poszczególne macierze $A^k \widetilde{B}$ występujące w macierzy osiągalności (13) mają postać

$$A^k \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{k/2} B \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dla } k \text{ parzystego } (k = 0,2,4,6,\dots), \tag{18a}$$

$$A^k \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1^{(k-1)/2} B \end{bmatrix} \text{ dla } k \text{ nieparzystego } (k = 1,3,5,7,\dots). \tag{18b}$$

Przypomnijmy, że (np. [6, 7]) zbiór $X \in \Re^n$ nazywamy stożkiem, jeżeli $x \in X$, to $\alpha x \in X$ dla każdego $\alpha \in \Re$. Stożek nazywamy wypukłym, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ każdy punkt odcinka $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$ dla $\lambda \in [0,1]$. Stożek X nazywamy solidnym, jeżeli w jego wnętrzu mieści się kula $K(x,r)$ o środku w punkcie $x \in X$ i o promieniu r.

Ponieważ stożek stanów osiągalnych równoważnego układu dodatniego (8) o macierzach (16) jest stożkiem zupełnych stanów osiągalnych dodatniego układu (15) z opóźnieniem, na podstawie prac [6, 7] można wykazać, że jeżeli układ dodatni (15) o macierzach (16) jest całkowicie osiągalny, to jest on zawsze całkowicie osiągalny w $N = 2n$ krokach oraz udowodnić następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. Zbiór osiągalnych stanów zupełnych układu dodatniego (15) jest dodatnim stożkiem wypukłym. Stożek ten jest solidny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że macierz osiągalności (13) przy macierzach A i $\widetilde{B}$ o postaciach (16) ma pełny rząd wierszowy równy $2n$.

Twierdzenie 4. Stożek zupełnych stanów osiągalnych dodatniego układu z opóźnieniem (15) jest niezmienniczy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że rząd $\widetilde{R}_N = 2n$ oraz współczynniki wielomianu charakterystycznego układu (15) (będącego wielomianem charakterystycznym macierzy A), o postaci

$$\det(z^2 I - A_1) = \det(zI - A) = z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \Lambda + a_1 z + a_0$$

są niedodatnie, tzn. $a_i \le 0$ dla $i = 0,1,\ldots,2n-1$.

Z powyższych twierdzeń wynika, że jeżeli spełnione są warunki twierdzenia 4, to stożek osiągalnych stanów zupełnych układu (15) nie zmienia się dla $N \ge 2n$. Jeżeli jest on równy przestrzeni $\Re_+^{2n}$, tj. są spełnione warunki twierdzenia 1, to dodatni układ (15) jest całkowicie osiągalny. Jeżeli natomiast nie on równy $\Re_+^{2n}$, to dodatni układ (15) nie jest całkowicie osiągalny, bowiem dalsze zwiększanie N nie powoduje zwiększenia stożka stanów osiągalnych. Możemy więc stwierdzić, że jeżeli dodatni układ (15) nie jest całkowicie osiągalny w $N = 2n$ krokach, to nie jest on całkowicie osiągalny w większej liczbie kroków, a więc nie jest całkowicie osiągalny. Stożek zupełnych stanów osiągalnych w pewnych przypadkach może być też niezmienniczy dla wartości N mniejszych od $2n$. Wynika to z tego, że warunek rząd $\widetilde{R}_N = 2n$ może być spełniony dla $N < 2n$ przy $m > 1$. W takiej sytuacji, przy spełnieniu warunków twierdzenia 1, układ (15) jest osiągalny w $N < 2n$ krokach. Ilustruje to podany poniżej przykład.

Na podstawie powyższych rozważań możemy więc stwierdzić, że wymieniona w twierdzeniu 1 liczba naturalna N może być mniejsza od $2n$ dla dodatnich układów (1) o liczbie wejść większej od 1.

Twierdzenie 5. Jeżeli dodatni układ (15), (16) jest osiągalny, to jest on osiągalny w N krokach, gdzie $N \ge \mathrm{E}[2n/q]$, przy czym $\mathrm{E}[2n/q]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią większą lub równą $2n/q$, gdzie q jest liczbą liniowo niezależnych monomialnych kolumn macierzy $\widetilde{B}$.

Dowód. Każda macierz $A^k\widetilde{B}$ ($k = 0,1,\ldots,N-1$), o postaci (18), macierzy osiągalności $\widetilde{R}_N$ może mieć maksymalnie q liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Oznacza to, że jeżeli dodatni układ (15) jest osiągalny, to $Nq = 2n$. ■

Twierdzenie 6. Układ dodatni (15) jest całkowicie osiągalny, jeżeli istnieje taka liczba naturalna N, że rząd macierzy $\widetilde{R}_N$ o postaci (13) jest równy $2n$ oraz

$$\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_N\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{Nm\times 2n}. \tag{19}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (19), to ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza układ (15) z zerowego zupełnego stanu początkowego do zadanego zupełnego stanu końcowego $\widetilde{x}_f \in \Re_+^{2n}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$u_0^N = \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_N\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1}\widetilde{x}_f, \tag{20}$$

gdzie wektor u_0^N ma postać podaną w (12).

Dowód. Jeżeli rząd $\widetilde{R}_N = 2n$, to macierz $\widetilde{R}_N\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}$ jest nieosobliwa. Jeżeli ponadto zachodzi (19), to wtedy $u_0^N \in \Re_+^{Nm}$ oraz $\widetilde{x}_N = \widetilde{R}_N u_0^N = R_N R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1}\widetilde{x}_f = \widetilde{x}_f$. ■

4. PRZYKŁAD

Wyznaczyć ciąg sterowań przeprowadzających dodatni układ z opóźnieniem, opisany równaniem stanu (15) o macierzach

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

z zerowego zupełnego stanu początkowego do zupełnego stanu końcowego

$$\widetilde{x}_f = \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad x_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dla rozpatrywanego układu macierze A i $\widetilde{B}$ mają postaci (16). Zatem

$$[A, \widetilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Macierz (22) ma $2n = 6$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Warunek wystarczający całkowitej nieosiągalności nie jest więc spełniony.

Macierz $\widetilde{B}$ ma dwie liniowo niezależne monomialne kolumny, zatem $q = 2$. Zgodnie z twierdzeniem 5 mamy więc $N \geq \mathrm{E}[2n/q] = \mathrm{E}[6/2] = 3$. Łatwo sprawdzić, że dla $N = 3$ macierz osiągalności (13) nie ma pełnego rzędu wierszowego. Wyznaczając tę macierz przy $N = 4$ otrzymamy

$$\widetilde{R}_N = \widetilde{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Macierz (23) zawiera $2n = 6$ liniowo niezależnych kolumn monomialnych, a więc rozpatrywany układ jest całkowicie osiągalny w $N = 4$ krokach.

Zgodnie z twierdzeniem 2, stożek zupełnych stanów osiągalnych rozpatrywanego układu jest stożkiem solidnym dla $N \geq 4$. Jest on niezniennic̨zy dla $N \geq 4$, bowiem współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\det(z^2 I - A_1) = z^6 - 0.1z^4,$$

są niedodatnie (twierdzenie 4).

Ponieważ macierz $\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} = \widetilde{R}_4^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_4 \widetilde{R}_4^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest macierzą nieujemną, poszukiwany ciąg sterowań można wyznaczyć ze wzoru (20), tj.

$$u_0^4 = \widetilde{R}_4^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_4 \widetilde{R}_4^{\mathrm{T}}]^{-1} \widetilde{x}_f = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0.5 & 1 & 4 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Wobec tego

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}, \; u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Uwzględniając ciąg sterowań (25) i wyznaczając rozwiązanie równania stanu (15) o macierzach (21) przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy odpowiednio

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Zatem zupełny stan końcowy ma więc postać $\widetilde{x}_f = [2\;3\;4\;1\;2\;2]^{\mathrm{T}}$. Potwierdza to, że ciąg sterowań (25) został wyznaczony poprawnie.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem zupełnej osiągalności dodatnich układów dyskretnych z jednostkowym opóźnieniem. W takim przypadku zadany stan końcowy jest stanem zupełnym. Wykazano, że dodatni układ (1) nie jest układem całkowicie osiągalnym w przypadku ogólnym. Może on być on układem całkowicie osiągalnym tylko wtedy, gdy

$A_0 = 0$ (dodatni układ z czystym opóźnieniem). Sformułowano kryteria całkowitej osiągalności oraz podano metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego rozpatrywany układ dodatni z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego.

Rozważania można uogólnić na klasę dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem różnym od jedności oraz z wieloma opóźnieniami.

***

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

Literatura

1. Benvenuti L., Farina L.: A tutorial on the positive realization problem. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, No. 5, 2004, pp. 651-664.
2. Busłowicz M.: Explicit solution of discrete-delay equations. Foundations of Control Engineering, vol. 7, No. 2, 1982, pp. 67-71.
3. Busłowicz M., Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 6-9, 2004, Kasadasi, Izmir, Turkey (CD-ROM).
4. Busłowicz M., Kaczorek T.: Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem, Mat. Krajowej Konf. Automatyzacji Procesów Dyskretnych, Zakopane 2004.
5. Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems: Theory and Applications. Wiley, New York 2000.
6. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London 2002.
7. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
8. Kaczorek T.: Some recent developments in positive Systems. Proc. 7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, pp. 25-35, Łódź 2003.
9. Kaczorek T., Busłowicz M.: Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem, Mat. Krajowej Konf. Automatyzacji Procesów Dyskretnych, Zakopane 2004.
10. Kaczorek T., Busłowicz M.: Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays - reachability, minimum energy control and realization problem, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 10, str. 12-15, 2004.
11. Xie G., Wang L.: Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.)), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003, pp. 377-384.