dr inż. Krzysztof Bzdyra
mgr inż. Irena Bach
Politechnika Koszalińska
mgr inż. Mariusz Mądry
Uniwersytet Zielonogórski

Strategia przeszukiwania dedykowana dla problemu spełniania ograniczeń

Streszczenie. Rozwiązywanie złożonych problemów decyzyjnych wymaga stosowania systemów wspomagania decyzji. Dla każdego problemu można określić najlepszą strategię rozwiązywania. Strategia ta oznacza kolejność rozwiązywania problemów elementarnych. W artykule przedstawiono kryteria pozwalające oceniać strategie. Kryteria te szacują czas potrzebny na rozwiązanie problemu. Przedstawiony został przykład, w którym wielkość zbioru zmiennych decyzyjnych jest również zmienną decyzyjną

SEARCHING STRATEGY DEDICATED FOR CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEM

Abstract. Solving of complex, decision-making problems require to apply decision support systems. For each particular problem the best solving strategy can be define. That strategy means elementary subproblems solving sequence. The aim of the paper is to present criteria allows estimating the strategies. Those criteria estimate time, which is needed to solve the problems. The example, in which size of decisive variables set is also decisive variable, has been shown.

1. WSTĘP

Efektywne zarządzanie przedsiębiorstwem wiąże się z podejmowanieniem szybkich decyzji. Oznacza to konieczność rozwiązywania problemów spełniania ograniczeń. W tej klasie problemów nie formułuje się kryterium optymalizacji. Poszukiwane jest rozwiązanie spełniające zbiór ograniczeń.

Rozwiązywane problemy mają NP-trudny charakter. Poszukiwanie rozwiązania wiąże się z koniecznością rozwiązywanie wielu podproblemów. Przykładem jest problem planowania przepływu produkcji. W celu otrzymania rozwiązania końcowego należy rozwiązać problemy marszrutowania, porcjowania i harmonogramowania.

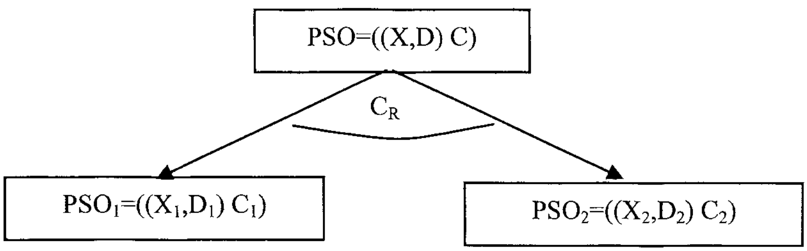
Ze względu na złożoność obliczeniową stosuje się systemy wspomagania decyzji. Aby systemy te działały efektywnie (szybko), należy stosować odpowiednią strategię rozwiązywania problemu. Strategią nazywa się kolejność rozwiązywania problemów elementarnych a także kolejność poszukiwania wartości zmiennych decyzyjnych.

Szacowanie czasu obliczeń ma duże znaczenie w przypadku stosowania metod planowania w logice ograniczeń. W celu ujednolicenia zapisu problemu spełniania ograniczeń opracowano model referencyjny dekompozycji. Model ten pozwala zapisać problemy elementarne jako PSO.

2. DEKOMPOZYCJA PSO

Problem PSO jest formułowany następująco:
PSO=((X,D), C)
gdzie:
X – zbiór zmiennych decyzyjnych
D – zbiór dziedzin zmiennych decyzyjnych
C – zbiór ograniczeń wiążących zmienne decyzyjne

Przyjmuje się, że problemy spełniania ograniczeń można dekomponować na podproblem. Schemat dekompozycji przedstawia rysunek 1.



Rys. 1 Schemat dekompozycji problemu PSO.

Dekompozycja PSO powinna spełniać następujące warunki[4] :

- Zbiór X jest sumą zbiorów X_2 i X_1
- Zbiór D jest sumą zbiorów D_1 i D_2
- Zbiór C jest sumą zbiorów C_1, C_2, C_R
- Żaden element zbioru X_1 nie może wystąpić w zbiorze X_2
- Ograniczenia w zbiorze C_1 dotyczą tylko i wyłącznie zmiennych ze zbioru X_1
- Ograniczenia w zbiorze C_2 dotyczą tylko i wyłącznie zmiennych ze zbioru X_2
- Każde ograniczenie w zbiorze C_R dotyczy, co najmniej jednej zmiennej ze zbioru X_1 i co najmniej jednej zmiennej ze zbioru X_2
- Zbiory X, X_1, X_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, C_R są niepuste.

Warto podkreślić, że ograniczeniem nazywane jest wyrażenie, w którym występują, co najmniej dwie zmienne decyzyjne np. $x_1+x_2=17$ czy $x_1/x_2>11$. Wyrażenia, w których występuje jedna zmienna decyzyjna nie są ograniczeniami (z punktu widzenia zasad dekompozycji PSO) gdyż można je zastąpić odpowiednio sformułowaną dziedziną, np. $D_1=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$, $x_1\neq 3$, $x_1\leq 6$ można zastąpić wyrażeniem $D_1=\{1,2,4,5,6\}$. Problemem elementarnym w dekompozycji nazywamy taki podproblem, który nie daje się dekomponować dalej z zachowaniem opisanych zasad dekompozycji.

Spełnienie opisanych warunków dekompozycji pozwala poszukiwać rozwiązania problemu PSO. Rozwiązanie jednego z problemów elementarnych powoduje ograniczenie dziedziny możliwych rozwiązań w pozostałych problemach elementarnych. Ograniczenie to wynika z istnienia niepustych zbiorów C_R. Na czas obliczeń wpływa jednak kolejność, w jakiej rozwiązywane są problemy elementarne [3].

Problem rozważany w artykule sformułowano następująco:

Dany jest problem klasy PSO. Znana jest dekompozycja tego problemu na problemy elementarne. Wiadomo, że kolejność rozwiązywania problemów elementarnych ma wpływ na czas obliczeń. Poszukiwana jest odpowiedź na pytanie: Czy możliwe jest oszacowanie zależności pomiędzy kolejnością rozwiązywania problemów elementarnych a czasem obliczeń.

3. STRATEGIA ROZWIĄZANIA

Jak zostało wcześniej wspomniane strategią rozwiązywania PSO, nazywana jest kolejność rozwiązywania jego problemów elementarnych. Kolejność, w jakiej poszukuje się wartości zmiennych decyzyjnych determinuje liczbę operacji podstawiania. Operacją podstawiania nazywa się nadawania zmiennej wartości z jej dziedziny [1]. Wpływ kolejności zmiennych na potencjalną liczbę podstawień zilustrowano poniższym przykładem.

Dane są trzy zmienne decyzyjne X, Y i Z. Dane są dziedziny zmiennych $D(X) \in <2, 3>$, $D(Y) \in <2, 5>$, $D(Z) \in <6, 8>$. Należy znaleźć strategię przeszukiwania przestrzeni rozwiązań z najmniejszą liczbą podstawień.

W rozpatrywanym przypadku występują trzy zmienne decyzyjne, stąd istnieje 6 możliwych kolejności podstawiania wartości zmiennych ($n!$, gdzie n oznacza liczbę zmiennych): (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Z, X, Y), (Z, Y, X), (Y, X, Z) i (Y, Z, X). Dwa przykładowe drzewa przeszukiwania wraz z potencjalnymi podstawieniami wartości zamieszczono na rys.2.

Jak łatwo zauważyć, liczba potencjalnych podstawień, zależy od przyjętej strategii przeszukiwania. W przedstawionym przykładzie oscyluje między 32 (rys. 2b) i 40 (rys. 2f). W przypadku strategii wykorzystującej kolejność (X, Z, Y), wynosi 32, w przypadku kolejności (Y, Z, X) liczba potencjalnych podstawień wynosi 40. Stąd, w rozpatrywanym przypadku strategię z najmniejszą liczbą nawrotów stanowi strategia (X, Z, Y). Liczba potencjalnych podstawień nie wpływa na liczbę potencjalnych rozwiązań, natomiast ściśle wpływa na czas poszukiwania rozwiązania.

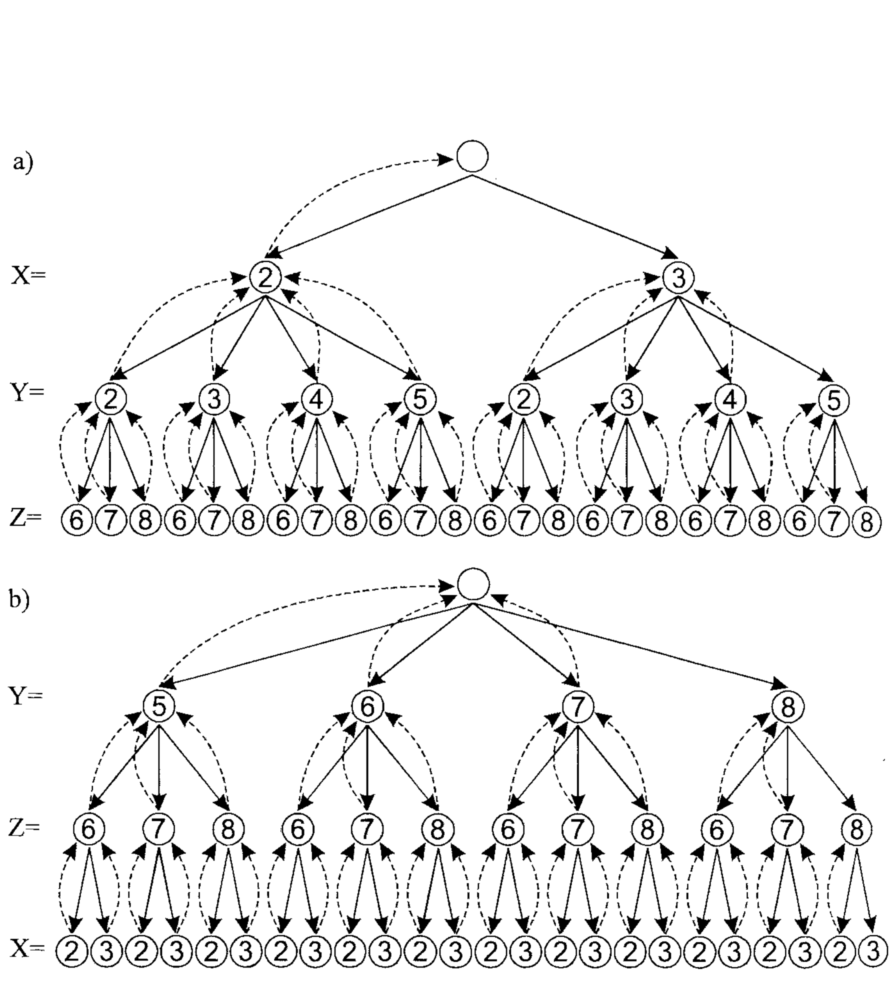
Celem oszacowania liczby potencjalnych podstawień sformułowano kryterium oceny LPP [3, 4],:

$$LPP = \sum_{i=1}^{Q} \prod_{j=1}^{i} D_j \qquad (1)$$

gdzie:

Q – liczba zmiennych

D_j – liczba wartości przyjmowanych przez j-tą zmienną

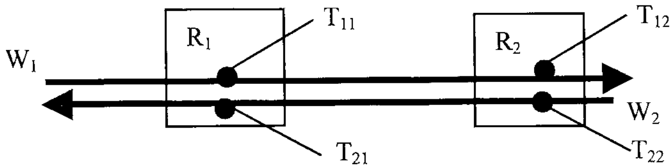


Rys. 2 Wpływ kolejności podstawiania zmiennych na liczbę nawrotów

Kryterium wyrażone zależnością (1) nie sprawdza się w sytuacji, gdy jedna ze zmiennych jest parametrem innej zmiennej. Na przykład, gdy zmienna X określa długość listy zmiennych decyzyjnych Y. W przykładzie ilustracyjnym przedstawiono taką właśnie sytuację. Zaproponowano alternatywny sposób obliczania LPP uwzględniający parametryczność zmiennych.

4. PRZYKŁAD ILUSTRACYJNY

Dany jest system składający się z dwóch zasobów produkcyjnych R_1 i R_2. W systemie produkowane są dwa wyroby W_1 i W_2. Marszruty tych wyrobów to odpowiednio ($R_1 - R_2$) i ($R_2 - R_1$). Znane są czasy operacji T_{ij} gdzie i – indeks wyrobu, j – indeks zasobu produkcyjnego. Schemat systemu na rys 3.



Rys. 3. Schemat sytemu

Tab. 2. Czasy operacji

T_{ij}	Czas
T_{11}	3
T_{12}	3
T_{21}	2
T_{22}	2

Proces jest realizowany partiami. Przyjmuje się, że partia przesyłana jest na następny zasób po skończeniu obróbki wszystkich detali na zasobie bieżącym. W każdej jednostce czasu tylko jeden detal może być obrabiany na zasobie. Zakłada się, że bufory, międzystanowiskowe są nieograniczone a czas transportu pomiędzy zasobami produkcyjnymi pomijalnie mały. Do przedstawionego systemu napłynęły 2 zlecenia, na wyrób W_1 zlecenie Z_1=5 sztuk i na wyrób W_2 zlecenie Z_2=7 sztuk. Należy odpowiedzieć na pytanie czy możliwa jest realizacja zleceń w horyzoncie planowania nie dłuższym niż H=35 umownych jednostek czasu.

4.1 Model matematyczny

Zmienne decyzyjne:

L_1, L_2 – liczby partii produkcyjnych; dziedzina (1,2);

WPP_1, WPP_2 – wektory o długościach L_1, L_2; dziedzina (1,5) dla WPP_1 i dziedzina (1,7) dla WPP_2;

$TRP_{i,j,k}$ termin rozpoczęcia obróbki i-tej partii, j-tego zlecenia, na k-tym zasobie

gdzie:

dla j=1, i=1,L_1, k=1,2; dla j=2, i=1,L_2, k=1,2

Przyjęto następujące ograniczenia:

Ograniczenie wielkości partii produkcyjnych. Elementy wektora WPP_x muszą spełniać ograniczenie:

$$c_1: \sum_{l=1}^{L_x} WPP_{x,l} = Z_x \tag{3}$$

gdzie:

L_x - liczba partii produkcyjnych x-tego zlecenia; $WPP_{x,l}$ - l-ta partia produkcyjna x-tego zlecenia; Z_x - wielkość x-tego zlecenia (wolumin zlecenia).

Termin realizacji. Z przyjętego modelu wynika, że realizacja wszystkich operacji technologicznych musi się zakończyć w horyzoncie. Odzwierciedla to poniższa zależność:

$$c_2:\ \underset{TRP_{i,j,k}}{\forall}\left(x=1..2; j=1..L_i; k=1..2\right)\quad TRP_{i,j,k}+WPP_{i,j}\cdot T_{i,k}\le H \tag{4}$$

gdzie:

$TRP_{i,j,k}$ - termin rozpoczęcia realizacji operacji technologicznych na k-tym zasobie, j-tej partii produkcyjnej, i-tego zlecenia; i - indeks zlecenia (wyrobu); j - indeks partii produkcyjnej; k - indeks zasobu systemu; $WPP_{i,j}$ - wielkość j-tej partii produkcyjnej i-tego zlecenia; $T_{i,k}$ - czas realizacji jednostkowej operacji technologicznej i-tego zlecenia na k-tym zasobie; H - rozpatrywany horyzont planowania.

Kolejność operacji. Operacje zaczynają się zgodnie z technologią

$$c_3:\ \begin{cases} \underset{x=1...L_1}{\forall} TRP_{1,x,1} < TRP_{1,x,2} \\ \underset{y=1...L_2}{\forall} TRP_{2,y,1} > TRP_{2,y,2} \end{cases} \tag{5}$$

gdzie:

$TRP_{i,j,k}$ - termin rozpoczęcia realizacji operacji technologicznych na k-tym zasobie, j-tej partii produkcyjnej, i-tego zlecenia;

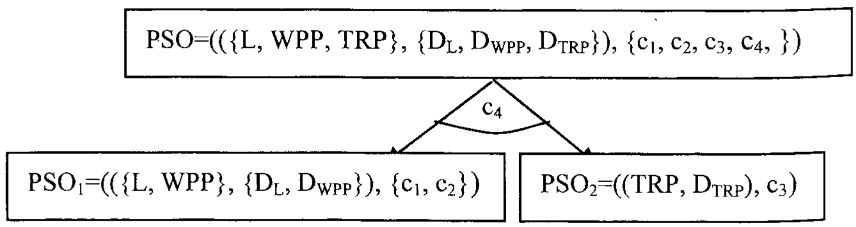
Dostęp do zasobu. Dla każdych dwóch operacji a i b realizowanych na tym samym zasobie operacje nie mogą się pokrywać w czasie. Poniższe ilustruje zależność:

$$c_4:\ \underset{x\in(TRP_A,\,TRP_A+WPP_A\cdot T_A),\,y\in(TRP_B,\,TRP_B+WPP_B\cdot T_B)}{\forall} x\neq y \tag{6}$$

gdzie:

TRP_i – termin rozpoczęcia i – tej operacji, WPP_i – wielkość i – tej partii, T_i – czas obróbki w i –tej operacji.

4.2 Dekompozycja problemu



Rys. 4. Dekompozycja rozpatrywanego problemu.

W rozważanym PSO wyodrębnione zostały dwa podproblemy elementarne, stąd występują 2 strategie ich rozwiązywania: [PSO_1, PSO_2] i [PSO_2, PSO_1]. W ramach PSO_1 ukonkretniane są dwie zmienne decyzyjne, co skutkuje dwoma strategiami rozwiązywania PSO_1: [L, WPP] i [WPP, L]. W PSO_2 występuje tylko jedna zmienna decyzyjna, stąd dla rozwiązywania PSO_2 jest tylko jedna kolejność ukonkretniania zmiennych [TRP]. Zestawiając występujące możliwe kolejności rozwiązywania podproblemów oraz kolejności dystrybucji zmiennych wewnątrz nich, otrzyma się 4 strategie rozwiązywania rozpatrywanego PSO. Dla strategii [PSO_1, PSO_2] występują dwie strategie dystrybucji zmiennych: [*L,WPP,TRP*] i [*WPP,L,TRP*]. Dla strategii [PSO_2, PSO_1] również występują dwie strategie dystrybucji zmiennych: [*TRP,L,WPP*] i [*TRP,WPP,L*]. Stąd, dla rozpatrywanego PSO istnieją 4 strategie dystrybucji zmiennych. Wyznaczono (wg zależności 1) liczbe potencjalnych podstawień dla każdej z nich. Minimalne oszacowanie dała strategia [*L,WPP,TRP*] – liczba podstawień $6{,}8\cdot 10^{15}$. Najgorsze rozwiązanie dała strategia [*TRP,WPP,L*] – liczba podstawień o 25% większa. Wyniki te nie uwzględniają jednak zależności pomiędzy wartością zmiennej L i rozmiarem zmiennych *WPP* i *TRP*.

Po uwzględnieniu tych zależności obliczenie liczby potencjalnych podstawień dla zmiennych decyzyjnych znacznie się komplikuje. Przykładowo dla zmiennej LPW wielkość ta wynosi:

$$LPW_{TRP}\left(L_1,L_2\right)=d_{TRP}^{\;r_{TRP}\left(L_1,L_2\right)}=d_{TRP}^{\;2\left(L_1+L_2\right)} \tag{7}$$

gdzie:

d_{WPP1} - liczba elementów w dziedzinie zmiennej WPP_1 (zlecenia V_1), r_{WPP1}- rozmiar zmiennej WPP_1, L_1 – liczba partii produkcyjnych zlecenia V_1, d_{WPP2}- liczba elementów w dziedzinie zmiennej WPP_2 (zlecenia V_2), r_{WPP2}- rozmiar zmiennej WPP_2, L_2 – liczba partii produkcyjnych zlecenia V_2.

Równie skomplikowane jest szacowanie strategii rozwiązywania. Dla przedstawionego przykładu oszacowano wszystkie strategie i porównano wyniki z otrzymanymi przy stosowaniu zależności (1). Wyniki porównania zestawiono w tabeli 2.

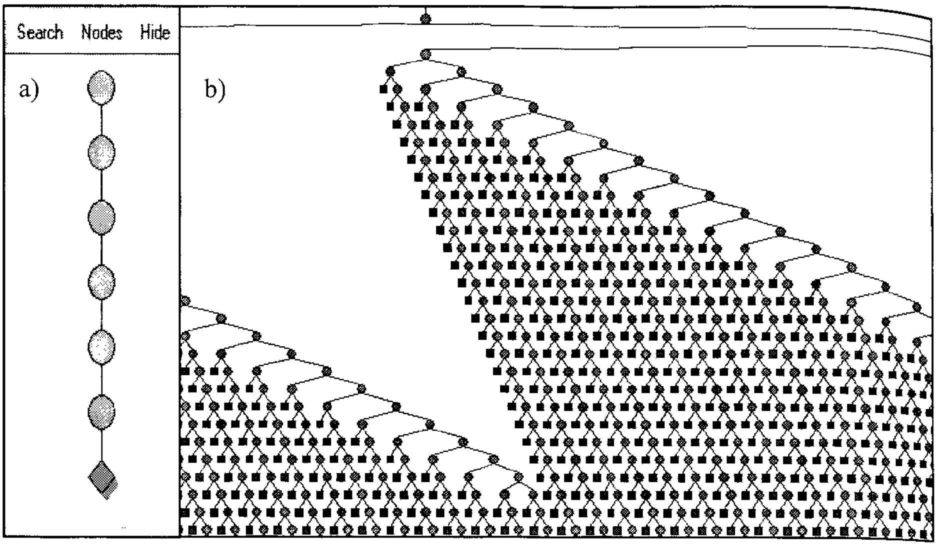
Tabela 2. Porównanie wartości oszacowań

Strategia	LPP	LPP (L_1,L_2)
[L, WPP, TRP]	6 891 402 229 385 804	1 723 393 015 401 120
[WPP, L, TRP]	6 891 402 229 **387 025**	1 726 **016 106 623 725**
[TRP, L, WPP]	6 89**8 434 272 472 105**	**2 364 172 887 263 121**
[TRP, WPP, L]	**8 615 659 195 344 366**	**8 615 659 195 344 366**

LPP – liczba potencjalnych podstawień bez uwzględniania zależności między zmiennymi, LPP(L_1, L_2) – liczba potencjalnych podstawień po uwzględnieniu zależności między zmiennymi.

W obu przedstawionych przypadkach najlepszą strategią była [*L,WPP,TRP*] a najgorszą [*TRP,WPP,L*]. Jednak po uwzględnieniu zależności pomiędzy zmiennymi decyzyjnymi różnica między oszacowaniem najgorszym a najlepszym znacznie się zwiększyła. Można przyjąć, że podejście takie pozwala zwiększyć „wrażliwość" oszacowania na stosowaną strategię. Celem porównania, obie wymienione strategie zostały zaimplementowane w języku Oz, wykorzystującym metody programowania w logice ograniczeń. Obliczenia przeprowadzono na komputerze klasy PC z procesorem Intel Celeron 2,8 GHz i 256 MB RAM. Poszukiwane było pierwsze rozwiązanie dopuszczalne problemu [5, 6].

Obliczenia dla pierwszej strategii [L, WPP, TRP] trwały poniżej 0,1 sekundy. Drzewo przeszukiwania dla tego przypadku przedstawiono na rysunku 5a. Znalezienie rozwiązania wymagało realizacji 6 kroków propagacji i podstawiania.



Rys. 5. Drzewa przeszukiwania: a) dla strategii [L, WPP, TRP], b) dla strategii [TRP, WPP, L] – fragment.

W przypadku strategii [TRP, WPP, L] ograniczone zasoby obliczeniowe użytego komputera uniemożliwiły dokończenie obliczeń. Obliczenia zostały przerwane po ok. 60 sekundach i 188000 kroków podstawiania i propagacji. Fragment wygenerowanego drzewa przeszukiwania przedstawiono na rysunku 5b.

5. PODSUMOWANIE

Przedstawione podejście pozwala ocenić prawdopodobieństwo szybkiego znalezienia pierwszego rozwiązania dopuszczalnego. Kryterium opisane zależnością (1) jest proste, ale nie uwzględnia powiązań między zmiennym decyzyjnymi. Uwzględnienie tych powiązań (podejście drugie) umożliwia dokładniejszą ocenę liczby potencjalnych podstawień.

W obu przypadkach najlepszą wartość oceny miała strategia [L, WPP, TRP] a najgorszą [TRP, WPP, L]. W pierwszym przypadku oszacowanie najgorsze było o 25% większe niż najlepsze. W przypadku drugim oszacowanie najgorszej strategii jest **pięciokrotnie** większe niż najlepszej. Można przyjąć, że stosowanie kryteriów uwzględniających powiązania między zmiennymi, pozwala lepiej zróżnicować strategie.

Wyniki rozważań teoretycznych potwierdzone zostały na drodze eksperymentalnej. Strategia [L, WPP, TRP], okazała się zdecydowanie szybsza niż strategia [TRP, WPP, L]. Możliwy jest, zatem wybór najefektywniejszej strategii rozwiązywania problemu jeszcze przed rozpoczęciem obliczeń.

Przedstawioną metodykę można stosować do projektowania zadaniowo zorientowanych systemach wspomagania decyzji. Systemy takie każdorazowo „wybierałyby" najlepszą strategię w zależności od parametrów rozwiązywanego problemu.

LITERATURA

[1] P. van Roy, S. Haridi: Programowanie. Koncepcje, techniki i modele. Wydawnictwo Helion. Gliwice 2005

[2] K. Bzdyra, I. Tomczuk, Z. Banaszak: *Programowanie z ograniczeniami w planowaniu produkcji MSP*. Zeszyty Naukowe Wydziału ETI Politechniki Gdańskiej, seria Technologie informacyjne, t. 6, Gdańsk, 2005, s. 167-174

[3] K. Bzdyra *Algorytmy planowania przepływu produkcji wykorzystujące metody programowania z ograniczeniami*. Rozprawa doktorska. Koszalin 2005.

[4] Bzdyra K., Tomczuk I., Banaszak Z.: *Production flow planning based on a reference model of constraint satisfaction problem decomposition*. Materiały konferencji Automatyzacja – Nowości I Perspektywy AUTOMATION 2005 Warszawa, s. 233-242

[5] Schulte Ch., Smolka G., Wurtz J.: *Finite Domain Constraint Programming in Oz*. DFKI OZ documentation series, German Research Center for Artificial Intelligence, Stuhlsaltzenhausweg 3, D-66123 Saarbrucken, Germany, 1998.

[6] www.mozart-oz.org