

Mgr inż. Andrzej Ruszewski  
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny  
Katedra Automatyki i Elektroniki

## D-STABILIZACJA UKŁADÓW REGULACJI Z OPÓŹNIENIEM

*W pracy rozpatrzono problem D-stabilności układu regulacji automatycznej z regulatorem PI i liniowym obiektem pierwszego rzędu z opóźnieniem. Układ liniowy jest D-stabilny, gdy wszystkie jego bieguny leżą w zadanym obszarze  $D$  na płaszczyźnie zespolonej. Podano komputerowe metody, które pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie obszaru D-stabilności rozpatrywanego układu na płaszczyznach parametrów regulatora i obiektu. Proponowane metody bazują na klasycznej metodzie podziału  $D$  przestrzeni współczynników quasi-wielomianów charakterystycznych.*

### D-STABILIZATION OF CONTROL SYSTEMS WITH TIME DELAY

*The paper analysis the D-stability problem of a first-order plant with time delay using the PI controller. We apply the D-decomposition method to determine the D-stability region in parameter space.*

#### 1. WSTĘP

W przemysłowych układach automatyki bardzo często model matematyczny jednowymiarowego obiektu przedstawia się w postaci układu pierwszego rzędu z opóźnieniem czasowym (np. [9]). Model ten jest wykorzystywany do doboru nastaw regulatorów typu PID lub PI.

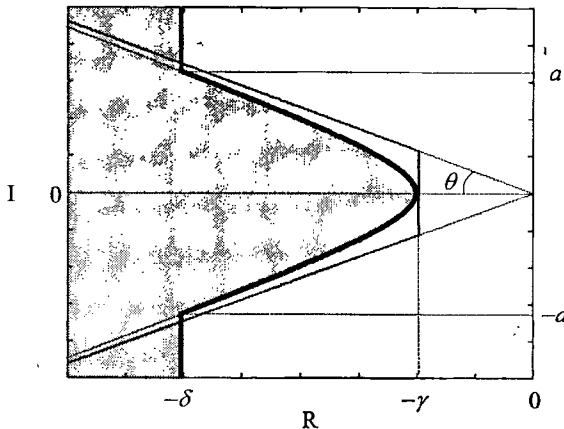
Układ liniowy stacjonarny jest  $D$ -stabilny, jeżeli wszystkie jego bieguny (zera wielomianu charakterystycznego) leżą w zadanym otwartym obszarze  $D$  na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Przypadkiem szczególnym  $D$ -stabilności jest stabilność asymptotyczna układów ciągłych ( $D$  jest otwartą lewą półpłaszczyzną). Problemowi asymptotycznej stabilności układu regulacji automatycznej złożonego z obiektu pierwszego rzędu z opóźnieniem i szeregowego regulatora typu PID czy PI jest poświęconych wiele prac (np. [3-8]), w których stosuje się różne metody (w tym analityczne i komputerowe) badania stabilności. W pracy [3] podano komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych regulatorów oraz obiektu. W pracy [10] rozpatrzono jeden z przypadków szczególnych  $D$ -stabilności, gdzie obszar  $D$  był przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną.

Położenie zer wielomianu charakterystycznego, a w przypadku układów z opóźnieniami zer quasi-wielomianu charakterystycznego, na płaszczyźnie zespolonej jest ściśle związane z jakością regulacji. Zera wielomianu charakterystycznego są funkcjami parametrów układu. Dlatego też wyznaczenie obszarów  $D$ -stabilności układu regulacji automa-

tycznej w przestrzeni parametrów regulatora i obiektu jest ważnym zagadnieniem ze względu na rozważania teoretyczne i zastosowania praktyczne.

W pracy zostanie przeanalizowany problem  $D$ -stabilności układów regulacji z opóźnieniem dla obszaru  $D$  przedstawionego na rysunku 1, brzeg obszaru zaznaczono linią ciągłą pogrubioną. Prezentowana na rysunku hiperbola jest stosowana do aproksymacji brzegu obszaru, jakim jest odcięty sektor (linia ciągła) [1]. Ze względu na specyfikę rozkładu zer quasi-wielomianu, brzeg rozpatrywanego obszaru  $D$  dla  $\text{Re } s < -\delta$ ,  $\delta > 0$  i  $\text{Im } s > |a|$  przyjęto w postaci linii prostej równoległej do osi urojonej. Rozpatrywane w pracy układy regulacji automatycznej są układami typu opóźnionego [2], których quasi-wielomian charakterystyczny ma nieskończenie wiele zer w przypadku ogólnym. Części rzeczywiste zer asymptotycznych (zer o dużych wartościach bezwzględnych) dążą do minus nieskończoności przy  $|s| \rightarrow \infty$ , tzn. przy wartościach bezwzględnych tych zer dążących do nieskończoności. Z tego względu nie istnieje kąt  $\theta < \pi/2$ , dla którego wszystkie zera quasi-wielomianu znajdowałyby się w otwartym sektorze hiperbolicznym.

W pracy zostaną podane komputerowe metody, które pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie obszaru  $D$ -stabilności rozpatrywanego układu na płaszczyźnie parametrów regulatora PI i obiektu pierwszego rzędu z opóźnieniem. Wykorzystana zostanie klasyczna metoda podziału  $D$  [2] oraz podejście zastosowane w pracach [3, 10].



Rys. 1. Rozpatrywany obszar  $D$

## 2. UKŁAD REGULACJI Z OBIEKTEM INERCYJNYM Z OPÓŹNIENIEM

Otrzymane w wyniku doświadczeń charakterystyki skokowe obiektów przemysłowych stosuje się do wyznaczenia modelu w postaci transmitancji operatorowej. Bardzo często model ten przedstawia się jako człon inercyjny pierwszego rzędu z opóźnieniem czasowym. Transmitancja zastępcza obiektu ma postać

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{1+sT}, \quad h \geq 0, \quad K > 0, \quad (1)$$

gdzie  $K$ ,  $T$ ,  $h$  są zastępczymi parametrami obiektu.

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 2, w którym obiekt (1) jest sterowany regulatorem typu PI o transmitancji

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (2)$$

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego quasi-wielomian charakterystyczny

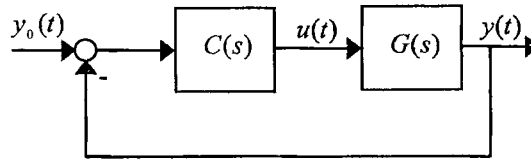
$$w(s, \exp(-sh)) = (k_p s + k_i)K \exp(-sh) + s(1+sT) \quad (3)$$

jest asymptotycznie stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.

Mnożąc quasi-wielomian (3) przez  $\exp(sh)$  otrzymamy nowy quasi-wielomian o postaci

$$w(s, \exp(sh)) = (k_p s + k_i)K + s(1+sT) \exp(sh), \quad (4)$$

który ma te same zera co quasi-wielomian (3).



Rys. 2. Układ regulacji automatycznej.

Quasi-wielomian jest  $D$ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego zera leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w zadanym obszarze  $D$ . Zera dominujące quasi-wielomianu leżące w pobliżu osi urojonej mają zasadniczy wpływ na proces przejściowy i kryteria jakości z nim związane. Z tego powodu będziemy poszukiwać obszarów  $D$ -stabilności w przestrzeni parametrów regulatora i obiektu, dla których zera dominujące quasi-wielomianu (4) leżą w obszarze ograniczonym hiperbolą o opisie parametrycznym

$$s = -\gamma(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (5)$$

Stosując w quasi-wielomianie (4) podstawienie  $z = sh$  po przekształceniach otrzymamy quasi-wielomian

$$w(z, \exp(z)) = zX + Y + (pz^2 + z) \exp(z), \quad (6)$$

gdzie  $X = Kk_p$ ,  $Y = Kk_i h$ ,  $p = T/h$ .

W dalszych rozważaniach przyjmiemy unormowany względem  $h$  opis hiperboli (5), o postaci

$$z = -\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (7)$$

gdzie  $\tilde{\gamma} = \gamma h$ .

Problem asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (6) analizowany był w pracy [3].  $D$ -stabilność quasi-wielomianu (6) w przypadku, gdy obszar  $D$  był przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną rozpatrzono w pracy [10].

Stosując metodę podziału  $D$  płaszczyznę  $(X, Y)$  dzielimy granicami  $D$ -podziału na skończoną liczbę obszarów  $D(k)$ . Dowolny punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom  $X$  i  $Y$ , dla których quasi-wielomian (6) ma dokładnie  $k$  zer poza obszarem ograniczonym hiperbolą (7), czyli quasi-wielomian (4) ma dokładnie  $k$  zer poza obszarem ograniczonym hiperbolą (5). Obszar  $D(0)$  o ile istnieje, jest obszarem, dla którego quasi-wielomianu (6) nie ma zer poza rozpatrywanym obszarem. Granice podziału  $D$  dzielimy na granice zer rzeczywistych oraz granice zer zespolonych. Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (6), który ma zero  $z = -\tilde{\gamma}$ . Na płaszczyźnie  $(X, Y)$  granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (6) jest linia o opisie parametrycznym

$$Y = -\tilde{\gamma}(-X + p\tilde{\gamma} \exp(-\tilde{\gamma}) - \exp(-\tilde{\gamma})). \quad (8)$$

Granica zer zespolonych odpowiada takim wartościom  $X$  i  $Y$ , dla których quasi-wielomian (6) ma zera zespolone sprzężone na brzegu obszaru. Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem  $X$  i  $Y$  równanie

$$w(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega), \exp(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega))) = 0. \quad (9)$$

Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (6) przy  $z = -\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega)$ . Równanie zespolone (9) można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych

$$\operatorname{Re}(w(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega), \exp(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega)))) = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{Im}(w(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega), \exp(-\tilde{\gamma}(\cosh \omega - j \tan \theta \sinh \omega)))) = 0. \quad (10a)$$

Rozwiązując równania (10) i (10a) względem  $X$  i  $Y$  odpowiednio otrzymamy

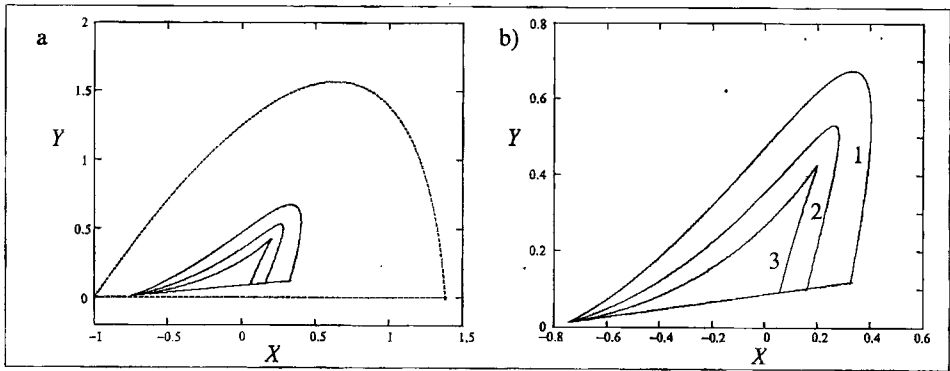
$$X = \left( \left( (-\gamma p + \exp(\omega) + \exp(3\omega) - \gamma p \exp(4\omega)) \frac{\cot(\theta)}{\exp(2\omega) - 1} + \frac{\gamma p \tan(\theta)(1 - \exp(2\omega))}{2(\cos(\theta)^2 - 1)} \right) \sin(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) + \right. \\ \left. + (\gamma p - \exp(\omega) + \gamma p \exp(2\omega)) \cos(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) \right) \exp\left(-\omega - \frac{1}{2} \gamma \exp(\omega) - \frac{1}{2} \gamma \exp(-\omega)\right), \quad (11)$$

$$Y = \left( \left( \frac{(2\gamma \exp(3\omega) - \gamma^2 p(\exp(2\omega) + \exp(4\omega))) \cot(\theta)}{\exp(2\omega) - 1} + \frac{\gamma(2 \exp(3\omega) - 2 \exp(\omega) - \gamma p \exp(4\omega) + \gamma p)}{4 \sin(\theta) \cos(\theta)} \right) \sin(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\gamma^2 p(\exp(4\omega) - 2 \exp(2\omega) + 1)}{4 \cos(\theta)^2} + \gamma^2 p \exp(2\omega) \right) \cos(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) \right) \exp\left(-2\omega - \frac{1}{2} \gamma \exp(\omega) - \frac{1}{2} \gamma \exp(-\omega)\right). \quad (11a)$$

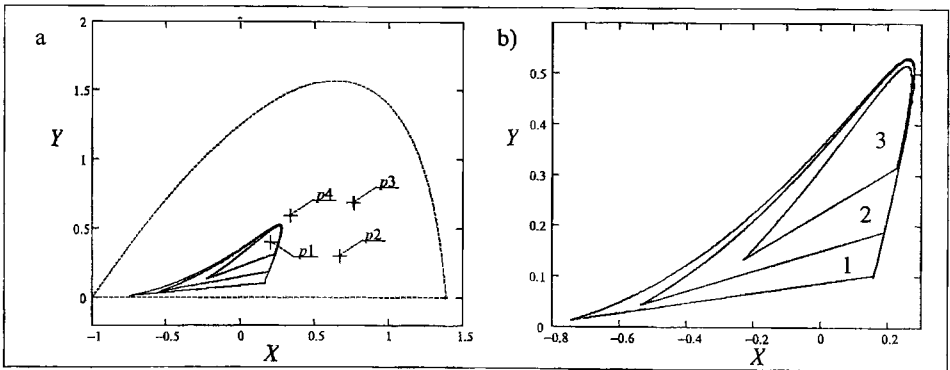
Linia krzywa o opisie (11), (11a) wyznaczona przy zadanych wartościach  $p$ ,  $\theta$  i  $\tilde{\gamma} = \gamma h$ , w funkcji parametru  $\omega \in \Omega$ , określa na płaszczyźnie  $(X, Y)$  granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (6). Obszar, w którym quasi-wielomian (6) nie ma zer

poza obszarem ograniczonym hiperbolą (7) ( $D(0)$ ) leży pomiędzy granicą zer zespolonych i granicą zer rzeczywistych.

Obszary  $D$ -stabilności (obszar  $D$  jak na rys. 1) oraz asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (6) (rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z obiektem (1) i regulatorem PI) są pokazane na rysunkach 3 i 4. Rysunek 3 przedstawia obszary  $D$ -stabilności wyznaczone dla kilku wartości parametru  $\theta$  przy określonych wartościach  $p$  i  $\tilde{\gamma}$ . Na rysunku 3a linią przerywaną zaznaczono granice zer rzeczywistych ( $Y = 0$ ) i zer zespolonych stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (6). Rysunek 3b przedstawia obszary położone wewnątrz obszaru asymptotycznej stabilności. Widzimy, że zmniejszanie wartości  $\theta$  przy zadanych  $p$  i  $\tilde{\gamma}$  powoduje mniejszy zakres  $X, Y$  (tj.  $k_p, k_i$ ). Na rysunku 4 przedstawiono obszary  $D$ -stabilności wyznaczone dla kilku wartości parametru  $\tilde{\gamma}$  przy określonych wartościach  $p$  i  $\theta$ . Z rysunku wynika, że wzrost  $\tilde{\gamma}$  powoduje mniejszy zakres  $X, Y$ .



Rys. 3. Obszary  $D$ -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla  $p = T/h = 0.4$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.1$  oraz  $\theta = \pi/3$  - obszar 1,  $\theta = \pi/4$  - obszar 2,  $\theta = \pi/9$  - obszar 3

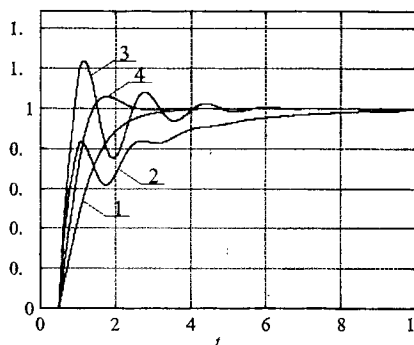


Rys. 4. Obszary  $D$ -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla  $p = T/h = 0.4$ ,  $\theta = \pi/4$  oraz  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.1$  - obszar 1,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.2$  - obszar 2,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.4$  - obszar 3

### Przykład 1. [7]

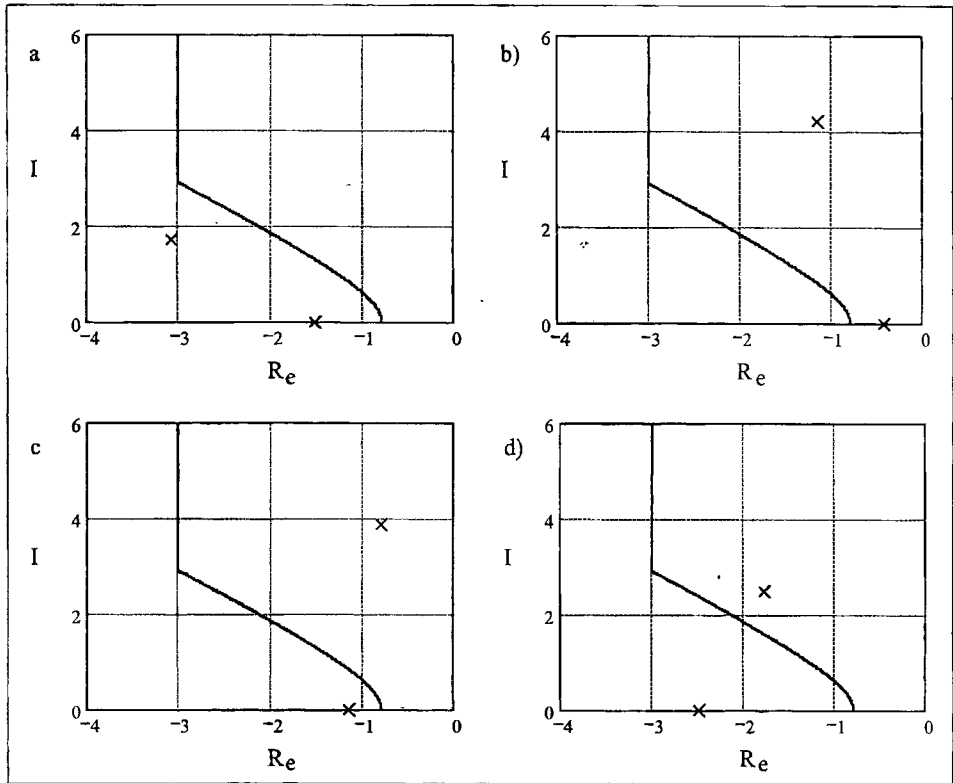
Rozpatrzmy układ automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym. Schemat blokowy tego układu jest pokazany rysunku 2, gdzie  $y(t)$  jest temperaturą wody chłodzącej reaktor, dopływającej do wytwornicy pary wodnej,  $y_0(t)$  jest zadaną temperaturą wody chłodzącej, zaś  $u(t)$  jest sygnałem sterującym położeniem prętów grafitowych w reaktorze. Zastępcza transmitancja operatorowa reaktora nuklearnego ma postać (1), przy czym  $K=1$ ,  $h=0.5$ ,  $T=0.2$ .

W rozpatrywanym układzie  $p = T/h = 0.4$ . Obszary  $D$ -stabilności są pokazane na rysunkach 3 i 4. Zakładając określone wartości parametrów  $\theta$  i  $\tilde{\gamma}$  np.  $\theta = \pi/4$  i  $\tilde{\gamma} = 0.4$  (obszar 3 na rys. 4b) wybieramy dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru, np. o współrzędnych  $X=0.2$ ,  $Y=0.4$ . Otrzymamy  $Kk_p=0.2$ ,  $Kk_i h=0.4$ . Obliczając z powyższych zależności wartości parametrów regulatora PI, otrzymamy  $k_p=0.2$ ,  $k_i=0.8$ , dla których quasi-wielomian (6) ma zera leżące w zadanym obszarze  $D$ . Odpowiedź skokowa dla obliczonych nastaw regulatora jest pokazana na rysunku 5 – krzywa 1. Na rysunku tym krzywa 2 przedstawia odpowiedź układu dla parametrów wyznaczonych metodą Zieglera-Nicholsa, krzywa 3 odpowiedź układu dla nastaw otrzymanych z minimalizacji wskaźnika całkowitego  $J_2$  [7], zaś krzywa 4 odpowiedź układu dla nastaw obliczonych według kryterium optymalnego modułu w sposób opisany w [5]. Na rysunku 4a oznaczono punkty odpowiadające wyznaczonym nastawom.



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe układu regulacji z przykładu 1: krzywa 1 -  $k_p=0.2$ ,  $k_i=0.8$ ; krzywa 2 -  $k_p=0.66$ ,  $k_i=0.6$ ; krzywa 3 -  $k_p=0.76$ ,  $k_i=1.38$ , krzywa 4 -  $k_p=0.33$ ,  $k_i=1.19$

Brzeg obszaru  $D$  oraz dominujące zera quasi-wielomianu (4) dla czterech rozważanych powyżej przypadków są pokazane na rysunku 6. Granica zer zespolonych dla  $\theta = \pi/4$  i  $\tilde{\gamma} = 0.4$  została wyznaczona dla  $\omega \in \Omega \in (0, 1.996)$  (obszar 3 na rys. 4). Na rysunku 6 pokazano zera rzeczywiste i zera o dodatniej części urojonej. Zera o ujemnej części urojonej leżą symetrycznie względem osi rzeczywistej. Zera zostały wyznaczone numerycznie metodą iteracyjną. Z rysunku 6 wynika, że tylko w pierwszym przypadku zera quasi-wielomianu (3) całkowicie leżą w zadanym obszarze  $D$ .



Rys. 6. Brzeg obszaru  $D$  oraz zera dominujące quasi-wielomianu (3): a)  $k_p=0.2, k_i=0.8$ ; b)  $k_p=0.66, k_i=0.6$ ; c)  $k_p=0.76, k_i=1.38$ ; d)  $k_p=0.33, k_i=1.19$

### 3. UKŁAD REGULACJI Z OBIETEM CAŁKUJĄCYM Z OPÓŹNIENIEM

Wyznaczoną doświadczalnie charakterystykę obiektu astatycznego aproksymuje się za pomocą członu całkującego z opóźnieniem. Transmitancja zastępcza obiektu ma postać

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{s}, \quad h \geq 0, \quad K > 0. \quad (12)$$

Quasi-wielomian charakterystyczny układu regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 1, złożony z liniowego obiektu o transmitancji operatorowej (12) i szeregowego regulatora typu PI o transmitancji operatorowej (2) ma postać

$$w(s, \exp(-sh)) = (k_p s + k_i)K \exp(-sh) + s^2. \quad (13)$$

Mnożąc quasi-wielomian (12) przez  $\exp(sh)$  otrzymamy quasi-wielomian o postaci

$$w(s, \exp(sh)) = (k_p s + k_i)K + s^2 \exp(sh). \quad (14)$$

Stosując w quasi-wielomianie (14) podstawienie  $z = sh$  po przekształceniach otrzymamy quasi-wielomian

$$w(z, \exp(z)) = a_0 + za_1 + z^2 \exp(z), \quad (15)$$

gdzie  $a_1 = Kk_p h$ ,  $a_0 = Kk_i h^2$ .

Na płaszczyźnie  $(a_1, a_0)$  granicą zer rzeczywistych jest linia o opisie parametrycznym

$$a_0 = \tilde{\gamma} a_1 - \tilde{\gamma}^2 \exp(-\tilde{\gamma}). \quad (16)$$

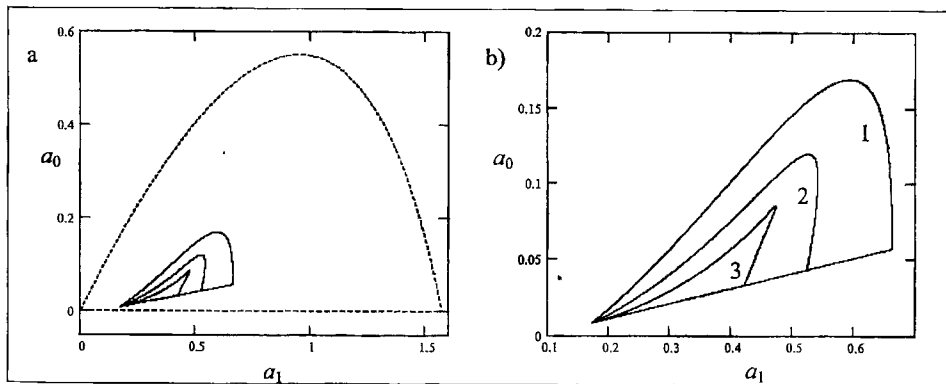
Natomiast granica zer zespolonych quasi-wielomianu (15) ma opis parametryczny

$$a_1 = -\frac{1}{2} \gamma \left( \frac{2 \exp(2\omega) - 1 + 2 \cos(\theta)^2 - \exp(4\omega) + 2 \exp(4\omega) \cos(\theta)^2}{\cos(\theta) \sin(\theta) (\exp(2\omega) - 1)} \sin(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) + \right. \\ \left. - (2 \exp(2\omega) + 2) \cos(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) \exp\left(\frac{-1}{2} \gamma \exp(\omega) - \frac{1}{2} \gamma \exp(-\omega) - \omega\right) \right), \quad (17)$$

$$a_0 = -\frac{1}{4} \gamma^2 \left( \frac{1 - \exp(2\omega) + 4 \cos(\theta)^2 \exp(2\omega) - \exp(4\omega) + 4 \cos(\theta)^2 \exp(4\omega) + \exp(6\omega)}{\sin(\theta) \cos(\theta) (\exp(2\omega) - 1)} \sin(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) + \right. \\ \left. - \frac{1 + \exp(4\omega) - 2 \exp(2\omega) + 4 \cos(\theta)^2 \exp(2\omega)}{\cos(\theta)^2} \cos(\gamma \tan(\theta) \sinh(\omega)) \right) \exp\left(\frac{-1}{2} \gamma \exp(\omega) - \frac{1}{2} \gamma \exp(-\omega) - 2\omega\right). \quad (17a)$$

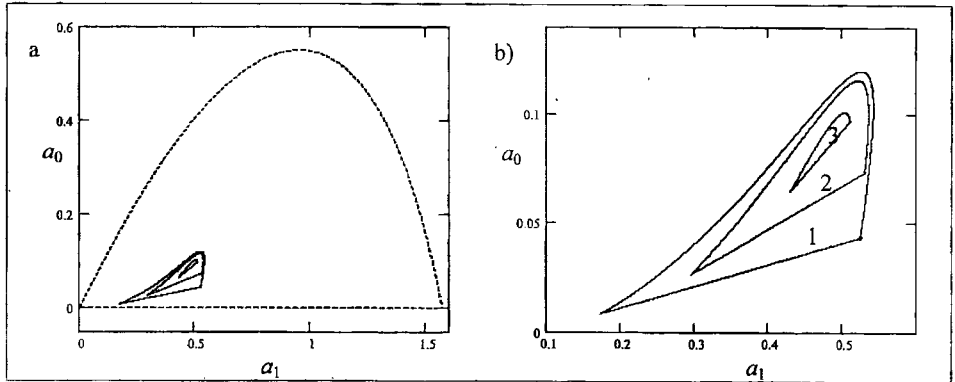
Granica zer rzeczywistych (16) oraz granica zer zespolonych o opisie parametrycznym (17), którą wyznacza się w funkcji parametru  $\omega$ , określają na płaszczyźnie  $(a_1, a_0)$  przy zadanym  $\tilde{\gamma} = \gamma h$  i  $\theta$  obszar  $D$ -stabilności quasi-wielomianu (15) (rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z obiektem (12) i regulatorem typu PI).

Obszary  $D$ -stabilności oraz asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (15) są pokazane na rysunkach 7 i 8. Rysunek 7 przedstawia obszary  $D$ -stabilności wyznaczone dla kilku wartości parametru  $\theta$  przy określonym  $\tilde{\gamma}$ . Linia przerywana zaznacza granice zer rzeczywistych i zer zespolonych stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (15). Na rysunku 8 pokazano obszary  $D$ -stabilności wyznaczone dla kilku wartości parametru  $\tilde{\gamma}$  przy ustalonym  $\theta$ .



Rys. 7. Obszary  $D$ -stabilności quasi-wielomianu (15) wyznaczone dla  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.1$  oraz  $\theta = \pi/3$  - obszar 1,  $\theta = \pi/4$  - obszar 2,  $\theta = \pi/9$  - obszar 3





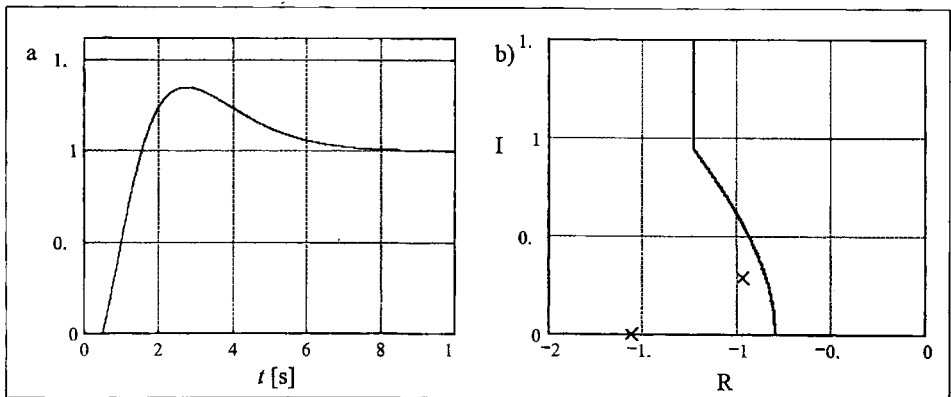
Rys. 8. Obszary  $D$ -stabilności quasi-wielomianu (15) wyznaczone dla  $\theta = \pi/4$  oraz  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.1$  - obszar 1,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.2$  - obszar 2,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.4$  - obszar 3

**Przykład 2.**

Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PI, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z obiektem (12), przy  $K=1, h=0.5$ , jest  $D$ -stabilny dla określonych  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.4$  i  $\theta = \pi/4$ .

Obszar  $D$ -stabilności rozpatrywanego układu przy zadanych  $\tilde{\gamma}$  i  $\theta$  jest pokazany na rysunku 8b (obszar 3). Dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru określa parametry regulatora PI zapewniające  $D$ -stabilność. Przyjmijmy np.  $a_1 = Kk_p h = 0.5k_p = 0.46$ , wtedy  $k_p = 0.92$ . Z rys. 8b, przy  $a_1 = 0.46$  wynika, że  $0.0767 < a_0 < 0.0829$ , przy czym wartości te zostały odczytane z ekranu monitora z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Ponieważ  $a_0 = Kk_i h^2 = 0.25k_i$ , rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest  $D$ -stabilny dla dowolnego  $k_i \in (0.307, 0.332)$ , przy  $k_p = 0.92$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma h = 0.4$  i  $\theta = \pi/4$ .

Odpowiedź skokowa układu regulacji dla  $k_p = 0.92$ ,  $k_i = 0.32$  jest pokazana na rysunku 9a. Brzeg obszaru  $D$ , opisany wzorem (5) przy  $\omega \in (0, 0.995)$ , oraz zera quasi-wielomianu (13), leżące w pobliżu osi urojonej, są pokazane na rysunku 9b.



Rys. 9. Układ regulacji z przykładu 2: a) odpowiedź skokowa układu dla  $k_p = 0.92$ ,  $k_i = 0.32$ ; b) brzeg obszaru  $D$  oraz zera dominujące quasi-wielomianu (13)

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi  $D$ -stabilizacji za pomocą regulatora PI dynamicznych układów liniowych stacjonarnych pierwszego rzędu z opóźnieniem. Wykorzystując metodę podziału  $D$  podano komputerową metodę wyznaczania obszarów  $D$ -stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanego regulatora oraz obiektu. Na bazie proponowanej metody można opracować programy komputerowe do wyznaczania wartości parametrów regulatora PI  $D$ -stabilizującego rozpatrywane obiekty z opóźnieniem. Do wyznaczenia obszarów  $D$ -stabilności rozpatrywanych układów regulacji automatycznej wykorzystano programy komputerowe opracowane w środowisku systemu MATLAB i MATHCAD. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi. Proponowane w niniejszej pracy podejście może być uogólnione na modele wyższych rzędów obiektów regulacji.

Pracę wykonano w ramach pracy własnej finansowanej przez Komitet Badań Naukowych.

#### LITERATURA

1. Busłowicz M., Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Seria Rozprawy Naukowe Nr. 48, Białystok, 1997.
2. Busłowicz M., *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*. Seria: Mon. Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom 1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, 2000.
3. Busłowicz M., Ruszewski A., *Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem*. Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, str. 89-94, Zielona Góra, 2002.
4. Datta A., Ho M.-T., Bhattacharyya S. P., *Structure and Synthesis of PID Controllers*. Springer-Verlag, London, 2000.
5. Górecki H., *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. WNT, Warszawa, 1971.
6. Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A., *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. PWN-J. Wiley, Warszawa Chichester, 1989.
7. Górecki H., Korytkowski A., *Advances in Optimization and Stability Analysis of Dynamical Systems*. Wydawnictwo AGH, Kraków, 1993.
8. Guillermo J. S., Datta A., Bhattacharyya S. P., PI stabilization of first-order systems with time delay. *Automatica*, 2001, Vol. 37, pp. 2025-2031.
9. Niederliński A., *Systemy komputerowe automatyki przemysłowej*. T. 2. WNT, Warszawa 1985.
10. Ruszewski A., *Stabilność układu regulacji automatycznej z regulatorami PI i liniowymi obiektami pierwszego rzędu z opóźnieniem*. Mat. V Ogólnopolskich Warsztatów Doktoranckich, s. 320-325, Istebna 2003.