Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Politechnika Białostocka

ODPORNA STABILNOŚĆ JEDNOWYMIAROWYCH DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

W pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności liniowych dodatnich układów dyskretnych o jednym wejściu i jednym wyjściu, o macierzy stanu w postaci kanonicznej Frobeniusa. Podano warunek konieczny i wystarczający odpornej stabilności w przypadku ogólnym oraz proste warunki w następujących przypadkach szczególnych: 1) dodatni układ przedziałowy, 2) dodatni układ o współczynnikach zależnych liniowo lub wieloliniowo od niepewnych parametrów. Zaproponowane warunki porównano z odpowiednimi warunkami odpornej stabilności układów standardowych (niedodatnich). Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

ROBUST STABILITY OF SISO POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS

Simple necessary and sufficient conditions for robust stability of SISO linear positive discrete-time systems (with the state matrix in the canonical Frobenius form) in the general case and in two special cases: 1) interval positive system, 2) positive system with linear or multilinear uncertainty structure, are given. The proposed conditions are compared with the suitable conditions for standard (non-positive) discrete-time systems. Illustrative example is presented.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Problem analizy i syntezy takich układów jest tematem wielu publikacji od kilku lat, patrz np. monografie [12-14], pracę [3] i cytowaną tam literaturę. Problem badania odpornej stabilności układów dodatnich (ciągłych i dyskretnych) był rozpatrywany w pracach [7-11].

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem badania odpornej stabilności jednowymiarowych dodatnich układów dyskretnych o macierzy stanu w postaci kanonicznej Frobeniusa o niepewnych elementach. Jest on równoważny z problemem badania odpornej stabilności w sensie Schura wielomianów charakterystycznych układów dodatnich. Podamy ogólny warunek konieczny i wystarczający odpornej stabilności oraz proste warunki w pewnych przypadkach szczególnych.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Niech $\Re_+^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne oraz $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę układ dyskretny o niepewnych parametrach

$$x(i+1) = A(q)x(i) + Bu(i), \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $x(0)$, o macierzach

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(q) & -a_1(q) & -a_2(q) & \cdots & -a_{n-1}(q) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \tag{2}$$

przy czym $q = [q_1, q_2, \ldots, q_m]$ jest wektorem niepewnych parametrów zaś

$$Q = \{q \colon q_r \in [q_r^-, q_r^+], r = 1,2,\ldots,m\} \tag{3}$$

jest zbiorem wartości niepewnych parametrów (hiperprostopadłościan w przestrzeni niepewnych parametrów).

Układ (1) nazywamy wewnętrznie dodatnim (dodatnim), jeżeli $x(i) \in \Re_+^n$, $i \in Z_+$, dla dowolnego warunku początkowego $x(0) \in \Re_+^n$ i każdego ciągu sterującego $u(i) \in \Re_+$, $i \in Z_+$.

Układ (1) jest układem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \Re_+^{n\times n}$ i $B \in \Re_+^n$ [13, 14]. Jest to spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $b > 0$ oraz

$$a_k(q) \le 0, \ \forall q \in Q, \ k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{4}$$

Wielomian charakterystyczny układu (1) ma postać

$$w(z,q) = \det(zI - A(q)) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(q) z^k. \tag{5}$$

Układ (1) o niepewnych parametrach jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $q \in Q$ wszystkie zera $z_k(q)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ wielomianu (5) leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, tj. $|z_k(q)| < 1$, $\forall q \in Q$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Celem pracy jest podanie warunków odpornej stabilności dodatniego układu (1) w przypadku ogólnym (o dowolnej strukturze niepewności) i w pewnych przypadkach szczególnych (z przedziałowym oszacowaniem wartości współczynników wielomianu charakterystycznego (5) oraz o współczynnikach będących liniowymi lub wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów).

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Uogólniając podany w pracach [13, 14] warunek stabilności asymptotycznej układów dodatnich otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Dodatni układ (1) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie główne minory $\Delta_i(q)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ macierzy $\overline{A}(q) = I - A(q)$, o postaci

$$\overline{A}(q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0(q) & a_1(q) & a_2(q) & \cdots & 1+a_{n-1}(q) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

są dodatnie dla każdego $q \in Q$. ■

Ze wzoru (6) wynika, że $\Delta_i(q) = 1$ dla $i = 1,2,\dots,n-1$. Natomiast

$$\Delta_n(q) = \det \overline{A}(q) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(q). \tag{7}$$

Z powyższego i twierdzenia 1 wynika następujący warunek odpornej stabilności dodatniego układu (1).

Twierdzenie 2. Dodatni układ (1) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(q) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(q) > 0, \quad \forall q \in Q, \tag{8a}$$

lub równoważnie,

$$\min_{q \in Q} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(q) > -1. \tag{8b}$$ ■

Z twierdzenia 2 wynika podany poniżej prosty warunek konieczny odpornej stabilności.

Lemat 1. Dodatni układ (1) nie jest odpornie stabilny, jeżeli przynajmniej jeden ze współczynników $a_k(q)$, $k = 0,1,\dots,n-1$, spełnia warunek

$$a_k(q) \le -1 \text{ dla pewnego } q \in Q. \tag{9}$$

Dowód. Jeżeli zachodzi (9), to istnieje taki wektor $q \in Q$, dla którego $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(q) \leq -1$. Oznacza to, że warunek (8a) nie jest spełniony i układ (1) nie jest odpornie stabilny. ■

Warunek (8) jest ogólnym warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności dodatniego układu (1), tj. jest on słuszny w przypadku dowolnego charakteru zależności współczynników $a_k(q)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, od niepewnych parametrów. Zależność ta może być nieliniowa w przypadku ogólnym.

Warunek (8) można sprawdzić stosując obliczenia komputerowe z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania (dostępnego w specjalizowanych pakietach, np. MATLAB) służącego do wyznaczania minimum funkcji wielu zmiennych przy ograniczeniach. W pewnych przypadkach szczególnych, przy liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności, sprawdzenie warunku (8) nie wymaga obliczania minimum funkcji wielu zmiennych. Te przypadki szczególne zostaną omówione poniżej.

3.1. *Układ z przedziałowym oszacowaniem wartości współczynników*

Weźmy pod uwagę dodatni układ (1), w którym poszczególne współczynniki są jednocześnie niepewnymi parametrami, tj.

$$a_k(q) = q_k \in [q_k^-, q_k^+], \quad q_k^- \leq q_k^+ \leq 0, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{10}$$

Taki układ nazywamy układem przedziałowym. Jego wielomian charakterystyczny jest wielomianem przedziałowym, o postaci

$$w(z,q) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k z^k, \quad q_k \in [q_k^-, q_k^+]. \tag{11}$$

Twierdzenie 3. Dodatni układ przedziałowy, którego wielomian charakterystyczny jest wielomianem przedziałowym (11), jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(q^-) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_k^- > 0. \tag{12}$$

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia 2 i wzoru (10). ■

3.2. *Układ o współczynnikach liniowo lub wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów*

Weźmy pod uwagę dodatni układ (1), w którym współczynniki $a_k(q)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, są liniowymi lub wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów $q_r \in [q_r^-, q_r^+]$, $r = 1,2,\ldots,m$, przy czym spełniają one warunki (4).

Przypomnijmy, że funkcja $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ jest wieloliniowa, jeżeli dla każdego ustalonego i $(i = 1,2,...,m)$ jest ona liniową funkcją x_i w przypadku, gdy x_k, $k \neq i$, są ustalone.

Zbiór (3) (m-wymiarowy hiperprostopadłościan) ma $J = 2^m$ wierzchołków, które będziemy oznaczać przez $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, ..., $\overline{q}_J$, przy czym $\overline{q}_j = [q_1^j, q_2^j, ..., q_m^j]$, gdzie $q_r^j = q_r^-$ lub $q_r^j = q_r^+$, $r = 1,2,...,m$. Wierzchołkowi $\overline{q}_j$ zbioru Q odpowiadają współczynniki $a_k(\overline{q}_j)$, $k = 0,1,...,n-1$, występujące w macierzy $A(q)$, o postaci podanej w (2). Są one współczynnikami tzw. wierzchołkowych wielomianów charakterystycznych, odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru (3).

Twierdzenie 4. Dodatni układ (1) o liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D(\overline{q}_j) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\overline{q}_j) > 0, \quad j = 1,2,\ldots,J = 2^m. \tag{13}$$

Dowód. Konieczność jest oczywista, bowiem wierzchołki $\overline{q}_j$, $j = 1,2,\ldots,J$, należą do zbioru Q.

Aby wykazać warunek wystarczający zauważmy, że w przypadku, gdy współczynniki $a_k(q)$ $(k = 0,1,...,n-1)$ są liniowymi lub wieloliniowymi rzeczywistymi funkcjami niepewnych parametrów, to funkcja $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(q)$ osiąga wartości ekstremalne w zbiorze wartości ekstremalnych parametru (wektora) $q \in Q$, czyli w szczególności mamy

$$\min_{q \in Q} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(q) = \min_{j} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\overline{q}_j). \tag{14}$$

Zatem warunek (8) twierdzenia 2 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (13).
■

Zauważmy, że (13) są warunkami koniecznymi i wystarczającymi asymptotycznej stabilności tzw. układów wierzchołkowych (odpowiadających wierzchołkom zbioru Q)

$$x(i+1) = A(\overline{q}_j)x(i) + Bu(i), \quad j = 1,2,\ldots,J = 2^m, \tag{15}$$

gdzie

$$A(\overline{q}_j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(\overline{q}_j) & -a_1(\overline{q}_j) & -a_2(\overline{q}_j) & \cdots & -a_{n-1}(\overline{q}_j) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \tag{16}$$

których wielomiany charakterystyczne mają postać

$$w(z,\overline{q}_j) = \det(zI - A(\overline{q}_j)) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\overline{q}_j)z^k, \quad j = 1,2,\dots,J = 2^m. \tag{17}$$

Zatem dodatni układ (1) o liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne wszystkie układy wierzchołkowe (15).

3.3. *Porównanie warunków odpornej stabilności układu dodatniego i standardowego*

Rozpatrywany w pracy problem badania odpornej stabilności dodatniego układu (1) sprowadza się do sprawdzenia, czy wszystkie zera wielomianu charakterystycznego (5) o niepewnych współczynnikach leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Taki problem w przypadku układów standardowych jest nazywany w literaturze problemem badania odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu charakterystycznego o niepewnych parametrach. Dlatego też w dalszej części niniejszego punktu porównamy zaproponowane metody badania odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu charakterystycznego (5) układu dodatniego z istniejącymi metodami badania odpornej stabilności w sensie Schura tego wielomianu dla układów standardowych. Metody te są podane np. w monografiach [1, 2, 4, 5, 6].

Do badania odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu charakterystycznego (5) układów standardowych w przypadku ogólnym (dowolna struktura niepewności) służy podane niżej twierdzenie. Niech $S(q) = X(q) - Y(q)$, gdzie

$$X(q) = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1}(q) & a_{n-2}(q) & \cdots & a_2(q) \\ 0 & 1 & a_{n-1}(q) & \cdots & a_3(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}(q) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$Y(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0(q) \\ 0 & 0 & a_0(q) & \cdots & a_1(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_0(q) & a_1(q) & \cdots & a_{n-3}(q) \\ a_0(q) & a_1(q) & a_2(q) & \cdots & a_{n-2}(q) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Załóżmy, że istnieje przynajmniej jeden wektor $q \in Q$, dla którego wielomian (5) jest stabilny w sensie Schura (wszystkie jego zera leżą w otwartym kole jednostkowym).

Twierdzenie 5 [1]. Jeżeli jest spełnione powyższe założenie, to wielomian (5) jest odpornie stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione trzy poniższe warunki:

1) $w(1,q) \neq 0, \quad \forall q \in Q,$

2) $w(-1,q) \neq 0, \quad \forall q \in Q,$

3) $\det S(q) \neq 0, \quad \forall q \in Q.$ ■

Sprawdzenie warunków twierdzenia 5 jest o wiele trudniejsze w porównaniu ze sprawdzeniem warunku (8) twierdzenia 2. W szczególności dotyczy to sprawdzenia warunku 3) twierdzenia 5, w którym występują iloczyny współczynników $a_k(q)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, z których każdy jest funkcją (w ogólnym przypadku nieliniową) niepewnych parametrów.

Z rezultatów niniejszej pracy wynika, że jeżeli współczynniki wielomianu charakterystycznego (5) spełniają warunki (4), to do badania jego odpornej stabilności w sensie Schura można stosować twierdzenie 2. Jeżeli bowiem zachodzi (4), to (5) jest wielomianem charakterystycznym układu dodatniego.

Problem badania odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu przedziałowego (11) należy do trudnych z tego powodu, że nie istnieją warunki konieczne i wystarczające odpornej stabilności dla $n \geq 4$. Istniejące warunki są tylko konieczne lub tylko wystarczające. Należy tu podkreślić, że w przypadku odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu przedziałowego (11) nie ma odpowiednika twierdzenia Charitonowa, które pozwala w bardzo prosty sposób badać odporną stabilność w sensie Hurwitza wielomianu przedziałowego (np. [1, 2, 4-6]).

Podany w twierdzeniu 3 warunek (12) jest bardzo prostym warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu przedziałowego (11) układu dodatniego.

Do badania odpornej stabilności wielomianu (5) układu standardowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów służy twierdzenie krawędziowe. Zgodnie z tym twierdzeniem, wielomian (5) jest odpornie stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne w sensie Schura wszystkie wielomiany krawędziowe, odpowiadające wszystkim krawędziom zbioru Q (3). Mają one postać

$$w_{jk}(z,\lambda) = (1-\lambda)w(z,\overline{q}_j) + \lambda w(z,\overline{q}_k), \quad \lambda \in [0,1], \tag{20}$$

gdzie $w(z,\overline{q}_j)$ i $w(z,\overline{q}_k)$ są to wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające wierzchołkom zbioru (3), tworzącym krawędź $q_{jk}(\lambda) = (1-\lambda)\overline{q}_j + \lambda\overline{q}_k$, $\lambda \in [0,1]$, tego zbioru.

Liczba wielomianów krawędziowych jest równa $K = m2^{m-1}$, gdzie m jest liczbą niepewnych parametrów. Stabilność w sensie Schura wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności wielomianu (5) układu standardowego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów.

Natomiast stabilność w sensie Schura wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności tego wielomianu w przypadku układu dodatniego, tj. przy spełnieniu warunku (4).

W przypadku wielomianu (5) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów stabilność w sensie Schura wszystkich wielomianów krawędziowych oraz wypukłych kombinacji (20) wielomianów wierzchołkowych, odpowiadających wszystkim przekątnym zbioru Q (3) jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności w przypadku ogólnym. Jest ona również warunkiem wystarczającym tylko w pewnych przypadkach szczególnych, np. [2, 6].

Zgodnie z twierdzeniem 4, stabilność w sensie Schura wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu charakterystycznego (5) układu dodatniego o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Z powyższych rozważań wynika, że podane w pracy warunki odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu charakterystycznego (5) o niepewnych parametrach układu dodatniego (tj. przy spełnieniu warunku (4)) są bardzo proste w porównaniu z warunkami odpornej stabilności tego wielomianu charakterystycznego układu standardowego.

4. PRZYKŁAD

Weźmy pod uwagę dodatni układ opisany równaniem (1) przy $n=4$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, o postaci: $a_0(q)=-0.1+q_1q_2$, $a_1(q)=-0.3-q_1$, $a_2(q)=-0.2+q_2$, $a_3(q)=-0.3+q_1-q_2+q_1q_2$, przy czym $q=[q_1,q_2]$, gdzie

$$Q=\{q\colon q_1\in[-0.2,-0.1],\, q_2\in[-0.4,0.2]\}. \tag{21}$$

Dla zbioru (21) warunek (4) jest spełniony, tzn. $a_k(q)\le 0,\ \forall q\in Q,\ k=0,1,\ldots,3$.

Obliczając $D(q)$ ze wzoru (8a) otrzymamy $D(q)=1+\sum_{k=0}^{3}a_k(q)=0.1+2q_1q_2$. Łatwo sprawdzić, że $D(q)>0,\ \forall q\in Q$, bowiem

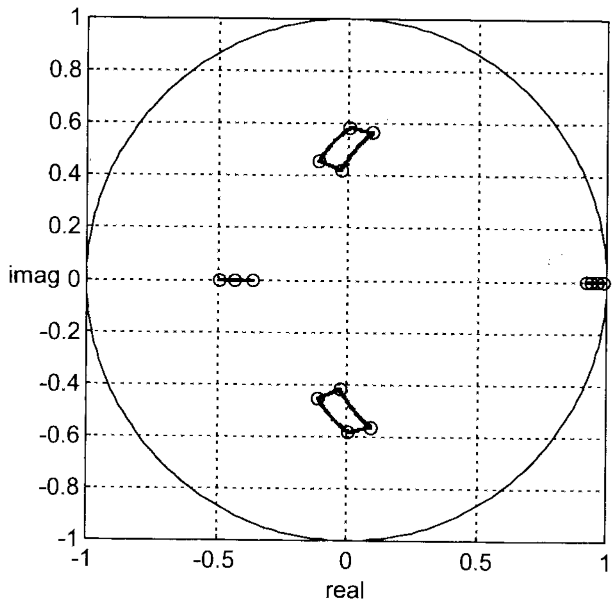
$$\min_{q\in Q}D(q)=\min_{q\in Q}(0.1+2q_1q_2)=0.1+2q_1^-q_2^+=0.02>0.$$

Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 2, że rozpatrywany układ dodatni jest odpornie stabilny.

Odporną stabilność układu możemy też zbadać stosując twierdzenie 4, bowiem współczynniki wielomianu charakterystycznego zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów. Wierzchołki zbioru (21) są następujące: $\overline{q}_1=[q_1^-,q_2^-]=[-0.2,-0.4]$, $\overline{q}_2=[q_1^-,q_2^+]=[-0.2,0.2]$, $\overline{q}_3=[q_1^+,q_2^+]=[-0.1,0.2]$, $\overline{q}_4=[q_1^+,q_2^-]=[-0.1,-0.4]$.

Obliczając $D(\overline{q}_j)=1+\sum_{k=0}^{3}a_k(\overline{q}_j)$, $j=1,2,\ldots,J=2^2=4$, otrzymamy $D(\overline{q}_1)=0.26$, $D(\overline{q}_2)=0.02$, $D(\overline{q}_3)=0.06$, $D(\overline{q}_4)=0.18$. Warunek (13) jest więc spełniony i rozpatrywany układ dodatni jest odpornie stabilny, zgodnie z twierdzeniem 4.

Celem ilustracji przeprowadzonych obliczeń na rysunku 1 pokazano brzegi zbioru spektralnego rozpatrywanego układu (tj. zbioru jego biegunów) oraz bieguny układów wierzchołkowych (15), oznaczone "o". Z rysunku 1 wynika, że wśród biegunów układów wierzchołkowych są bieguny o największej wartości bezwzględnej rozpatrywanego układu. Potwierdza to otrzymany rezultat, że o odpornej stabilności układu (1) o liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności decydują układy wierzchołkowe.



Rys. 1. Brzegi zbioru spektralnego oraz bieguny układów wierzchołkowych "o"

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności dodatniego układu (1), którego macierz stanu ma postać (2) przy warunku (4). Podano warunek konieczny i wystarczający odpornej stabilności w przypadku ogólnym (twierdzenie 2) oraz bardzo proste warunki konieczne i wystarczające odpornej stabilności w dwóch przypadkach szczególnych: dodatniego układu przedziałowego (twierdzenie 3) oraz dodatniego układu o liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności (twierdzenie 4). Zaproponowane warunki porównano z warunkami odpornej stabilności układów standardowych (niedodatnich).

Podane warunki odpornej stabilności układu (1) są też warunkami odpornej stabilności w sensie Schura wielomianu (5) o niepewnych współczynnikach, spełniających warunek (4). Rozważania można uogólnić na klasę dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami.

***

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

Literatura

1. Ackermann J., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.: Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. Springer-Verlag, London, 1994.
2. Barmish B. R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, London, 1994.
3. Benvenuti L., Farina L.: A tutorial on the positive realization problem. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, pp. 651-664, 2004.
4. Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.: Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall PTR, New York, 1995.
5. Białas S.: Odporna stabilność wielomianów i macierzy. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2002.
6. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Białystok, 1997.
7. Busłowicz M.: Odporna stabilność zaburzonych dodatnich układów liniowych stacjonarnych. Mat. V Konf. Nauk.-Techn. Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice, Poznań-Kiekrz, 2000, tom I, str. 13-16.
8. Busłowicz M.: Odporna stabilność rodziny macierzy Metzlera ze strukturą niepewności rzędu pierwszego. Mat. XXIV Miedzynar. Konf. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice-Ustroń, 2001, tom II, str. 335-338.
9. Busłowicz M.: Odporna stabilność rodziny macierzy Metzlera o liniowej strukturze niepewności. Mat. XXV Miedzynar. Konf. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice-Ustroń, 2002, tom II, str. 333-336.
10. Busłowicz M.: Odporna stabilność rodziny macierzy nieujemnych o liniowej strukturze niepewności. Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Zielona Góra, 2002, tom I, str. 81-84.
11. Busłowicz M.: Odporna stabilność dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego. Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Warszawa, 2005, tom 1, str. 179-182.
12. Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems: Theory and Applications. Wiley, New York, 2000.
13. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London, 2002.
14. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.