prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
Bialystok Technical University, Faculty of Electrical Engineering
ul. Wiejska 45D, 15-351, Białystok

WYBRANE ZAGADNIENIA DODATNICH UKŁADÓW Z OPÓŹNIENIAMI

Streszczenie: *Przedstawiono aktualny stan badań dotyczących stabilności asymptotycznej, osiągalności, sterowania z minimalną energią oraz wyznaczania dodatnich realizacji układów dyskretnych i ciągłych z opóźnieniami. Poza znanymi wcześniej publikowanymi, praca zawiera nowe wyniki niepublikowane oraz niektóre aktualne problemy otwarte w obszarze dodatnich liniowych układów z opóźnieniami.*

Abstract. *An overview of selected problems concerning the asymptotic stability, reachability, minimal energy control and computation of positive realizations of discrete-time and continuous-time systems with delays is presented. Some new results on positive realizations of linear systems with delays, extensions and open problems are also presented.*

1. WPROWADZENIE

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanu oraz odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykładami układów dodatnich są procesy przemysłowe zawierające reaktory chemiczne, wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne itp. Układy dodatnie są określone na stożkach, a nie w przestrzeniach liniowych. Teoria takich układów jest, więc znacznie trudniejsza. Literatura dotycząca układów dodatnich jest już dość bogata [11, 13, 14]. Badania układów z opóźnieniami mają kilkunastoletnią historię i były przedmiotem wielu prac [12]. W ostatnich latach obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania badaniami dodatnich układów z opóźnieniami. Wynika to z zastosowania tych układów w różnych dziedzinach techniki, ekonomii, biologii, medycyny itp. Stabilność asymptotyczna i odporna (krzepka) dodatnich układów liniowych dyskretnych z opóźnieniami była badana w pracach [7, 8, 10, 17, 27]. Problemom osiągalności, sterowalności i sterowania z minimalną energią są poświęcone prace [5, 6, 9, 25, 26, 31]. Różne metody wyznaczania dodatnich realizacji układów dyskretnych i ciągłych zostały zaproponowane w pracach [15, 16, 18- 24, 26]. W pracy tej zostanie przedstawiony aktualny stan badań w wybranych obszarach teorii dodatnich liniowych układów z opóźnieniami, a w szczególności dotyczących:

- Stabilności asymptotycznej i odpornej układów dyskretnych z opóźnieniami
- Osiągalność i sterowanie z minimalną energią tych układów

- Problem wyznaczania dodatnich realizacji ciągłych układów z opóźnieniami oraz singularnych układów dyskretnych z opóźnieniami w wektorze stanu i w wymuszeniach.

Poza znanymi, wcześniej publikowanymi wynikami praca ta zawiera również nowe wyniki dotychczas niepublikowane.
Zostaną też przedstawione niektóre aktualne problemy otwarte czekające na rozwiązanie.

2. DODATNIE UKŁADY DYSKRETNE

2.1 Układy bez opóźnień

Niech $\mathbb{R}_+^{n\times m}$ będzie zbiorem $n\times m$ macierzy rzeczywistych z nieujemnymi elementami, oraz $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+^{n\times 1}$.
Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$\overline{x}_{i+1} = \mathbf{A}\overline{x}_i + \mathbf{B}u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,...\} \tag{2.1a}$$

$$y_i = \mathbf{C}\overline{x}_i + \mathbf{D}u_i \tag{2.1b}$$

przy czym $\overline{x}_i\in\mathbb{R}^{\overline{n}}$, $u_i\in\mathbb{R}^m$ i $y_i\in\mathbb{R}^p$ są wektorami stamu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej $i\in\mathbb{Z}_+$ a $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}$,$\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{\overline{n}\times m}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{p\times\overline{n}}$, $\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

Definicja 2.1. *Układ nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0\in\mathbb{R}_+^{\overline{n}}$ oraz dodatniego ciągu $u_i\in\mathbb{R}_+^m$, $i\in\mathbb{Z}_+$ zachodzi $\overline{x}_i\in\mathbb{R}_+^{\overline{n}}$* i *$y_i\in\mathbb{R}_+^p$ dla wszystkich $i\in\mathbb{Z}_+$.*

Twierdzenie 2.1. [10, 11] Układ *(1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathbf{A}\in\mathbb{R}_+^{\overline{n}\times\overline{n}}, \quad \mathbf{B}\in\mathbb{R}_+^{\overline{n}\times m}, \quad \mathbf{C}\in\mathbb{R}_+^{p\times\overline{n}}, \quad \mathbf{B}\in\mathbb{R}_+^{p\times m} . \tag{2.2}$$

2.2 Układy z opóźnieniami

Weźmy teraz pod uwagę układ dyskretny z q opóźnieniami opisany równaniami

$$x_{i+1} = \mathbf{A}_0 x_i + \mathbf{A}_1 x_{i-1} + \ldots + \mathbf{A}_q x_{i-q} + \mathbf{B}_0 u_i \tag{2.3a}$$

$$y_i = \mathbf{C}_0 x_i + \mathbf{D}u_i \tag{2.3b}$$

przy czym $x_i\in\mathbb{R}^n$, $u_i\in\mathbb{R}^m$, $y_i\in\mathbb{R}^p$ są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi a $\mathbf{A}_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $k = 0,1,\ldots,q$, $\mathbf{B}_0\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C}_0\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

Warunki początkowe dla (3a) dane są w postaci

$$x_{-k} \in \mathbb{R}^n \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,q \tag{2.4}$$

Definiując

$$\overline{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_{i-q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\overline{n}}, \quad \overline{n} = (q+1)n, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots & \dots & \mathbf{A}_q \\ \mathbf{I}_n & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\overline{n}\times\overline{n}},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\overline{n}\times m}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times\overline{n}} \tag{2.5}$$

możemy równania (3) zapisać w postaci (1).

Definicja 2.2. *Układ (3) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $x_k \in \mathbb{R}_+^n$ $k = 0,1,\dots,q$ *i dodatniego ciągu wymuszeń* $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i \in \mathbb{Z}_+$ *zachodzi* $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ *oraz* $y_i \in \mathbb{R}_+^p$ *dla wszystkich* $i \in \mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie 2.2. *Układ (3) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad k = 0,1,\dots,q, \quad \mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, \quad \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m}. \tag{2.6}$$

3. STABILNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNYCH

Układ dodatni (2.1) nazywamy stabilnym asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie $\overline{x}_i = \mathbf{A}^i \overline{x}_0$, $i \in \mathbb{Z}_+$ równania

$$\overline{x}_{i+1} = \mathbf{A}\overline{x}_i, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{\overline{n}\times\overline{n}} \tag{3.1}$$

z warunkiem początkowym $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}_+^{\overline{n}}$ spełnia warunek

$$\lim_{i\to\infty} \overline{x}_i = 0 \quad \text{dla każdego } \overline{x}_0 \in \mathbb{R}_+^{\overline{n}} \tag{3.2}$$

Jak wiadomo [11, 13] układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $z_1, z_2, \dots, z_{\overline{n}}$ macierzy $\mathbf{A}$ (pierwiastków równania $\det[\mathbf{I}_{\overline{n}} z - \mathbf{A}] = 0$) mają moduły mniejsze od 1, czyli

$$|z_k| < 1 \quad \text{dla } k = 1,2,\dots,\overline{n} \tag{3.3}$$

Twierdzenie 3.1. [11, 13] *Układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki wielomianu charakterystycznego*

$$\det\left[\mathbf{I}_{\overline{n}} z - \mathbf{A}\right] = z^{\overline{n}} + \overline{a}_{\overline{n}-1} z^{\overline{n}-1} + \dots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0 \tag{3.4}$$

są dodatnie $\overline{a}_i > 0$ *dla* $i = 0,1,\dots,\overline{n}-1$.

Twierdzenie 3.2. [11, 13] *Układ dodatni (2.1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy* $\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a}_{ij}] = \mathbf{I}_{\overline{n}} - \mathbf{A}$ *są dodatni czyli*

$$|\bar{a}_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det \bar{\mathbf{A}} > 0 \tag{3.5}$$

Korzystając z (2.5) oraz działań elementarnych na wierszach i kolumnach (które nie zmieniają wartości wyznacznika) otrzymamy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.3 *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki równania*

$$\det\left[\mathbf{I}_n z^{q+1} - \mathbf{A}_0 z^q - \ldots - \mathbf{A}_{q-1} z - \mathbf{A}_q\right] = z^{\bar{n}} + \bar{a}_{\bar{n}-1} z^{\bar{n}-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = 0 \tag{3.6}$$

mają moduły mniejsze od 1.

Twierdzenie 3.4. *Układ dodatni opisany równaniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego*

$$\begin{aligned} &\det \mathbf{I}_n (z+1)^{q+1} - \mathbf{A}_0 (z+1)^q - \mathbf{A}_1 (z+1)^{q-1} + \ldots + \mathbf{A}_{q-1}(z+1) - \mathbf{A}_q = \\ &= z^{\bar{n}} + \bar{a}_{\bar{n}-1} z^{\bar{n}-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

są dodatnie $\bar{a}_i > 0$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, \bar{n} - 1$.

Stosując twierdzenie 2 do układu z opóźnieniami (2.3) w postaci (2.1) otrzymamy natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5. *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy*

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_{\bar{n}} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & \ldots & -\mathbf{A}_{q-1} & -\mathbf{A}_q \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

są dodatnie.

Wykażemy, że niestabilność układu dodatniego bez opóźnień

$$x_{i+1} = \mathbf{A}_0 x_i, \quad \mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \tag{1.10}$$

Implikuje niestabilność układu dodatniego z opóźnieniami.

Twierdzenie 3.6. *Układ dodatni z opóźnieniami (2.3) jest niestabilny jeżeli układ dodatni bez opóźnień (10) jest niestabilny.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 2 układ dodatni (10) jest niestabilny jeżeli przynajmniej jeden minor główny macierzy $\bar{\mathbf{A}}_0 = [\bar{a}^0_{ij}] = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_0$ nie jest dodatni. Układ dodatni (2.3) jest więc niestabilny jeżeli przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy

$$\mathbf{I}_{\bar{n}} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & \dots & -\mathbf{A}_{q-1} & -\mathbf{A}_q \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

nie jest dodatni. Z zależności (11) wynika, że jeżeli przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_0$ nie jest dodatni wtedy przynajmniej jeden z minorów głównych macierzy (11) nie jest również dodatni. Niestabilność układu (10) implikuje więc niestabilność układu (11).

■

Z twierdzenia 6 wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.1. Jeżeli układ (10) jest niestabilny, wtedy nie można ustabilizować układu dodatniego (2.3) poprzez odpowiedni dobór macierzy $\mathbf{A}_k$, $k = 1,\dots,q$.

Twierdzenie 3.7. *Układ dodatni (2.3) nie jest stabilny jeżeli przynajmniej jeden element na diagonali macierzy* $\mathbf{A}_0=[a_{ij}^0]$ *jest większy od 1, czyli*

$$a_{kk}^0 > 1 \quad \text{dla pewnego } k \in (1,2,\dots,n) \tag{3.12}$$

Dowód. Jak wiadomo [6, 11, 13] układ dodatni (10) jest niestabilny jeżeli przynajmniej dla jednego $k \in (1,2,\dots,n)$ zachodzi (12). W tym przypadku zgodnie z twierdzeniem 6 układ (2.3) jest również niestabilny.

■

Stabilności odpornej układów z opóźnieniami są poświęcone prace [7, 8, 27].

4. OSIĄGALNOŚĆ I STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ

4.1. Osiągalność

Rozwiązanie równania (2.1) dla zerowych warunków początkowych ma postać

$$x_i = \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{\Phi}(i-1-r)\mathbf{B}u_r \tag{4.1}$$

przy czym

$$\mathbf{\Phi}(i) = Z^{-1}\left\{\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \sum_{k=1}^{q} \mathbf{A}_k z^{-k}\right)^{-1} z\right\} \tag{4.2}$$

jest macierzą tranzycji, a Z^{-1} jest operatorem odwrotnego przekształcenia zet [3].

Macierz tranzycji spełnia równanie

$$\boldsymbol{\Phi}(i+1)=\mathbf{A}_0\boldsymbol{\Phi}(i)+\mathbf{A}_1\boldsymbol{\Phi}(i-1)+\ldots+\mathbf{A}_h\boldsymbol{\Phi}(i-h) \tag{4.3}$$

z warunkiem początkowym

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathbf{I}_n,\quad \boldsymbol{\Phi}(i)=0 \text{ dla } i<0 \tag{4.4}$$

Definicja 4.1. *Układ dodatni (2.1) nazywamy:*

i. *Osiągalnym w N krokach jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0,1,\ldots,N\text{-}1$, który przeprowadza układ ten z zerowego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego $x_N = x_f$.*
ii. *Osiągalnym, jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ oraz zerowego stanu początkowego istnieje $N \in \mathbb{Z}_+$ oraz $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0,\ldots,N\text{-}1$ takie, że $x_N = x_f$.*

Z zależności (1) dla i = N > 0 oraz zerowych warunków początkowych mamy

$$x_N = \mathbf{R}_N u_0^N \tag{4.5}$$

przy czym

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(N-1)\mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi}(N-2)\mathbf{B} & \ldots & \boldsymbol{\Phi}(1)\mathbf{B} & \mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Twierdzenie 4.1. *Zbiór stanów osiągalnych układu dodatniego jest dodatnim stożkiem wypukłym. Stożek ten jest solidny (o niepustym wnętrzu) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $N \in \mathbb{Z}_+$ takie, że rząd macierzy osiągalności (6) jest równy n.*

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [5].

Twierdzenie 4.2. *Układ dodatni (2.1) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $N \in \mathbb{Z}_+$ takie, że* rząd $\mathbf{R}_N = n$ *oraz*

i. *istnieje macierz nieosobliwa $\bar{\mathbf{R}}_N$ składająca się z n kolumn macierzy $\mathbf{R}_N$ takich, że $\bar{\mathbf{R}}_N^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, lub równoważnie*
ii. *Macierz $\bar{\mathbf{R}}_N \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ zawiera n liniowo niezależnych kolumn monomialnych (tylko jeden element dodatni, wszystkie pozostałe równe zeru)*

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli układ dodatni (2.1) jest osiągalny to jest on osiągalny w N krokach przy czym $N \geq E[n/q]$, gdzie $E[n/q]$ oznacza najmniejszą liczbę dodatnią większą lub równą n/q, a q jest liczba liniowo niezależnych kolumn monomialnych macierzy* **B**.

Dowód tego twierdzenia podany jest w pracy [6].

Twierdzenie 4.4. *Układ dodatni (2.1) jest osiągalny jeżeli istnieje $N \in \mathbb{Z}_+$ takie, że* rząd $\mathbf{R}_N = n$ *oraz*

$$\mathbf{R}_N^T\left[\mathbf{R}_N\mathbf{R}_N^T\right]^{-1}\in\mathbb{R}_+^{Nm\times n} \tag{4.8}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (8) to ciąg wymuszeń $u_i\in\mathbb{R}_+^m$, $i=0,1,\ldots,N$-1, który przeprowadza układ (2.1) z zerowego stanu początkowego do stanu końcowego $x_f\in\mathbb{R}_+^n$ można wyznaczyć z zależności

$$u_0^N=\mathbf{R}_N^T\left[\mathbf{R}_N\mathbf{R}_N^T\right]^{-1}x_f \tag{4.9}$$

4.2. Sterowanie z minimalną energią

Weźmy pod uwagę układ dodatni (2.1) oraz wskaźnik jakości

$$I(u)=\sum_{i=0}^{N-1}u_i^T\mathbf{Q}u_i \tag{4.10}$$

gdzie $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ jest symetryczną dodatnio określoną macierzą wag taką, że

$$\mathbf{Q}^{-1}\in\mathbb{R}_+^{m\times m} \tag{4.11}$$

a N jest liczbą kroków, w której układ jest przeprowadzany z zerowego stanu początkowego do stanu końcowego x_f.

Zagadnienie sterowania z minimalną energią układu dodatniego (2.1) można sformułować następująco. Dane są macierze $\mathbf{A}_k\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, $(k=0,1,\ldots,q)$, $\mathbf{B}\in\mathbb{R}_+^{n\times m}$, liczba kroków N, stan końcowy $x_f\in\mathbb{R}_+^n$ oraz macierz wag $\mathbf{Q}$ spełniająca warunek (11). Należy wyznaczyć ciąg wymuszeń $u_i\in\mathbb{R}_+^m$, $i=0,1,\ldots,N$-1, który przeprowadza ten układ ze stanu zerowego do stanu końcowego $x_f\in\mathbb{R}_+^n$ oraz minimalizuje wskaźnik jakości (10).

Aby rozwiązać to zadanie definiujemy macierze

$$\mathbf{W}=\mathbf{R}_N\overline{\mathbf{Q}}_N\mathbf{R}_N^T\in\mathbb{R}_+^{n\times n} \tag{4.12}$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_N=\operatorname{diag}\left[\mathbf{Q}^{-1}\ \ldots\ \mathbf{Q}^{-1}\right]\in\mathbb{R}_+^{Nm\times Nm} \tag{4.13}$$

Macierz $\mathbf{W}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $\mathbf{R}_N=n$.

Definiujemy ciąg wymuszeń $\widehat{u}_0$, $\widehat{u}_1,\ldots$, $\widehat{u}_{N-1}$ zależnością

$$\widehat{u}_0^N=\begin{bmatrix}\widehat{u}_0\\ \widehat{u}_1\\ \vdots\\ \widehat{u}_{N-1}\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{Q}}_N\mathbf{R}_N^T\mathbf{W}^{-1}x_f \tag{4.14}$$

Zauważmy, że $\widehat{u}_0^N\in\mathbb{R}_+^{Nm}$ dla dowolnego $x_f\in\mathbb{R}_+^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\overline{\mathbf{Q}}_N\mathbf{R}_N^T\mathbf{W}^{-1}\in\mathbb{R}_+^{Nm\times n} \tag{4.15}$$

Twierdzenie 4.5. *Niech układ dodatni (2.1) będzie osiągalny w N krokach. Wtedy ciąg wymuszeń określony przez (14) przeprowadza ten układ z zerowego stanu początkowe-*

go do stanu końcowego $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ *i minimalizuje wskaźnik jakości (10). Ponadto minimalna wartość wskaźnika jakości jest określona zależnością*

$$I(\hat{u}) = x_f^T \mathbf{W}^{-1} x_f \tag{4.16}$$

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [6].

Wniosek 4.1. Jeżeli $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}_m$, $q > 0$ to $\hat{u}_0^N = u_0^N$, a minimalna wartość wskaźnika jakości jest równa

$$I(\hat{u}) = qx_f^T \left[\mathbf{R}_N \mathbf{R}_N^T\right]^{-1} x_f \tag{4.17}$$

5. WYZNACZANIE REALIZACJI DODATNICH UKŁADÓW CIĄGŁYCH

5.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę układ ciągły z h opóźnieniami wektorze stanu i q w sterowaniu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{h} \mathbf{A}_i x(t-id) + \sum_{j=0}^{q} \mathbf{B}_j u(t-jd) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

przy czym $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ są wektorami stanu wymuszenia i odpowiedzi a $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0,1,\dots,h$ $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $j=0,1,\dots,q$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ oraz $d > 0$ jest opóźnieniem.

Warunki początkowe dla (1) mają postać

$$x_0(t) \text{ dla } t \in [-hd, 0], \quad u_0(t) \text{ dla } t \in [-hq, 0] \tag{5.2}$$

Definicja 5.1. *Układ (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim jeżeli dla każdego* $x_0(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \in [-hd, 0]$, $u_0(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \in [-qh, 0]$ *oraz wszystkich wymuszeń* $u(t) \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$ *mamy* $x(t) \in \mathbb{R}_+^m$ i $y(t) \in \mathbb{R}_+$ *dla* $t \geq 0$.

Niech $\mathbf{M}_n$ będzie zbiorem $n\times n$ macierzy Metzlera, tj. macierzy $n\times n$ o nieujemnych elementach poza główną przekątną.

Twierdzenie 5.1. *Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{A}_0$ *jest macierzą Metzlera a macierze* $\mathbf{A}_i$, $i=1,\dots,q$, $\mathbf{B}_j$, $j=0,1,\dots,q$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *mają elementy nieujemne.*

$$\mathbf{A}_0 \in M_{\cdot}, \ \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \ i = 1,..,h, \ \mathbf{B}_j \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, \ j = 0,1,\dots,q, \ \mathbf{C} \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, \ \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^{p\times m} \tag{5.3}$$

Macierz transmitancji układu (1) ma postać

$$\mathbf{T}(s,w)=\mathbf{C}\left[\mathbf{I}_m s-\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1 w-\ldots-\mathbf{A}_h w^h\right]^{-1}\times\left[\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1 w+\ldots+\mathbf{B}_q w^q\right]+\mathbf{D},\quad w=e^{-hs} \tag{5.4}$$

Definicja 5.2. *Macierze (3) nazywamy dodatnią realizacją macierzy* $\mathbf{T}(s,w)$ *jeżeli spełniają one równość (4). Realizację nazywamy minimalną jeżeli wymiar* $n{\times}n$ *macierzy* $\mathbf{A}_i$, $i=0,1,\ldots,h$ *jest minimalny wśród wszystkich realizacji macierzy* $\mathbf{T}(s,w)$.

Zadanie nasze można sformułować następująco. Dana jest właściwa macierz wymierna $\mathbf{T}(s,w)$. Należy wyznaczyć realizację dodatnią (3) tej macierzy $\mathbf{T}(s,w)$.

5.2. Rozwiązanie zadania

Macierz transmitancji (4) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{T}(s,w)=\frac{\mathbf{C}(\operatorname{Adj}\mathbf{H}(s,w))(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1 w+\cdots+\mathbf{B}_q w^q)}{\det\mathbf{H}(s,w)}+\mathbf{D}=\frac{\mathbf{N}(s,w)}{d(s,w)}+\mathbf{D} \tag{5.5}$$

przy czym

$$\mathbf{H}(s,w)=\left[\mathbf{I}_m s-\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1 w-\ldots-\mathbf{A}_h w^h\right], \tag{5.6}$$

$$\mathbf{N}(s,w)=\mathbf{C}\big(\operatorname{Adj}\mathbf{H}(s,w)\big)\big(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1 w+\cdots+\mathbf{B}_q w^q\big),\quad d(s,w)=\det\mathbf{H}(s,w) \tag{5.7}$$

Z zależności (5) mamy

$$\mathbf{D}=\lim_{s\to\infty}\mathbf{T}(s,w) \tag{5.8}$$

gdyż $\lim\limits_{s\to\infty}\mathbf{H}^{-1}(s,w)=0$.

Część ściśle właściwa $\mathbf{T}(s,w)$ jest dana zależnością

$$\mathbf{T}_{sp}(s,w)=\mathbf{T}(s,w)-\mathbf{D}=\frac{\mathbf{N}(s,w)}{d(s,w)} \tag{5.9}$$

Zadanie nasze zostało zredukowane do wyznaczenia macierzy

$$\mathbf{A}_0\in M_n,\ \mathbf{A}_k\in\mathbb{R}_+^{m\times m},\ k=1,\ldots,q,\ \mathbf{B}_j\in\mathbb{R}_+^{m},\ j=1,\ldots,q,\ \mathbf{C}\in\mathbb{R}_+^{p\times n} \tag{5.10}$$

dla danej macierzy ściśle właściwej (9).

Lemat 5.1. *Jeżeli*

$$\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}0&0&\ldots&0&a_{00}\\1&0&\ldots&0&a_{01}\\0&1&\ldots&0&a_{02}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\ldots&1&a_{0\,n-1}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&a_{i0}\\0&0&\cdots&0&a_{i1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a_{i\,n-1}\end{bmatrix},\quad i=1,\ldots,h \tag{5.11}$$

to

$$d(s,w)=\det\left[\mathbf{I}_n s-\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1 w-\dots-\mathbf{A}_h w^h\right]= \\ =s^n-d_{n-1}s^{n-1}-d_{n-2}s^{n-2}-\dots-d_1 s+d_0 \tag{5.12}$$

przy czym

$$d_j=d_j(w)=a_{h,j}w^h+a_{h-1,j}w^{h-1}+\dots+a_{1j}w+a_{0j},\quad j=0,1,\dots,n-1 \tag{5.13}$$

Dowód tego lematu jest podany w pracach [19], [20].

Lemat 5.2. *Jeżeli macierze* $\mathbf{A}_i$, $i=0,1,\dots,h$ *mają postać (11) to n-ty wiersz macierzy dołączonej* Adj $\mathbf{H}(s,w)$ *ma postać*

$$\mathbf{R}_n(s)=[1\quad s\quad\dots\quad s^{n-1}] \tag{5.14}$$

Dowód tego lematu jest podany w pracy [ ].

Macierz ściśle właściwą $\mathbf{T}_{sp}(s,w)$ możemy napisać zawsze w postaci

$$\mathbf{T}_{sp}(s,w)=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathbf{N}_1(s,w)}{d_1(s,w)}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathbf{N}_p(s,w)}{d_p(s,w)}\end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

przy czym

$$d_k(s,w)=s^{n_k}-d_{n_k-1}s^{n_k-1}-\dots-d_1 s-d_0,\quad k=1,\dots,p \\ d_i=d_i(w)=a^i_{h_i i}w^{h_i}+\dots+a^i_{1i}w+a^i_{0i},\quad i=0,1,\dots,n_k-1 \tag{5.16}$$

jest najmniejszym wspólnym mianownikiem k-tego wiersza macierzy $\mathbf{T}_{sp}(s,w)$ a

$$\mathbf{N}_k(s,w)=\left[n_{k1}(s,w),\dots,n_{km}(s,w)\right],\quad k=1,\dots,p \tag{5.17}$$

$$n_{kj}(s,w)=n^{n_k-1}_{kj}s^{n_k-1}+\dots+a^1_{1j}w+a^0_{0j},\quad j=0,1,\dots,m$$

$$n^i_{kj}=n^{iq}_{kj}w^q+\dots+n^{i1}_{kj}w+n^{i0}_{kj},\quad i=0,1,\dots,n_k-1$$

Zgodnie z lematem 1 każdemu wielomianowi (16) możemy przyporządkować macierze

$$\mathbf{A}_{k0}=\begin{bmatrix}0&0&\dots&0&a^k_{00}\\1&0&\dots&0&a^k_{01}\\0&1&\dots&0&a^k_{02}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&a^k_{0n_k-1}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_{ki}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&a^k_{i0}\\0&0&\cdots&0&a^k_{i1}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\cdots&0&a^k_{in_k-1}\end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

$k=1,\dots,p,\ i=1,\dots,h_k$

spełniające warunek

$$d_k(s,w) = \det\left[\mathbf{I}_{n_k}s - \mathbf{A}_{k0} - \mathbf{A}_{k1}w - \ldots - \mathbf{A}_{kh_k}w^{h_k}\right],\ k = 1,..,p \tag{5.19}$$

Niech

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \text{block diag}\left[\mathbf{A}_{10} \ldots \mathbf{A}_{p0}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ \mathbf{A}_i &= \text{block diag}\left[\mathbf{A}_{1i} \ldots \mathbf{A}_{pi}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (n = n_1 + \cdots + n_p) \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} b_{11}^k & \cdots & b_{1m}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^k & \cdots & b_{pm}^k \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_{ij}^k = \begin{bmatrix} b_{ij}^{k1} \\ \vdots \\ b_{ij}^{kn_i} \end{bmatrix},\ k = 0,1,\ldots,q;\ i = 1,\ldots,p;\ j = 1,..,m \tag{5.21}$$

$$\mathbf{C} = \text{block diag}\left[\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_p\right],\ \mathbf{c}_k = [0\ \ldots\ 0\ 1] \in \mathbb{R}^{1\times n_k}\ k = 1,\ldots,p \tag{5.22}$$

Liczba q opóźnień w sterowaniu jest równa stopniowi macierzy wielomianowej $\mathbf{N}(s,w)$ względem w.

Z zależności (5), (14), (18), (20)-(22) dla j-tej kolumny $\mathbf{T}_{sp}(s,w)$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_{sp}^j(s,w) = \mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}(s,w)\left[\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 w + \ldots + \mathbf{B}_q w^q\right]_j = \\
&= \text{block diag}\left[c_1 \ldots c_p\right]\left(\text{block diag}\left\{\left[\mathbf{I}_{n_1}s - \mathbf{A}_{10} - \mathbf{A}_{11}w - \ldots - \mathbf{A}_{1h_1}w^{h_1}\right]^{-1}, \ldots\right.\right. \\
&\left.\left.\ldots, \left[\mathbf{I}_{n_p}s - \mathbf{A}_{p0} - \mathbf{A}_{p1}w - \ldots - \mathbf{A}_{ph_p}w^{h_p}\right]^{-1}\right\}\right)\begin{bmatrix} b_{1j}^0 + b_{1j}^1 w + \ldots + b_{1j}^q w^q \\ \vdots \\ b_{pj}^0 + b_{pj}^1 w + \ldots + b_{pj}^q w^q \end{bmatrix} = \\
&= \text{block diag}\left\{\frac{1}{d_1(s,w)}[1\quad s\quad \ldots\quad s^{n_1-1}], \ldots, \frac{1}{d_p(s,w)}[1\quad s\quad \ldots\quad s^{n_p-1}]\right\}\times \\
&\begin{bmatrix} b_{1j}^0 + b_{1j}^1 w + \ldots + b_{1j}^q w^q \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{pj}^0 + b_{pj}^1 w + \ldots + b_{pj}^q w^q \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(b_{1j}^{qn_1}w^q + \ldots + b_{1j}^{1n_1}w + b_{1j}^{0n_1})s^{n_1-1} + \ldots + b_{1j}^{q1}w^q + \ldots + b_{1j}^{11}w + b_{1j}^{01}}{d_1(s,w)} \\ \vdots \\ \dfrac{(b_{pj}^{qn_p}w^q + \ldots + b_{pj}^{1n_p}w + b_{pj}^{0n_p})s^{n_p-1} + \ldots + b_{pj}^{q1}w^q + \ldots + b_{pj}^{11}w + b_{pj}^{01}}{d_p(s,w)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{n_{1j}(s,w)}{d_1(s,w)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_{pj}(s,w)}{d_p(s,w)} \end{bmatrix},\ j = 1,\ldots,m
\end{aligned} \tag{5.23}$$

a $n_{ij}(s,w)$ są określone przez (17).

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s i w otrzymamy

$$
\begin{aligned}
& b_{1j}^{01} = n_{1j}^{00},\ b_{1j}^{11} = n_{1j}^{01},\dots,\ b_{1j}^{q1} = n_{1j}^{0q},\dots,\ b_{1j}^{0n_1} = n_{1j}^{n_1-1,0},\\
& b_{1j}^{1n_1} = n_{1j}^{n_1-1,1},\dots,\ b_{1j}^{qn_1} = n_{1j}^{n_1-1,q}\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
& b_{pj}^{01} = n_{pj}^{00},\ b_{pj}^{11} = n_{pj}^{01},\dots,\ b_{pj}^{q1} = n_{pj}^{0q},\dots,\ b_{pj}^{0n_1} = n_{pj}^{n_p-1,0},\\
& b_{pj}^{1n_p} = n_{pj}^{n_p-1,1},\dots,\ b_{pj}^{qn_p} = n_{pj}^{n_p-1,q}
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

dla $j = 1,\dots,m$.

Twierdzenie 5.2. *Istnieje dodatnia realizacja (3) macierzy* $\mathbf{T}(s,w)$ *jeżeli*

i.
$$\mathbf{T}(\infty) = \lim_{s\to\infty} \mathbf{T}(s,w) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$$

ii. *Współczynniki wielomianu* $d_k(s,w)$ $k=1,\dots,p$ *są nieujemne z wyjątkiem* a_{0n_k-1}, $k = 1,\dots,p$, tj.
$$a_{ij}^k \ge 0,\quad i=1,\dots,h_k;\quad j=0,1,\dots,n_k-1,\quad k=1,\dots,p$$

iii. *Współczynniki wielomianów* $n_{ij}(s,w)$ *są nieujemne, tj.*
$$n_{ij}^k \ge 0 \ \ dla\ \ i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,m;\ k=0,1,\dots,q$$

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [21].

Jeżeli warunki twierdzenia 2 są spełnione to dodatnią realizację (3) macierzy $\mathbf{T}(s,w)$ możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 5.1.

Krok 1: Korzystając z (8) i (9) wyznaczamy macierz **D** oraz oraz macierz ściśle właściwą $\mathbf{T}_{sp}(s,w)$.

Krok 2: Znając współczynniki wielomianu $d_k(s,w)$, $k=1,\dots,p$ wyznaczamy macierze (11) i (20)

Krok 3: Znając współczynniki wielomianów $n_{ij}(s,w)$ oraz korzystając z (24) i (22) wyznaczamy macierze $\mathbf{B}_i$, $i = 0,1,\dots,q$ oraz macierz **C**.

Przykład 5.1. Wyznaczyć dodatnią realizację (3) macierzy

$$
\mathbf{T}(s,w)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+(-w^2+w+2)s-w^2+w}{s^2+(-w^2+2)s-(2w^2+w+1)} & \dfrac{s^2+3s-(2w^2+1)}{s^2+(-w^2+2)s-(2w^2+w+1)}\\ \dfrac{w^2+1}{s-2w^2-w+1} & \dfrac{2s-2w^2+2}{s-2w^2-w+1}\end{bmatrix} \tag{5.25}
$$

Łatwo sprawdzić, że warunki twierdzenia 2 są spełnione i istnieje poszukiwana realizacja dodatnia macierzy (25).

Korzystając z procedury 1 otrzymujemy.

Krok 1. Z zależności (8) i (9) mamy

$$
\mathbf{D}=\lim_{s\to\infty}\mathbf{T}(s,w)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{5.26}
$$

oraz

$$
\mathbf{T}_{sp}(s,w)=\mathbf{T}(s,w)-\mathbf{D}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}\dfrac{ws+w^2+1}{s^2+(-w^2+2)s-(2w^2+w+1)} & \dfrac{(w^2+1)s+w}{s^2+(-w^2+2)s-(2w^2+w+1)}\\ \dfrac{w^2+1}{s-2w^2-w+1} & \dfrac{2(w^2+w)}{s-2w^2-w+1}\end{bmatrix} \tag{5.27}
$$

Krok 2. Biorąc pod uwagę że

$$
d_1(s,w)=s^2+(-w^2+2)s-(2w^2+w+1),
$$

$$
d_2(s,w)=s-2w^2-w+1
$$

oraz korzystając z (11) i (20) otrzymamy

$$
\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{10} & 0\\ 0 & \mathbf{A}_{20}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1\end{array}\right],\ \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & 0\\ 0 & \mathbf{A}_{21}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right],
$$

$$
\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{21} & 0\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right] \tag{5.28}
$$

Krok 3. W tym przypadku

$$
n_{11}(s,w)=ws+w^2+1,\ \ n_{12}(s,w)=(w^2+1)s+w,
$$

$$
n_{21}(s,w)=w^2+1,\ \ n_{22}(s,w)=2(w^2+w).
$$

Korzystając z (24) i (22) otrzymamy

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} b_{11}^{01} & b_{12}^{01} \\ b_{11}^{02} & b_{12}^{02} \\ b_{21}^{01} & b_{22}^{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^{11} & b_{12}^{11} \\ b_{11}^{12} & b_{12}^{12} \\ b_{21}^{11} & b_{22}^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{11}^{21} & b_{22}^{21} \\ b_{11}^{22} & b_{12}^{22} \\ b_{21}^{21} & b_{22}^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ oraz } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Poszukiwana realizacja dodatnia macierzy (25) dana jest przez (26), (28) i (29).

6. WYZNACZANIE REALIZACJI DODATNICH SINGULARNYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

6.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę singularny układ dyskretny z q opóźnieniami w wektorze stanu i wymuszenia

$$\mathbf{E}x(i+1) = \sum_{j=0}^{q} \left(\mathbf{A}_j x(i-j) + \mathbf{B}_j u(i-j) \right) \tag{6.1a}$$

$$y(i) = \mathbf{C}x(i) \quad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.1b}$$

gdzie $x(i)\in\mathbb{R}^n$, $u(i)\in\mathbb{R}^m$, $y(i)\in\mathbb{R}^p$ są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi a $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B}_k\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $k = 0,1,\dots,q$, $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{p\times n}$.

Zakładamy, że det $\mathbf{E} = 0$ oraz

$$\begin{gathered} \det\left[\mathbf{E}z^{q+1} - \mathbf{A}_0 z^q - \mathbf{A}_1 z^{q-1} - \dots - \mathbf{A}_q\right] \neq 0 \\ \text{dla pewnych } z \in \mathbb{C} \text{ (ciao liczb zespolonych)} \end{gathered} \tag{6.2}$$

Warunki początkowe dla (1a) mają postać

$$x(-i) \in \mathbb{R}^n, \quad u(-i) \in \mathbb{R}^m, \quad \text{dla} \quad i = 0,1,\dots,q \tag{6.3}$$

Załóżmy, że macierze $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}$ mają następujące postacie kanoniczne

$$\mathbf{E} = \text{block diag}\left[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_p\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{E}_i = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i},$$

$$i = 1,\dots,p,\ n = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

$$\mathbf{A}_j = \text{block diag}\left[\mathbf{A}_{j1}, \mathbf{A}_{j2}, \dots, \mathbf{A}_{jp}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A}_{ji} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & a_{ji} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i},$$

$$a_{ji} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{ji} \\ a_{ji}^{n_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i}, \overline{a}_{ji} \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \quad j = 1,\dots,q-1;\ i = 1,\dots,p$$

$$\mathbf{A}_{qi} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline I_{n_i-1} & a_{qi} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, \ a_{qi} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{qi} \\ -a_{qi}^{n_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i}, \ \overline{a}_{qi} = \begin{bmatrix} a_{qi}^1 \\ \vdots \\ a_{qi}^{n_i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \ j = 1,\dots,q$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} b_{11}^j & \cdots & b_{1m}^j \\ & \vdots & \\ b_{p1}^j & \cdots & b_{pm}^j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \ b_{ii}^j = \begin{bmatrix} \overline{b}_{il}^j \\ b_{il}^{l n_i} \end{bmatrix}, \ \overline{b}_{il}^j = \begin{bmatrix} b_{il}^j \\ \vdots \\ b_{il}^{l n_i} \end{bmatrix}, \ i = 1,\dots,p;\ l = 1,\dots,n \tag{6.4}$$

$$\mathbf{C} = \text{block diag}\left[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_p\right] \in \mathbb{R}^{p\times n},$$

$$\mathbf{C}_i = \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1\right] \in \mathbb{R}^{1\times n_i}, \ i = 1,\dots,p.$$

Definicja 6.1. *Układ (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim jeżeli dla każdego* $x(-k)\in\mathbb{R}_+^n$, $u(-k)\in\mathbb{R}_+^m$, $k = 0,1,\dots,q$ *oraz wszystkich* $u(i)\in\mathbb{R}_+^m$, $i\in\mathbb{Z}_+$ *mamy* $x(i)\in\mathbb{R}_+^n$ i $y(i)\in\mathbb{R}_+^p$ *dla* $i\in\mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie 6.1. *Układ (1) z macierzami o postaci (4) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{gathered} a_{ki}^l \geq 0 \ \text{dla} \ k = 0,1,\dots,q;\ i = 1,\dots,p;\ l = 0,1,\dots,n_i \\ a_{ki}^{n_i} = 0,\ a_{qi}^{n_i} > 0 \ \text{dla} \ k = 0,1,\dots,q-1;\ i = 1,\dots,p \end{gathered} \tag{6.5a}$$

$$b_{ij}^k \in \mathbb{R}_+^{n_i} \ \text{dla} \ i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,m;\ k = 0,1,\dots,q$$

Dowód. Niech

$$x_k(i) = \begin{bmatrix} \overline{x}_k(i) \\ x_{kn_k}(i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, \ \overline{x}(i) \in \mathbb{R}^{n_k-1}, \ i \in \mathbb{Z}_+, \ k = 1,\dots,p \tag{6.6a}$$

będzie k-tym ($k = 1,\dots,p$) podsektorem wektora $x(i)$ odpowiadającym k-temu blokowi (4) oraz

$$\overline{\mathbf{A}}_{qk} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline I_{n_k-2} & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(n_k-1)\times(n_k-1)},\ \overline{\mathbf{B}}_{jk} = \left[\overline{b}_{k1}^{j}, \dots, \overline{b}_{km}^{j}\right],$$
$$b_{jk}^{n_k} = \left[b_{k1}^{jn_k}, \dots, b_{km}^{jn_k}\right],\ e_{n_k} = [0, \dots, 0\ \ 1] \in \mathbb{R}^{1\times(n_k-1)}. \tag{6.6b}$$

Korzystając z (1a), (4) i 6) możemy napisać

$$\overline{x}_k(i+1) = \overline{\mathbf{A}}_{qk}\overline{x}(i-q) + \sum_{j=0}^{q}\overline{a}_{jk}x_{jn_k}(i-j) + \sum_{j=0}^{q}\overline{\mathbf{B}}_{jk}u(i-j) \tag{6.7a}$$

$$a_{qk}^{n_k}x_{kn_k}(i-q) = e_{n_k}\overline{x}_k(i-q) + \sum_{j=0}^{q}b_{jk}^{n_k}u(i-j) \tag{6.7b}$$

Jeżeli warunki (5) są spełnione to korzystając z (7a) dla $i = 0,1,\dots,q$ oraz warunków początkowych (3) możemy wyznaczyć

$$\overline{x}_k(i) \in \mathbb{R}_+^{n_k-1} \text{ dla } i = 1,\dots,q+1,$$

a następnie z (7b)

$$x_{kn_k}(q+1) \in \mathbb{R}_+$$

oraz z (7a)

$$\overline{x}_k(q+2) \in \mathbb{R}_+^{n_k-1}.$$

Kontynuując tę procedurę możemy wyznaczyć

$$x_k(i) \in \mathbb{R}_+^{n_k} \text{ dla } i = \mathbb{Z}_+ \text{ i } k = 1,\dots,p$$

a z (1b) $y(i) = \mathbf{C}x(i) \in \mathbb{R}_+^p$ dla $i \in \mathbb{Z}_+$.
Warunek konieczny wynika natychmiast z dowolności warunków początkowych (3) oraz wymuszenia $u(i)$.

■

Uwaga 6.1. Korzystając z (6b) możemy wyeliminować x_n, a z (7a) i (1b) otrzymamy dodatni układ standardowy z opóźnieniami i z argumentami wyprzedzającymi w sterowaniu.

Macierz transmitancji układu (1) ma postać

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(z) &= \mathbf{C}[\mathbf{E}z - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 z^{-1} - \dots - \mathbf{A}_q z^{-q}]^{-1}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_q z^{-q}) = \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{E}z^{q+1} - \mathbf{A}_0 z^q - \mathbf{A}_1 z^{q-1} - \dots - \mathbf{A}_q]^{-1}(\mathbf{B}_0 z^q + \mathbf{B}_1 z^{q-1} + \dots + \mathbf{B}_q).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Definicja 6.2. *Macierze (4) spełniające (5a) nazywamy dodatnią realizacją macierzy transmitancji* $\mathbf{T}(z)$ *jeżeli spełniają one równanie (8). Realizację nazywamy minimalną jeżeli wymiary* $n \times n$ *macierzy* $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_k$, $k = 0,1$ *są minimalne wśród wszystkich realizacji.*

Zadanie wyznaczania realizacji dodatniej można sformułować następująco. Dana jest niewłaściwa macierz transmitancji $\mathbf{T}(z)$. Należy wyznaczyć dodatnią realizacje macierzy $\mathbf{T}(z)$.

6.2. Rozwiązanie zadania

Rozwiązanie tego zadania opiera się na następujących dwóch lematach.

Lemat 6.1. *Jeżeli macierz* $\mathbf{E}_k$ *ma postać (4) oraz*

$$\mathbf{A}_{0k} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{q_k} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2q_k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\overline{n}_k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{1k} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{q_k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2q_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{\overline{n}_k-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$\mathbf{A}_{q_k k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{q_k+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2(q_k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(n_k-2)(q_k+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

to

$$\begin{aligned} d_k(z) &= \det\left[\mathbf{E}_k z^{q_k+1} - \mathbf{A}_{0k} z^{q_k} - \ldots - \mathbf{A}_{q_k,k}\right] = \\ &= z^{\overline{n}_k} - a_{\overline{n}_k-1} z^{\overline{n}_k-1} - \ldots - a_1 z + a_0, \quad k = 1,\ldots,p \end{aligned} \tag{6.10}$$

gdzie $\overline{n}_k = (n_k - 1)(q_k + 1)$.

Dowód. Rozwijając wyznacznik względem n_i-tej kolumny otrzymamy

$$\det[\mathbf{E}_k z^{q_k+1} - \mathbf{A}_{0k} z^{q_k} - \ldots - \mathbf{A}_{q_k,k}] =$$

$$= \begin{vmatrix} z^{q_k+1} & 0 & \ldots & 0 & -a_{q_k} z^{q_k} - a_{q_k-1} z^{q_k-1} - \ldots - a_0 \\ -1 & z^{q_k+1} & \ldots & 0 & -a_{2q_k+1} z^{q_k} - a_{2q_k} z^{q_k-1} - \ldots - a_{q_k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & z^{q_k+1} & -a_{\overline{n}_k-1} z^{q_k} - a_{\overline{n}_k-2} z^{q_k-1} - \ldots - a_{(n_k-2)(q_k+1)} \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= z^{\overline{n}_k} - a_{\overline{n}_k-1} z^{\overline{n}_k-1} - \ldots - a_1 z + a_0, \quad k = 1,\ldots,p \quad .$$

■

Lemat 6.2. *Jeżeli macierze* $\mathbf{E}_k$ *mają postać (4) a macierze* $\mathbf{A}_{ik}$, i=0,1,…,q *mają postać (9) to* n_k*-ty wiersz* $\mathbf{R}_{n_k}(z)$ *macierzy dołączonej*

$$\mathrm{Adj}\left[\mathbf{E}_k z^{q_k+1} - \mathbf{A}_{0k} z^{q_k} - \ldots - \mathbf{A}_{q_k,k}\right]$$

jest równy

$$\mathbf{R}_{n_k}(z)=[1 \quad z^{q_k+1} \quad \dots \quad z^{\bar{n}_k}], \quad k=1,\dots,p \tag{6.11}$$

Dowód. Biorąc pod uwagę

$$\left(\mathrm{Adj}\left[\mathbf{E}_k z^{q_k+1}-\mathbf{A}_{0k}z^{q_k}-\dots-\mathbf{A}_{q_k,k}\right]\right)\left[\mathbf{E}_k z^{q_k+1}-\mathbf{A}_{0k}z^{q_k}-\dots-\mathbf{A}_{q_k,k}\right]=\mathbf{I}_{n_k}d_k(z)$$

łatwo sprawdzić że zachodzi równość

$$\mathbf{R}_{n_k}(z)\left[\mathbf{E}_k z^{q_k+1}-\mathbf{A}_{0k}z^{q_k}-\dots-\mathbf{A}_{q_k,k}\right]=[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]d_k(z)$$

■

Niech dana niewłaściwa macierz transmitancji ma postac

$$\mathbf{T}(z)=\begin{bmatrix} \frac{n_{11}(z)}{d_1(z)},\dots,\frac{n_{1m}(z)}{d_1(z)} \\ \vdots \\ \frac{n_{p1}(z)}{d_p(z)},\dots,\frac{n_{pm}(z)}{d_p(z)} \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

przy czym

$$n_{kj}(z)=n_{kj}^{t_{kj}}z^{t_{kj}}+\dots+n_{kj}^{1}z+n_{kj}^{0} \quad k=1,\dots,p; \ j=1,\dots,m \tag{6.13a}$$

$$d_k(z)=z^{r_k}-a_{kr_k-1}z^{r_k-1}-\dots-a_{k1}z-a_{k0} \tag{6.13b}$$

Liczba opóźnień q jest równa

$$q=\max_k\,(t_k-r_k) \quad (k=1,\dots,p) \tag{6.14}$$

gdzie

$$t_k=\max_j t_{kj}\,,\ j=1,\dots,m$$

Jeżeli macierze $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{A}_{jk}$ mają postać (4) to minimalne n_k jest określone wzorem

$$n_k \ge \frac{t_k+1}{t_k-r_k+1} \quad k=1,\dots,p \tag{6.15}$$

Wzór (15) można wyprowadzić następująco. Jeżeli macierz $\mathbf{E}_k$ ma postać kanoniczną to

$$(n_k-1)(t_k-r_k+1)\ge r_k \quad k=1,\dots,p \tag{6.16}$$

Rozwiązując nierówność (15) względem n_k otrzymamy wzór (15).

Znając współczynniki mianowników $d_1(z),\dots,d_p(z)$ macierzy (12) możemy wyznaczyć macierze $\mathbf{A}_{ji}$ o postaci (4) takie, że zachodzi (10).

Niech $(\mathbf{B}_0 z^q+\dots+\mathbf{B}_q)_j$ oraz $\mathbf{T}_j(z)$ $j=1,\dots,m$ będą j-tymi kolumnami macierzy $\mathbf{B}_0 z^q+\dots+\mathbf{B}_q$ oraz $\mathbf{T}(z)$.

Korzystając z (8), (9) i (10) otrzymamy

(6.17)

$$\mathbf{T}_j(z) = \mathbf{C}[\mathbf{E}z^{q+1} - \mathbf{A}_0 z^q - \ldots - \mathbf{A}_q]^{-1}(\mathbf{B}_0 z^q + \ldots + \mathbf{B}_q)_j =$$

$$= \left(\text{block diag}[\mathbf{C}_1 \ldots \mathbf{C}_p]\right)\left(\text{block diag}\left\{\left[\mathbf{E}_1 z^{q+1} - \mathbf{A}_{01} z^q - \ldots - \mathbf{A}_{q1}\right]^{-1}, \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots, [\mathbf{E}_p z^{q+1} - \mathbf{A}_{0p} z^q - \ldots - \mathbf{A}_{qp}]^{-1}\right\}\right) \times \begin{bmatrix} b_{1j}^j z^q + \ldots + b_{1j}^q \\ \vdots \\ b_{pj}^0 z^q + \ldots + b_{pj}^q \end{bmatrix} =$$

$$= \text{block diag}\left\{\frac{1}{d_1(z)}\left[1 \quad z^{q_1+1} \quad \ldots \quad z^{(q_1+1)(n_1-1)}\right], \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{1}{d_p(z)}\left[1 \quad z^{q_p+1} \quad \ldots \quad z^{(q_p+1)(n_p-1)}\right]\right\}\begin{bmatrix} b_{1j}^j z^q + \ldots + b_{1j}^q \\ \vdots \\ b_{pj}^0 z^q + \ldots + b_{pj}^q \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{b_{1j}^{0n_1} z^{t_{1j}} + b_{1j}^{1n_1} z^{t_{1j}-1} + \ldots + b_{1j}^{q-1,1} z + b_{1j}^{q1}}{d_1(z)} \\ \vdots \\ \dfrac{b_{pj}^{0n_p} z^{t_{pj}} + b_{pj}^{1n_p} z^{t_{pj}-1} + \ldots + b_{pj}^{q-1,1} z + b_{pj}^{q1}}{d_p(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n_{1j}(z)}{d_1(z)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_{pj}(z)}{d_p(z)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m$$

przy czym $n_{ij}(z)$, i=1,...,p są określone zależnością (13a).

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z liczników zależności (17) otrzymamy

$$\begin{array}{l} b_{1j}^{0n_1} = n_{1j}^{t_{1j}},\ b_{ij}^{1n_1} = n_{1j}^{t_{1j}-1}, \ldots, b_{1j}^{q-1,1} = n_{1j}^1,\ b_{1j}^{q1} = n_{1j}^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad j = 1, \ldots, p \\ b_{pj}^{0n_p} = n_{pj}^{t_{pj}},\ b_{pj}^{1n_p} = n_{pj}^{t_{pj}-1}, \ldots, b_{pj}^{q-1,1} = n_{pj}^1,\ b_{pj}^{q1} = n_{pj}^0 \end{array} \tag{6.18}$$

Twierdzenie 6.1. *Istnieje dodatnia realizacja macierzy transmitancji (12) jeżeli*

i. współczynniki mianowników (13b) są nieujemne

$$a_{ki} \geq 0 \ \ dla \ \ k = 1, \ldots, p; \ i = 0, 1, \ldots, r_k - 1 \tag{6.19}$$

ii. współczynniki liczników (13a) są nieujemne

$$n_{kj}^{t_{kj}} \geq 0 \ \ dla \ \ k = 1, \ldots, p; \ j = 1, \ldots, m \tag{6.20}$$

Dowód. Jeżeli warunki (20) są spełnione to z zależności (18) wynika, że $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ dla $j = 0, 1, \ldots, q$. Jeżeli dodatkowo warunek (19) jest spełniony wtedy zgodnie z twierdzeniem 1 realizacja ta jest dodatnia.

■

Jeżeli warunki twierdzenia 1 są spełnione to realizację dodatnią macierzy (12) można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 6.1.
Krok 1: Znając stopnie t_k liczników $n_{ij}(z)$ oraz r_k mianowników $d_k(z)$ korzystając z (14) wyznaczamy liczbę opóźnień q a z zależności (15) liczbę n_k dla $k = 1,\dots,p$.
Krok 2: Korzystając ze współczynników wielomianów $d_k(z)$ $k = 1,\dots,p$ wyznaczamy macierze $\mathbf{A}_j$ $j = 0,1,\dots,q$, **E** i **C**.
Krok 3: Korzystając z (18) wyznaczamy macierze $\mathbf{B}_j$ $j = 0,1,\dots,q$.

Przykład 6.1. Wyznaczyć realizację dodatnią macierzy

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z^3+2z^2+z+3}{z^2-2z-1} & \dfrac{3z^3+2z+2}{z^2-2z-1} \\ \dfrac{z^3+2z^2+z}{z^2-3z} & \dfrac{z^2+3z}{z^2-3z} \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Łatwo sprawdzić że macierz (21) spełnia warunki (19) i (20).

Korzystając z procedury 1 otrzymujemy.

Krok 1. W tym przypadku $t_1 = t_2 = 3$, $r_1 = r_2 = 2$. wobec tego

$$q = \max_k(t_k - r_k) = 1$$

i z zależności (15) otrzymamy $n_1 = n_2 = 2$.
Krok 2: Biorąc pod uwagę, że $d_1(z) = z^3 - 2z - 1$ oraz $d_1(z) = z^2 - 3z$ otrzymamy

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{01} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Krok 3. Korzystając z (18) otrzymamy

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} b_{11}^{01} & b_{12}^{01} \\ b_{11}^{02} & b_{12}^{02} \\ b_{21}^{01} & b_{22}^{01} \\ b_{21}^{02} & b_{22}^{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^{11} & b_{12}^{11} \\ b_{11}^{12} & b_{12}^{12} \\ b_{21}^{11} & b_{22}^{11} \\ b_{21}^{12} & b_{22}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Poszukiwana realizacja macierzy (21) dana jest przez (22) i (23). Realizacja ta jest minimalna, gdyż wielomiany $d_1(z) = z^3 - 2z - 1$ i $d_1(z) = z^2 - 3z$ są względnie pierwsze.

Uwaga 6.2. Jeżeli

$$(n_k - 1)(q_k + 1) > r_k \quad \text{dla pewnych } k \in [1, ..., p] \tag{6.24}$$

to wtedy licznik i mianownik k-tego wiersza macierzy (12) należy pomnożyć przez z^{v_k}, gdzie $v_k = (n_k - 1)(q_k + 1) - r_k$. W przeciwnym przypadku otrzymane macierze $\mathbf{A}_j$, j=0,1,...,q nie należą do realizacji dodatniej macierzy (12).

Na przykład jeżeli macierz transmitancji ma postać

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z^3 + 2z^2 + z + 3}{z^2 - 2z - 1} & \dfrac{3z^3 + 2z + 2}{z^2 - 2z - 1} \\ \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z - 3} & \dfrac{z + 3}{z - 3} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

to dla $k = 2$ mamy $n_2 = 2$ $q_2 = 1$ $r_2 = 1$ oraz $v_2 = (n_2 - 1)(q_2 + 1) - r_2 = 1$. w tym przypadku mnożąc przez licznik i mianownik drugiego wiersza (25) otrzymamy macierz transmitancji (21).

Macierze $\mathbf{A}_{20}$ i $\mathbf{A}_{12}$ dla drugiego wiersza macierzy (25)mają postacie

$$\mathbf{A}_{02} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

i nie należą do dodatniej realizacji macierzy (25).

7. PODSUMOWANIE I PROBLEMY OTWARTE

W pracy dokonano przeglądu aktualnego stanu badań w wybranych obszarach teorii dodatnich liniowych układów z opóźnieniami dotyczących:

- Stabilności asymptotycznej układów dyskretnych z opóźnieniami
- Osiągalności i sterowania z minimalną energią układów dyskretnych z opóźnieniami
- Wyznaczania dodatnich realizacji minimalnych układów dyskretnych i ciągłych z opóźnieniami w wektorze stanu i wymuszeniach oraz singularnych układów dyskretnych z opóźnieniami

Poza znanymi wcześniej publikowanymi wynikami przedstawiono nowe wyniki dotychczas niepublikowane.

Problem istnienia i wyznaczania realizacji dodatnich został już częściowo rozwiązany dla singularnych układów ciągłych opóźnieniami w pracy [23].

Dotychczas znacznie więcej udało się rozwiązać zagadnień dotyczących dodatnich układów dyskretnych niż ciągłych z opóźnieniami. W pierwszej kolejności należałoby więc uogólnić znane wyniki dla dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami na przypadek dodatnich układów ciągłych, na przykład kryteria osiągalności, sterowalności i obserwowalności, sterowanie z minimalną energią itp. Problemem otwartym jest przeniesienie tych rozważań na dwuwymiarowe (2D) układy z opóźnieniami, układy ciągło-dyskretne z opóźnieniami oraz dodatnie układy biliniowe z opóźnieniami itp.

Pracę wykonano w ramach grantu KBN 3T11A00627

8. LITERATURA

[1] Benvenuti L., Farina L. (2004) A tutorial on the positive realization problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 5, 651-664.

[2] Biała S. (2002) *Odporna stabilność wielomianów i macierzy.* AGH Uczel. Wyd. Naukowo-Techn. Kraków.

[3] Busłowicz M. (1983) O pewnych własnościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. *Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektrotechnika*, 1,17-29.

[4] Busłowicz M. (1982) Explicit solution of discretedelay equations, Foundations of Control Engineering, vol. 7, No. 2, 1982, pp. 67-71.

[5] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem, Krajowa Konf. Automat. Proc. Dyskretnych, 2004. 21-25.09.04 Zakopane, pp. 9- 16.

[6] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. *Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation 2004, Kusadasi, Izmir, Turkey (CDROM).*

[7] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Stability and robust stability of positive linear discrete-time systems with pure delay. *Proc. 10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland 2004*, 105-108.

[8] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays. *Bull. of the Pol. Acad. Sci, Techn. Sci*, 52, 2, 99-102.

[9] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. *Krajowa Konf. Automat. Proc. Dyskretnych*, 21-25.09.04 Zakopane, 83-90.

[10] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays-stability and robust stability. *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 10, 9-12.

[11] Farina L., Rinaldi S. (2000) *Positive Linear Systems: Theory and Applications.* Wiley, New York.

[12] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P. and A. Korytkowski (1989) *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems.* PWN, Warszawa, J. Wiley New York.

[13] Kaczorek T. (2002) *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag, London.

[14] Kaczorek T. (2003) Some recent developments In positive systems. *Proc. 7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*. Łódź, Poland , 25-35.

[15] Kaczorek T. (2005) Realization problem for a class of positive continuous-time systems with delays. *Proc 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'05, 27-29 June 2005, Cyprus.*

[16] Kaczorek T. (2004) Minimal realization for positive multivariable linear systems with delay. *Proc. CAITA 2004, Conference on Advances in Internet Technologies and Applications, July 8-11, 2004, Purdue, USA*, 1-12.

[17] Kaczorek T. (2004) Stability of positive discretetime systems with time-delay. *8th World Muliconference on Systems, Cybernetics and Informatics, July 18-21, 2004 Orlando, Florida USA*, 321-324.

[18] Kaczorek T. (2004) Structure decomposition and computation of minimal realization of normal transfer matrix of positive systems. *10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2004, 30.08-2.09.2004, Międzyzdroje*, 93-100

[19] Kaczorek T. (2004) Minimal realization problem for positive multivariable linear systems with delay, Proc. of Systems Science Conf., Wrocław 2004

[20] Kaczorek T. (2004) Realization problem for positive multivariable linear systems with time- delay, *Intern. Workshop "Computational Problems of Electrical Enginnering", Zakopane, 1-4.09.2004*, 186-192.

[21] Kaczorek T., Realization problem for positive multivariable linear systems with time-delay, 5th Intern. Conference in Technology and Automation ICTA'05, Thessaloniki, Grecja, 15-16 Oct. 2005, pp. 23-27

[22] Kaczorek T., Positive minimal realization for discrete-time multi-input systems with delays in state and in control, 8th Conf. Dynamical Systems Theory and Applications, DTSA-2005, 12-15 XII 2005.

[23] Positive minimal realization for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control, Bull. Of the Polish Acad. Of Sc. Techn. Sci., vol. 53, No. 3, 2005, pp. 293-298.

[24] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Minimal realization for positive multivariable linear systems with delay. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 14, 2, 181-187.

[25] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. *Krajowa Konf. Autom. Proc. Dyskretnych, 2004. 21-25.09.04 Zakopane*, 83-90.

[26] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Realization problem for positive multivariable linear systems with time-delay. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 14, 2, 101-107.

[27] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Stability and robust stability of positive linear discrete-time systems with pure delay. *10th IEEE Intern. Conf. On Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2004, 30.08-2.09.2004, Międzyzdroje*, 105-108.

[28] Klamka J. (1990) *Sterowanie układów dynamicznych*. Warszawa-Wrocław.

[29] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

[30] Sikora B. (2003) On controllability and minimum energy control of linear positive systems with delays. *Archives of Control Sciences*, **13**, 4, 431-444.

[31] Xie G., Wang L. (2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays, in: *Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.))*, Springer- Verlag, Berlin Heidelberg, 377-384.