

Doktorant, mgr inż. Krzysztof Szyber  
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej  
ul. Nowowiejska 15/19  
00-665 Warszawa

## ODPORNY ALGORYTM PREDYKCYJNY Z IDENTYFIKACJĄ MODELU (MPC- $\lambda$ )

*Niniejsza praca prezentuje algorytm regulacji predykcyjnej z szybką identyfikacją MPC- $\lambda$ . Identyfikacja modelu dołączona jest do procedury predykcyjnej w celu podniesienia odporności klasycznego schematu MPC. Identyfikacja ta powinna być przeprowadzona bardzo szybko bez znaczącego wzrostu nakładów obliczeniowych. Dlatego zamiast pojedynczego modelu wykorzystywany jest zbiór modeli przy założeniu, że rzeczywisty obiekt jest jego elementem. Zbór ten definiowany jest jako kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych, a każdy wierzchołek dany jest w postaci dyskretnych liniowych równań stanu. Po przedstawieniu algorytmu zamieszczono wyniki badań symulacyjnych.*

## ROBUST PREDICTIVE ALGORITHM WITH MODEL IDENTIFICATION (MPC- $\lambda$ )

*The paper briefly reviews model predictive control (MPC) concept and examines new MPC algorithm with fast model identification. Identification steps are attached to predictive procedure in order to increase robustness of classical MPC schema. These steps should be performed very fast without significant increase of computational demand. This is achieved by introducing set of models and using them for prediction, instead single model as in standard approach. Above-mentioned set of models is defined as convex hull of given vertex models, each of which has discrete linear state space representation. The most important assumption is that real plant, controlled object, belongs to that set for all time. After algorithm description computer simulation are presented.*

### WSTĘP

Regulacja predykcyjna [1, 2] polega na wyznaczaniu w kolejnych chwilach czasu, na podstawie:

- dynamicznego modelu obiektu  $M$ ,
- pomiarów sygnałów wyjściowych obiektu, występujących w chwilach bieżącej i poprzednich  $\dots, x(t-2), x(t-1), x(t)$  oraz poprzednich sygnałów sterujących  $\dots, u(t-2), u(t-1)$ ,
- znanej trajektorii sygnału zadającego  $x^{zad}$ ,

sterowań  $u(t|t), u(t+1|t), \dots, u(t+N-1|t)$ , w ten sposób, aby zminimalizować różnicę między trajektorią zadaną  $x^{zad}$  a przewidywaną  $x(t+k|t)$  na horyzoncie predykcji  $N$ . Do sterowania obiektem regulacji wykorzystywany jest tylko pierwszy wyraz optymalnego ciągu sterowań  $u(t|t)$ . Notacja  $x(t+k|t)$  oznacza wyznaczoną

w chwili  $t$ , na podstawie modelu  $M$ , wartość wyjścia obiektu przewidywaną na chwilę  $t+k$ . Zadanie minimalizacji rozwiązywane w każdym kroku algorytmu regulacji predykcyjnej, w niniejszej pracy będzie rozważane w postaci.

$$\begin{aligned}
 J(x(t)) &= \min_{\{u(t+k|t)\}_{k=0}^{N-1}} \left[ \sum_{k=1}^N \|x(t+k|t)\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|u(t+k|t)\|_R^2 \right] \\
 u(t+k|t) &\in U_{Ogr}, k=0, \dots, N-1, x(t|t) = x(t) \\
 x(t+k+1|t) &= Ax(t+k|t) + Bu(t+k|t) \in X_{Ogr}, k=0, \dots, N-1 \\
 x(t+N|t) &\in X_T
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdzie  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  są wektorami stanu i sterowania,  $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$ , zaś macierze wagowe spełniają warunki  $0 < Q$ ,  $0 < R$ .  $N$  jest horyzontem predykcji i sterowania.  $X_{Ogr}$  jest zbiorem ograniczeń narzuconych na stan obiektu regulacji,  $U_{Ogr}$  reprezentuje ograniczenia na jego sterowanie, a  $X_T = \{x : u = K_T x \in U_{Ogr}\} \in \mathfrak{N}_{PInv}$  ograniczenia na stan końcowy.  $\mathfrak{N}_{PInv}$  jest rodziną zbiorów dodatnio inwariantnych, wewnątrz każdego ze zbiorów  $X \in \mathfrak{N}_{PInv}$  działa liniowy regulator sprzężenia od stanu utrzymujący trajektorie układu wewnątrz  $X$  i sprowadzający je do punktu równowagi (przykładowy sposób wyznaczania  $X_T$  podano w pracy [3]). W klasycznym algorytmie do predykcji zachowań obiektu wykorzystywany jest jego model, przy założeniu, że dokładnie odwzorowuje on zachowanie rzeczywistego odpowiednika. Obliczone sterownie zależy więc od przyjętego modelu, a wobec tego nasuwa się pytanie, jakie konsekwencje może przynieść rozbieżność między obiektem a modelem, tzw niepewność? Może to spowodować pogorszenie jakości regulacji, zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania (1.1) może okazać się pusty, może również doprowadzić do niestabilności układu regulacji. Jednak nie zawsze konsekwencje będą tak poważne. Algorytm MPC w każdej chwili do obliczeń wykorzystuje bieżący pomiar sygnałów z obiektu i na tej podstawie wyznaczany jest sygnał sterujący. To sprzężenie zwrotne może skutecznie przeciwdziałać nieporządanym skutkom niezgodności modelu z obiektem, chociaż nie w każdym przypadku, co można zaobserwować w poniższym przykładzie.

#### PRZYKŁAD 1

Dla klasycznego podejścia MPC zbadano dwa przypadki. W pierwszym założono, że obiekt i model będą opisane równaniami stanu o macierzach

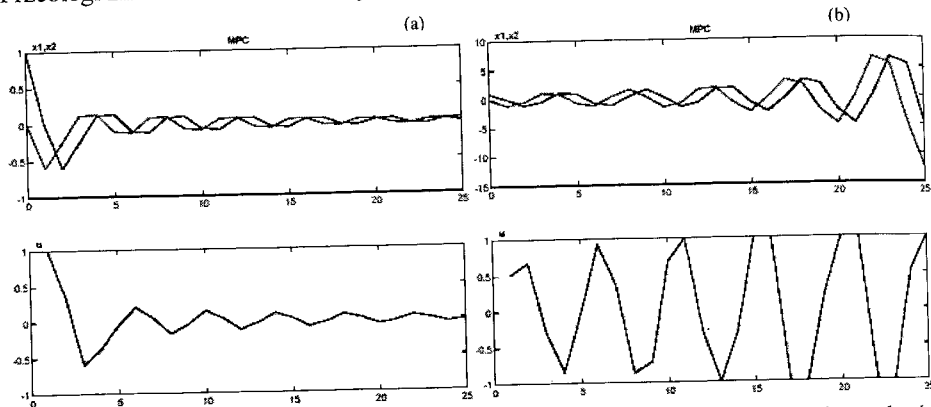
$$\begin{aligned}
 A_{obiett} = A_{model} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}, B_{obiett} = B_{model} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ W drugim zbadano zachowanie} \\
 \text{układu regulacji, gdy występuje rozbieżność pomiędzy obiektem} \\
 (A_{obiett} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}, B_{obiett} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \text{ a modelem } (A_{model} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}, B_{model} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).
 \end{aligned}$$

Do obliczeń wartości sygnału sterującego, w każdym kroku rozwiązywane było zadanie optymalizacji w postaci (1.1) o następujących parametrach.

$$x^T(0) = [1 \ 0], \quad N = 3, \quad \gamma_T = 5, \quad U_{Ogr} = [-1 \div 1], \quad X_{Ogr} = \mathfrak{R}^{n_x}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

$$X_T = \left\{ x : x^T P_T x \leq \gamma \right\} = \left\{ x : x^T \begin{bmatrix} 19.5639 & -0.2347 \\ -0.2347 & 21.2817 \end{bmatrix} x \leq \gamma_T \right\}, \quad K_T = [0.7492 \quad -0.9890]$$

Przebiegi zmian w czasie zmiennych stanu i sterowania, zaprezentowano na rysunku 1.



**Rysunek 1.** Algorytm MPC, a)  $A_{ob\text{iekt}} = A_{\text{model}}$ , b)  $A_{ob\text{iekt}} \neq A_{\text{model}}$ . Kolejno od góry zmienne stanu obiektu regulacji ( $x_1, x_2$ ) i sygnał sterujący ( $u$ ).

W warunkach niepewności, gdy znany jest tylko przybliżony opis sterowanego procesu, istotnego znaczenia nabiera model użyty do predykcji zachowania obiektu i w konsekwencji do obliczeń. Aby podkreślić ten fakt, odpowiednie zależności zadania (1.1) należy przepisać w sposób przedstawiony poniżej, gdzie podkreślono jawną zależność przewidywanego zachowania obiektu od użytego modelu.

$$J(x(t)) = \min_{\{u(t+k|t)\}_{k=0}^{N-1}} \left[ \sum_{k=1}^N \|x(t+k|t, M(t))\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|u(t+k|t)\|_R^2 \right] \quad (1.2)$$

$$u(t+k|t) \in U_{Ogr}, \quad k=0, \dots, N-1$$

$$x(t|t) = x(t), \quad M(t) \in \mathbf{M}$$

$$x(t+k|t, M(t)) \in X_{Ogr}, \quad k=1, \dots, N$$

$$x(t+N|t, M(t)) \in X_T$$

gdzie  $M(t)$  jest modelem użytym do predykcji zachowania obiektu w chwili  $t$ ,  $\mathbf{M}$  jest zbiorem modeli reprezentującym niepewność. Aby tak postawione zadanie można było rozwiązać potrzebny jest formalny opis zbioru  $\mathbf{M}$ . W literaturze można znaleźć dwa podstawowe sposoby opisu niepewności, podejście parametryczne i nieparametryczne. W dalszej części używany jest opis parametryczny oparty o kombinację wypukłą dyskretnych układów liniowych, przy założeniu, że obiekt

rzeczywisty należy do tak zdefiniowanego zbioru modeli, danego w postaci równań stanu.

$$\mathbf{M} = \left\{ x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) : (A(k), B(k)) \in \text{co} \left[ \left\{ (A_j, B_j) \right\}_{j=1}^L \right] \right\} \quad (1.3)$$

Jest to opis dość uniwersalny. Jako modele wierzchołkowe użyte zostały równania stanu, lecz zamiast nich wykorzystywać można równania regresyjne, odpowiedzi skokowe lub impulsowe. Dodatkowo, tak zapisana niepewność jest stosunkowo łatwa do włączenia jej w projekt algorytmu regulacji.

## ALGORYTM

W algorytmie MPC- $\lambda$  zaproponowano modyfikację klasycznego podejścia predykcyjnego biorąc pod uwagę następujący postulat: należy weryfikować i uaktualniać wiedzę o obiekcie podczas biegu procesu sterowania. Realizacja powyższej idei polega na włączeniu do procedury obliczającej sterowanie kroków pozwalających na aktualizację modelu obiektu. Identyfikacja przebiega według prostego schematu. Dla zbioru modeli  $\mathbf{M}$ , na podstawie poprzedniej wartości sterowania i zmierzonych zmiennych stanu ( $u(t-1), x(t-1)$ ), wyznaczane są przewidywane zachowania wierzchołkowych układów liniowych.

$$x^j(t|t-1) = A_j x(t-1) + B_j u(t-1), \quad j = 1, \dots, L$$

Dalej, uwzględniając bieżący pomiaru stanu obiektu, wybierany jest model najlepiej przybliżający zmierzoną wartość  $x(t)$ , kryterium wyboru polega na wyznaczeniu parametrów  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_L\}$  minimalizujących normę błędu predykcji wektora stanu.

$$\min_{\{\lambda_j\}_{j=1}^L} \left\| x(t) - \sum_{j=1}^L \lambda_j x^j(t|t-1) \right\|$$

Otrzymany model  $\hat{M} = \hat{M}(t)$  jest używany do wyliczania przewidywanych wartości zmiennych stanu występujących w funkcji celu algorytmu MPC.

$$x(t+k+1|t, \hat{M}) = \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j A_j x(t+k|t, \hat{M}) + \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j B_j u(t+k|t)$$

Formalny zapis pojedynczej iteracji algorytmu predykcyjnego MPC- $\lambda$  przedstawia się w sposób następujący. W każdym kroku przeprowadzana jest identyfikacja modelu, który następnie używany jest do obliczeń przyszłego stanu obiektu regulacji.

$$\bigvee_{j=1:L} x^j(t|t-1) = A_j x(t-1) + B_j u(t-1) \quad (1.4)$$

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\{\lambda_j\}_{j=1}^L} \left\| x(t) - \sum_{j=1}^L \lambda_j x^j(t|t-1) \right\|$$

Wartość sygnału sterującego obliczana jest, zgodnie z zasadą regulacji predykcyjnej opisaną we wstępie, na podstawie rozwiązania zadania optymalizacji (1.5).

$$J(x(t)) = \min_{\{u(t+k|t)\}_{k=0}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=1}^N \left[ \|x(t+k|t, \hat{M})\|_Q^2 \right] + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \|u(t+k|t, \hat{M})\|_R^2 \right] \right\} \quad (1.5)$$

$$u(t+k|t) \in U_{Ogr}, \quad x(t+k+1|t, \hat{M}) \in X_{Ogr}, \quad k=0, \dots, N-1$$

$$\forall_{k=0, \dots, N-1} M(t+k) = \hat{M} =$$

$$\left\{ Ax(t+k|t, \hat{M}) + Bu(t+k|t) : (A, B) = \left( \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j A_j, \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j B_j \right) \right\}$$

$$x(t|t, \hat{M}) = x(t)$$

$$x(t+k+1|t, \hat{M}) = \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j A_j x(t+k|t, \hat{M}) + \sum_{j=1}^L \hat{\lambda}_j B_j u(t+k|t), \quad k=0, \dots, N-1$$

$$x(t+N|t, \hat{M}) \in X_T$$

Praca [1] zawiera warunki, przy spełnieniu których układ regulacji z algorytmem MPC- $\lambda$  jest stabilny, nawet w przypadku niepewnego i niestacjonarnego obiektu.

## SYMULACJE

Zbadano różne scenariusze obrazujące wpływ niepewności na układ regulacji funkcjonujący z regulatorem w wersji MPC oraz MPC- $\lambda$ . Testowane algorytmy zaprojektowano dla następującego zestawu informacji o sterowanym obiekcie.

$$\mathbf{M} = \left\{ Ax + Bu : (A, B) \in co\{(A_1, B_1), (A_2, B_2)\} = co\left\{ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$A_{model} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{model} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad U_{Ogr} = [-1 \div 1], \quad X_{Ogr} = \mathfrak{R}^{n_x}, \quad x^T(0) = [1 \ 0]$$

Założono, że rzeczywisty obiekt regulacji, nieznan w czasie konstrukcji algorytmów, opisują równia o macierzach  $A_{obiett} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B_{obiett} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Zaprojektowano

algorytmy o parametrach podanych niżej.

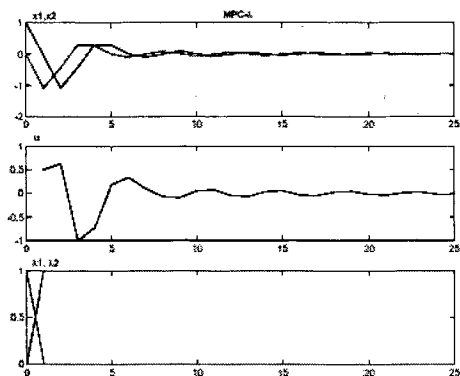
$$N = 3, \quad \gamma_T = 5$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1], \quad Q_\infty = \begin{bmatrix} 17.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_\infty = [1]$$

$$X_T = \left\{ x : x^T P_T x \leq \gamma_T \right\} = \left\{ x : x^T \begin{bmatrix} 19.5639 & -0.2347 \\ -0.2347 & 21.2817 \end{bmatrix} x \leq \gamma_T \right\}, \quad K_T = [0.7492 \quad -0.9890]$$

## PRZYKŁAD 2

Na początku porównano działanie regulatorów MPC- $\lambda$  i MPC z przykładu 1 w warunkach, gdy  $A_{obiett} \neq A_{model}$ . Przebiegi zmian w czasie zmiennych stanu, sterowania i parametru  $\hat{\lambda}$  przedstawia rysunek 2



**Rysunek 2.** Algorytm MPC- $\lambda$ . Kolejno od góry zmienne stanu, sygnał sterujący, optymalna kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych (wartości parametrów  $\lambda_1, \lambda_2 = 1 - \lambda_1$ ).

W pierwszym kroku następuje identyfikacja modelu w konsekwencji, czego algorytm MPC- $\lambda$  funkcjonuje z dokładnym opisem obiektu ( $A_{\text{obekt}} = A_{\text{model}}, B_{\text{obekt}} = B_{\text{model}}$ ). Układ regulacji działa stabilnie w przeciwieństwie do układu z algorytmem MPC, rysunek 1.

### PRZYKŁAD 3

Kolejna symulacja przebiegała według następującego scenariusza. Do momentu  $t=9$  następuje identyfikacja obiektu ( $A_{\text{obekt}} = A_{\text{model}}, B_{\text{obekt}} = B_{\text{model}}$ ). W chwili  $t=10$  ma miejsce przełączenie obiektu i zachowanie sterowanego procesu opisują macierze ( $A_{w1}, B_{w1}$ ). Dodatkowo, w chwili  $t=9$  pojawia się zakłócenie o amplitudzie  $x_{\text{zak}} = [-2 \ -2]^T$ . Stan ten utrzymuje się do czasu  $t=20$ , po którym następuje powrót do opisu ( $A_{\text{obekt}}, B_{\text{obekt}}$ ). Dla  $t=30$  następuje zmiana w obiekcie, który do momentu  $t=40$  definiowany jest przez macierze ( $A_{w2}, B_{w2}$ ), a gdy  $t=31$  występuje zakłócenie o wartości  $x_{\text{zak}} = [-1 \ -1]^T$ . W przedziale czasu  $\Delta t = 40 \div 50$  układ regulacji steruje obiektem o macierzach ( $A_{\text{obekt}}, B_{\text{obekt}}$ ), po czym dla  $t=50$  występuje kolejne zakłócenie o amplitudzie  $x_{\text{zak}} = [-5 \ -5]^T$  oraz przełączenie procesu, który teraz opisują macierze ( $A_{w3}, B_{w3}$ ). Stan ten utrzymuje się do chwili  $t=60$ , w której następuje powrót do opisu ( $A_{\text{obekt}}, B_{\text{obekt}}$ ), a dla  $t=62$  pojawia się zakłócenie  $x_{\text{zak}} = [2 \ 2]^T$ . Po upływie  $\Delta t = 8$ , w chwili  $t=70$  działanie obiektu charakteryzują równania o macierzach ( $A_{w2}, B_{w2}$ ), co obowiązuje do momentu  $t=75$ , po którym następuje zmiana na macierze ( $A_{\text{obekt}}, B_{\text{obekt}}$ ). Na koniec od  $t=81$  do  $t=90$  proces przebiega w warunkach opisanych ponownie macierzami ( $A_{w2}, B_{w2}$ ), które następnie zmieniają się na warunki wyrażone poprzez ( $A_{\text{obekt}}, B_{\text{obekt}}$ ). Użyte w opisie scenariusza elementy zdefiniowane są w sposób następujący.

$$(A_{\text{obiekt}}, B_{\text{obiekt}}) \in \{(A_{w1}, B_{w1}), (A_{w2}, B_{w2}), (A_{w3}, B_{w3}), (A_{w4}, B_{w4})\}$$

$$= \left\{ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (1.6)$$

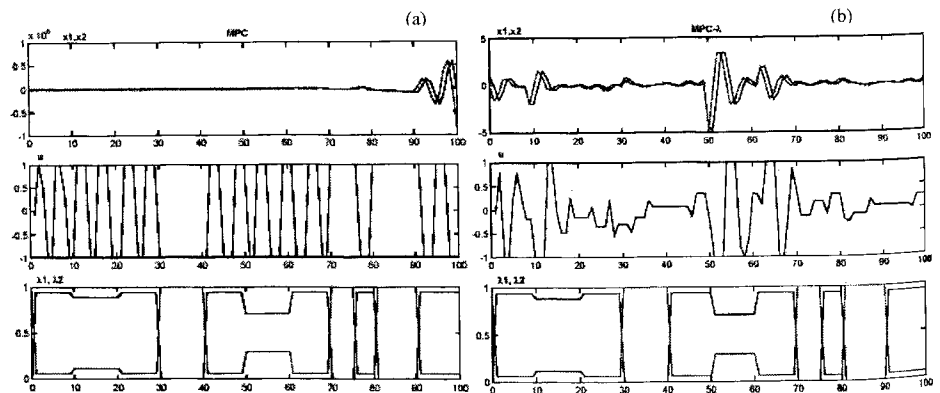
$$x(t+1) = A_{\text{obiekt}} x(t) + B_{\text{obiekt}} u(t) + x_{\text{zak}}(t)$$

Powyższa sekwencja zdarzeń jest równoważna definicji przedstawionej w następującej formie tabelarycznej.

Definicja scenariusza symulacji dla przykładu 3	
czasy przełączeń	obowiązujący opis $(A_{\text{obiekt}}, B_{\text{obiekt}})$
$t \in [10 \div 20]$	$(A_{w1}, B_{w1})$
$t \in [30 \div 40]$	$(A_{w2}, B_{w2})$
$t \in [50 \div 60]$	$(A_{w3}, B_{w3})$
$t \in [70 \div 75]$	$(A_{w2}, B_{w2})$
$t \in [81 \div 90]$	$(A_{w2}, B_{w2})$
pozostałe okresy czasu	$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Definicja sygnału zakłócającego dla przykładu 3	
czas wystąpienia	amplituda
$t_z=9$	$x_{\text{zak}} = [-2 \ -2]^T$
$t_z=31$	$x_{\text{zak}} = [1 \ 1]^T$
$t_z=50$	$x_{\text{zak}} = [-5 \ -5]^T$
$t_z=62$	$x_{\text{zak}} = [2 \ 2]^T$

Przebiegi czasowe zmiennych stanu, sterowania i parametru  $\lambda$  dla algorytmów MPC oraz MPC- $\lambda$ , odpowiadające scenariuszowi rozważanemu w niniejszym przykładzie, przedstawione zostały na rysunku 3.



**Rysunek 3.** Algorytm a) MPC oraz b) MPC- $\lambda$ . Kolejno od góry zmienne stanu, sygnał sterujący, optymalna kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych (wartości parametrów  $\lambda_1, \lambda_2 = 1 - \lambda_1$ ). Kombinacja  $\lambda_1, \lambda_2$  nie jest wykorzystywana przez algorytm.

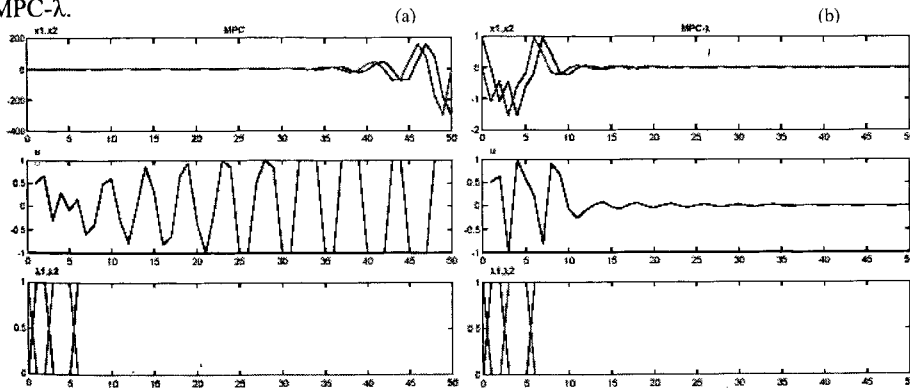
Z powyższych rysunków wynika, że procedura identyfikacji algorytmu MPC- $\lambda$  nadąża za zmianami w obiekcie, właściwy model jest dokładnie identyfikowany w kilku krokach po zmianie warunków pracy obiektu. Układ regulacji działa stabilnie. Regulator MPC w tych samych warunkach nie może zapewnić stabilnej pracy całości na skutek zakłóceń oraz rozbieżności pomiędzy obiektem a jego modelem.

#### PRZYKŁAD 4

Z przedstawionej dalej symulacji wynika, że podobny efekty daje odpowiednia sekwencja przełączeń w sterowanym obiekcie, bez oddziaływania sygnałów zakłócających. Scenariusz symulacji przedstawiono w następującej tabeli.

Definicja scenariusza symulacji dla przykładu 4	
czasy przełączeń	obowiązujący opis $(A_{\text{obiek}}, B_{\text{obiek}})$
$t \in [2; 5]$	$(A_{w2}, B_{w2})$
pozostałe okresy czasu	$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Przebiegi czasowe zmiennych stanu, sterowania i parametru  $\hat{\lambda}$  dla rozważanego scenariusza pokazano na rysunku 4a, algorytm MPC, oraz na rysunku 4b, algorytm MPC- $\lambda$ .



**Rysunek 4.** Algorytm a) MPC oraz b) MPC- $\lambda$ . Kolejno od góry zmienne stanu, sygnał sterujący, optymalna kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych (wartości parametrów  $\lambda_1, \lambda_2 = 1 - \lambda_1$ ). Kombinacja  $\lambda_1, \lambda_2$  nie jest wykorzystywana przez algorytm.

Symulacja pokazuje stabilizujące działanie algorytmu predykcyjnego z identyfikacją, w przeciwieństwie do klasycznego podejścia MPC. W tym miejscu należy zwrócić uwagę na fakt, że istnieją takie sekwencje zmian w obiekcie regulacji, które destabilizują również układ z algorytmem MPC- $\lambda$ . Może to nastąpić w sytuacji, kiedy identyfikacja nie nadąża za przełączeniami i do predykcji używany jest model znacznie różniący się od obiektu. W takich przypadkach proponuje się użyć odpornych algorytmów RMPC wykorzystujących optymalizację min-max [4].

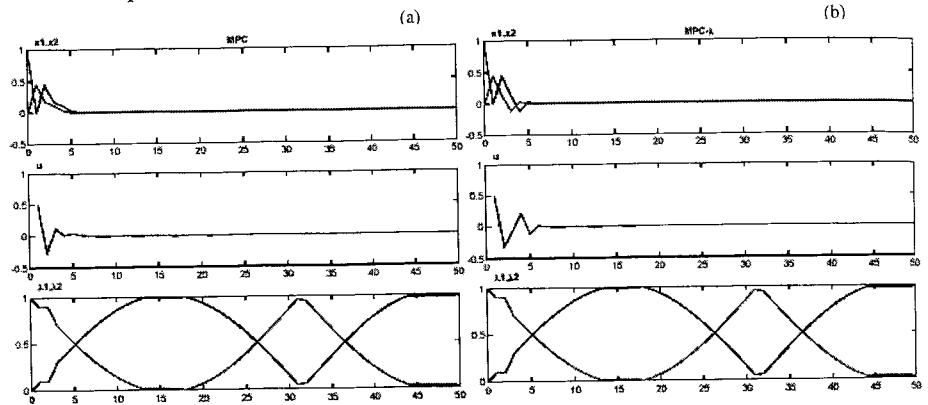


### PRZYKŁAD 5

Przedstawiony dalej scenariusz ma na celu sprawdzenie funkcjonowania algorytmów MPC i MPC- $\lambda$  w przypadku, gdy zmiany parametrów sterowanego obiektu odbywają się w sposób płynny. Definicję symulacji zawiera następująca tabela.

Definicja scenariusza A symulacji dla przykładu 5	
czasy przełączeń	Obowiązujący opis ( $A_{\text{obiekt}}, B_{\text{obiekt}}$ )
$t \in [0 \div 50]$	$(A, B) = ( \sin(0.1t) A_{w1} + (1 -  \sin(0.1t) )A_{w2},$ $ \sin(0.1t) B_{w1} + (1 -  \sin(0.1t) )B_{w2})$

Przebiegi czasowe zmiennych stanu, sterowania i parametru  $\hat{\lambda}$  dla algorytmów MPC oraz MPC- $\lambda$  przedstawione zostały na rysunkach 5a i 5b.



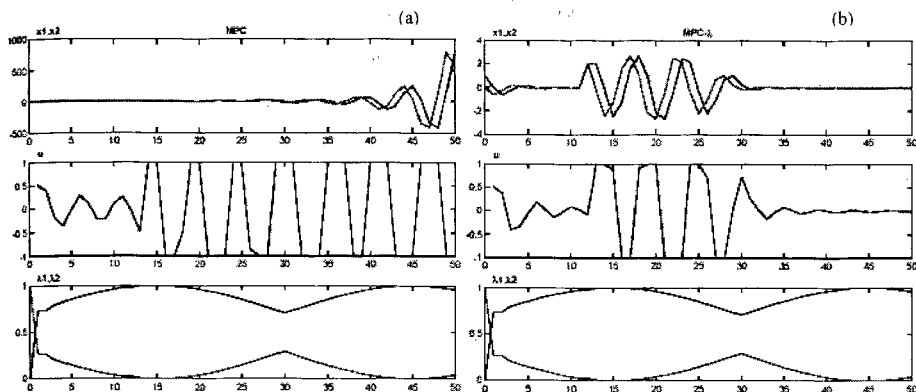
**Rysunek 5.** Algorytm a) MPC oraz b) MPC- $\lambda$ . Kolejno od góry zmienne stanu, sygnał sterujący, optymalna kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych (wartości parametrów  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 = 1 - \hat{\lambda}_1$ ). Kombinacja  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  nie jest wykorzystywana przez algorytm.

W tym przypadku zmiany parametrów obiektu mają charakter ciągły. Procedura identyfikacji nie nadąża za tymi zmianami, a model stosowany podczas optymalizacji jest zawsze niedokładny. Jednak w każdym kroku różnice między obiektem regulacji a użytym do obliczeń modelem są stosunkowo nie duże, co dla badanego scenariusza nie prowadzi do destabilizacji układu zamkniętego korzystającego algorytmów MPC oraz MPC- $\lambda$ . Stabilną pracę algorytmu MPC należy tłumaczyć tym, że duża rozbieżność pomiędzy obiektem a modelem nie jest permanentna tak, jak w przykładzie 1. W pewnych momentach czasu model stosowany do optymalizacji (w podejściu MPC) jest bardzo bliski rzeczywistemu odpowiednikowi. Stabilizujące własności metody MPC- $\lambda$  wynikają natomiast z braku dużych różnic między obiektem a modelem, co poprawia odporność algorytmu. Wniosek ten potwierdza symulacja przeprowadzona według następującego scenariusza.

Definicja scenariusza B symulacji dla przykładu 5	
czasy przełączeń	obowiązujący opis ( $A_{\text{obiekt}}, B_{\text{obiekt}}$ )
$t \in [0 \div 50]$	$(A, B) = ( \sin(0.1t) A_{w1} + (1 -  \sin(0.1t) )A_{w3},$ $ \sin(0.1t) B_{w1} + (1 -  \sin(0.1t) )B_{w3})$

Definicja sygnału zakłócającego dla przykładu 5, scenariusz B	
czas wystąpienia	amplituda
$t_z=12$	$x_{zak}=[2 \ 2]^T$

Przebiegi czasowe zmiennych stanu, sterowania i parametru  $\hat{\lambda}$  dla algorytmów MPC oraz MPC- $\lambda$  przedstawione zostały na rysunku 6.



**Rysunek 6.** Algorytm a) MPC oraz b) MPC- $\lambda$ . Kolejno od góry zmienne stanu, sygnał sterujący, optymalna kombinacja wypukła modeli wierzchołkowych (wartości parametrów  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 = 1 - \hat{\lambda}_1$ ). Kombinacja  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  nie jest wykorzystywana przez algorytm.

Przedstawione przebiegi potwierdzają skuteczność algorytmu stosującego identyfikację modelu oraz jego przewagę w stosunku do podejścia klasycznego. Małe różnice między modelem a obiektem występujące z kroku na krok nie destabilizują układu regulacji z MPC- $\lambda$ . Natomiast duże rozbieżności model-obiekt powodują, że regulator MPC nie jest w stanie ustabilizować całości.

## PODSUMOWANIE

Jeżeli opis obiektu jest niepewny, ale stacjonarny algorytm MPC- $\lambda$  bardzo szybko, przy braku zakłóceń w jednym kroku, identyfikuje model, poczym procedura minimalizacji wykorzystuje go do obliczeń optymalnego sterowania. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy zmiany w obiekcie regulacji są skokowe i występują rzadko, lub przebiegają w sposób płynny. Skuteczność algorytmu MPC- $\lambda$  w takich przypadkach proponuje się sprawdzać na drodze symulacyjnej.

## LITERATURA

- [1] P.Tatjewski „Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy”. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2002.
- [2] H.Michalska, D.Q.Mayne „Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems”. IEEE Transaction on Automatic Control vol. 38, no. 11, 1993.
- [3] M.V.Kothare, V.Venkataramanan, M.Morari „Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities”. Automatica, vol. 32, no. 10, pp. 1361-1379, 1996.
- [4] Y.Wang „Robust Model Predictive Control”. Praca doktorska. University of Wisconsin-Madison, 2002. Dostępne w Internecie :jbrwww.che.wisc.edu/jbr-group/theses/wang.ps.