

mgr inż. Konrad Andrzej MARKOWSKI
Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny,
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej,
ul Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

WYZNACZANIE MACIERZY STANU NA PODSTAWIE WIELOMIANU CHARAKTERYSTYCZNEGO

Streszczenie: *W pracy zaproponowano metodę wyznaczania elementów macierzy stanu dodatniego układu dwuwymiarowego (2D) opisanego za pomocą szczególnego przypadku modelu ogólnego – drugim modelem Fornasini-Marchesini używając teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań. Metodę zilustrowano przykładami numerycznymi.*

Abstract: *In this paper a method for determination elements of the state matrices of positive two-dimensional (2D) systems described by special case of general model – second Fornasini-Marchesini model using digraphs theory is presented. The method is illustrated by numerical examples.*

1. WPROWADZENIE

W ostatnim okresie obserwuje się spore zainteresowanie dodatnimi układami jednowymiarowymi [2] oraz dwuwymiarowymi [3], [5], [7]. Wiele problemów rozwiązanych dla układów jednowymiarowych (1D) nie jest jeszcze w pełni rozwiązanych dla układów dwuwymiarowych. Przykładowo: problem minimalnej dodatniej realizacji [7], [9], wyznaczenie dolnego [14] i górnego [6], [8] indeksu osiągalności, wyznaczenie obszaru indeksów osiągalności [11], [12], [13], wyznaczenie elementów macierzy stanu itd.

Celem tej pracy jest podanie metody wyznaczania elementów macierzy stanu na podstawie znajomości wielomianu charakterystycznego używając w tym celu teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań. Metoda ta stanowi pierwszy krok do wyznaczenia dodatniej minimalnej realizacji dodatnich układów dwuwymiarowych.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

Niech będzie dany dwuwymiarowy (2D) model ogólny opisany równaniami [7]

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= \mathbf{A}_0 x_{ij} + \mathbf{A}_1 x_{i+1,j} + \mathbf{A}_2 x_{i,j+1} + \mathbf{B}_0 u_{ij} + \mathbf{B}_1 u_{i+1,j} + \mathbf{B}_2 u_{i,j+1} \\ y_{ij} &= \mathbf{C} x_{ij} + \mathbf{D} u_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ i $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi w punkcie (i, j) , a $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $k=0, 1, 2$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

W dalszych rozważaniach będziemy zajmowali się szczególnym przypadkiem modelu ogólnego (1) dla $\mathbf{A}_0 = 0$ i $\mathbf{B}_0 = 0$ – drugim modelem Fornasinię-Marchesinię [7] z wieloma wejściami opisanego równaniami

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= \mathbf{A}_1 x_{i+1,j} + \mathbf{A}_2 x_{i,j+1} + \mathbf{B}_1 u_{i+1,j} + \mathbf{B}_2 u_{i,j+1} \\ y_{ij} &= \mathbf{C} x_{ij} + \mathbf{D} u_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (2)$$

Definicja 1. [7] Model opisany zależnością (2) nazywamy wewnętrznym dodatnim drugim modelem Fornasinię-Marchesinię jeżeli dla wszystkich warunków brzegowych

$$x_{i0} \in \mathbb{R}_+^n, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad i \quad x_{0j} \in \mathbb{R}_+^n, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \quad (3)$$

i każdego ciągu sterującego $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, mamy $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$ i $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^p$ dla $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie 1. [7] Drugi model Fornasinię-Marchesinię (2) jest wewnętrznym dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \mathbf{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k=1, 2, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \quad (4)$$

Po raz pierwszy pojęcie dwuwymiarowego grafu skierowanego oddziaływań $D^{(2)}$ zostało zaproponowane w pracy [4].

Definicja 2. Dwuwymiarowym grafem skierowanym oddziaływań $D^{(2)}$ nazywamy szóstkę $(\mathfrak{s}, \mathbb{V}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ gdzie, \mathfrak{s} jest źródłem $\mathfrak{s} = \{s_1, s_2\}$, $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ są podzbiorami $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ których elementy nazywamy odpowiednio \mathbf{A}_1 -lukami i \mathbf{A}_2 -lukami, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ są podzbiorami $\mathfrak{s} \times \mathbb{V}$ których elementy nazywamy odpowiednio \mathbf{B}_1 -lukami i \mathbf{B}_2 -lukami.

Dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 1.

Krok 1: Istnieje \mathbf{A}_1 -lęk (\mathbf{A}_2 -lęk) z wierzchołka v_j do wierzchołka v_i wtedy i tylko wtedy, gdy (i, j) -ty element macierzy \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_2) jest niezerowy.

Krok 2: Istnieje \mathbf{B}_1 -lęk (\mathbf{B}_2 -lęk) ze źródła s do wierzchołka v_j wtedy i tylko wtedy, gdy j -ty element macierzy \mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2) jest niezerowy.

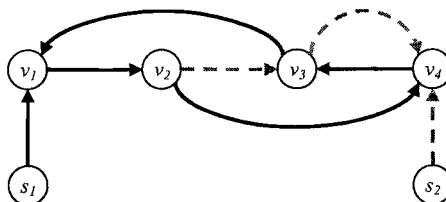
Uwaga 1. A_1 -łuki i B_1 -łuki rysujemy innym kolorem niż A_2 -łuki i B_2 -łuki.

W pracy przyjęto następującą konwencję. A_1 -łuki i B_1 -łuki rysujemy linią ciągłą natomiast A_2 -łuki i B_2 -łuki rysujemy linią przerywaną.

Przykładowo macierzom

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

odpowiada następujący dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1. Dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań układu (5)

Niżej zostaną wprowadzone podstawowe pojęcia z dziedziny teorii grafów, które będą wykorzystywane w dalszych rozważaniach [1], [4], [5].

Trasą w danym grafie oddziaływań $D^{(2)}$ nazywamy skończony ciąg łuków, w którym każde dwa kolejne wierzchołki v_j i v_i są albo sąsiednie albo identyczne co zapisujemy $(v_j, v_i)K$, gdzie v_j jest początkiem łuku, v_i jest końcem łuku a K jest $(A_1, A_2, B_1, \text{ lub } B_2)$ -łukiem. Przykładowo na rysunku 1 mamy następującą trasę: $(s_1, v_1)B_1, (v_1, v_2)A_1, (v_2, v_4)A_1, (v_4, v_3)A_1, (v_3, v_1)A_1, (v_1, v_2)A_1, (v_2, v_3)A_1, (v_3, v_4)A_2$. Trasa, w której wszystkie łuki są różne nazywamy **ścieżką**. Przykładowo na rysunku 1 mamy następującą ścieżkę: $(s_2, v_4)B_2, (v_4, v_3)A_1, (v_3, v_1)A_1, (v_1, v_2)A_1, (v_2, v_3)A_2, (v_3, v_4)A_2$. Trasa, w której wszystkie wierzchołki są różne nazywamy **drogą**. Przykładowo na rysunku 1 mamy następującą drogę: $(s_1, v_1)B_1, (v_1, v_2)A_1, (v_2, v_4)A_1, (v_4, v_3)A_1$. Jeżeli początkowy i końcowy wierzchołek w drodze jest taki sam wówczas drogę nazywamy **cyklem**. Przykładowo na rysunku 1 mamy następujący cykl: $(v_1, v_2)A_1, (v_2, v_4)A_1, (v_4, v_3)A_1, (v_3, v_1)A_1$ lub $(v_1, v_2)A_1, (v_2, v_3)A_2, (v_3, v_1)A_1$.

3. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Macierz transmitancji $T(z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ drugiego modelu Fornasiniiego-Marchesiniiego (2) dana jest zależnością [10]

$$\mathbf{T}(z_1, z_2) = \mathbf{C}[\mathbf{I}z_1z_2 - \mathbf{A}_1z_1 - \mathbf{A}_2z_2]^{-1}(\mathbf{B}_1z_1 + \mathbf{B}_2z_2) + \mathbf{D} \quad (6)$$

Macierz transmitancji (6) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{T}(z_1, z_2) = \frac{\mathbf{C} \text{Adj } \mathbf{H}(z_1, z_2)(\mathbf{B}_1z_1 + \mathbf{B}_2z_2)}{\det \mathbf{H}(z_1, z_2)} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{N}(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)} + \mathbf{D} \quad (7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z_1, z_2) &= [\mathbf{I}z_1z_2 - \mathbf{A}_1z_1 - \mathbf{A}_2z_2], \\ \mathbf{N}(z_1, z_2) &= \mathbf{C}[\text{Adj } \mathbf{H}(z_1, z_2)](\mathbf{B}_1z_1 + \mathbf{B}_2z_2), \\ d(z_1, z_2) &= \det \mathbf{H}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Z zależności (7) mamy

$$\mathbf{D} = \lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} \mathbf{T}(z_1, z_2) \quad (9)$$

ponieważ $\lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} \mathbf{H}^{-1}(z_1, z_2) = 0$.

Ścisłe właściwa część macierzy transmitancji (7) określona jest następująco

$$\mathbf{T}_{sp}(z_1, z_2) = \mathbf{T}(z_1, z_2) - \mathbf{D} = \frac{\bar{\mathbf{N}}(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)} \quad (10)$$

gdzie

$$d(z_1, z_2) = \det \mathbf{H}(z_1, z_2) = z_1^n z_2^n - \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij} z_1^i z_2^j \right) \quad (11)$$

dla

$$n \leq i + j \leq 2n - 1, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$

jest dwuwymiarowym wielomianem charakterystycznym.

Przykładowo dla układu rzędu 3-go wielomian charakterystyczny (11) drugiego modelu Fornasiniiego-Marchesiniego (2) ma postać

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= z_1^3 z_2^3 - \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 d_{ij} z_1^i z_2^j \right) = z_1^3 z_2^3 - d_{30} z_1^3 - d_{03} z_2^3 - d_{12} z_1 z_2^2 - d_{21} z_1^2 z_2 + \\ &\quad - d_{13} z_1 z_2^3 - d_{31} z_1^3 z_2 - d_{22} z_1^2 z_2^2 - d_{23} z_1^2 z_2^3 - d_{32} z_1^3 z_2^2 \end{aligned}$$

dla

$$3 \leq i + j \leq 5, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Nasze zadanie jest następujące. Dla danego wielomianu charakterystycznego (11) należy wyznaczyć elementy macierzy stanu A_1 i A_2 używając teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.

4. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Rozwiązanie zadania bazuje na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Jeżeli suma potęg $i + j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$ zmiennych $z_1^i z_2^j$ jest równa $i + j = k$, $k = n, n+1, \dots, 2n-1$, wówczas dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $(2n-i-j)$ wierzchołków i $(n-j)$ -łuków od macierzy A_1 i $(n-i)$ -łuków od macierzy A_2 .*

Dowód. Niech będzie dany wielomian charakterystyczny o postaci (11) z ograniczeniami (12) gdzie n jest najwyższą potęgą wielomianu charakterystycznego i rozmiarem macierzy stanu A_1 i A_2 . Zgodnie z definicją 2 dwuwymiarowy graf skierowany zawiera n wierzchołków. Każdemu wierzchołkowi przypisujemy zmienne $z_1 z_2$. (odpowiada to macierzy $I_n z_1 z_2$ w macierzy wielomianowej $H(z_1, z_2)$). Każdemu łukowi przypisujemy zmienną z_1 – jeżeli rysujemy A_1 -łuk od macierzy A_1 (odpowiada to macierzy $-A_1 z_1$ w macierzy wielomianowej $H(z_1, z_2)$) oraz zmienną z_2 – jeżeli rysujemy A_2 -łuk od macierzy A_2 (odpowiada to macierzy $-A_2 z_2$ w macierzy wielomianowej $H(z_1, z_2)$). Iloczyn wszystkich zmiennych w cyklu oraz niewykorzystanych wierzchołków daje nam informację o elemencie $-d_{ij} z_1^i z_2^j$ w wielomianie charakterystycznym (11). Używając zasady superpozycji która jest prawdziwa dla układów liniowych dokonujemy sumowanie dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań dla składowych $-d_{ij} z_1^i z_2^j$ wielomianu charakterystycznego $d(z_1, z_2)$, otrzymując ostateczną postać grafu dla naszego wielomianu (11). Z otrzymanego grafu skierowanego oddziaływań odczytujemy wartości elementów macierzy stanu A_1 i A_2 . ■

Uwaga 2. Jeżeli w dwuwymiarowym grafie skierowanym oddziaływań pojawią się dodatkowe cykle wówczas proponowana metoda nie daje jednoznacznego rozwiązania.

Uwaga 3. Używając Twierdzenia 2 możemy napisać wiele różnych macierzy stanu A_1 i A_2 odpowiadające temu samemu wielomianowi charakterystycznemu.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania elementów macierzy stanu A_1 i A_2 w na podstawie wielomianu charakterystycznego.

Procedura 2.

Krok 1: Dla wszystkich zmiennych $z_1^i z_2^j$ $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ spełniających (12) wyznaczamy dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań.

Krok 2: Sumujemy wszystkie dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań uzyskane w kroku 1.

Krok 3: Sprawdzamy czy w otrzymanym grafie skierowanym oddziaływań w kroku 2 nie pojawiły się dodatkowe cykle. Jeżeli NIE to idziemy do kroku 4. W przeciwnym przypadku kończymy działanie procedury.

Krok 4: Używając dwuwymiarowego grafu skierowanego wyznaczonego w kroku 2 piszemy macierze stanu A_1 i A_2 .

5. PRZYKŁADY

Niech będzie dany wielomian charakterystyczny o postaci

$$d(z_1, z_2) = z_1^3 z_2^3 - 2z_1^3 - 4z_1^2 z_2 - z_1^3 z_2 - 6z_1^2 z_2^3 \quad (13)$$

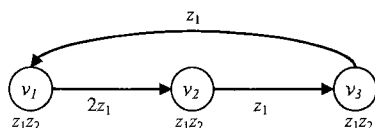
Wyznaczyć elementy macierzy stanu A_1 i A_2 .

Rozwiązanie 1. Używając Procedury 2 otrzymujemy kolejno.

Krok 1: Dla wszystkich zmiennych $z_1^i z_2^j$ $i, j=0, 1, 2, \dots, n$ wyznaczamy dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań.

1. $i = 3, j = 0 \Rightarrow i + j = k = 3$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n-i-j=6-3-0 = 3$ wierzchołków i $n - j = 3$ łuków od macierzy A_1 i $n - i = 0$ łuków od macierzy A_2 .

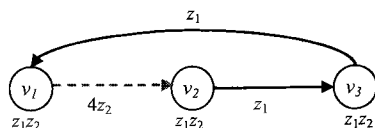
$$-d_{30} z_1^3 = -2z_1^3 \quad (14a)$$



Rysunek 2a. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (14a)

2. $i = 2, j = 1 \Rightarrow i + j = k = 3$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n-i-j=6-2-1 = 3$ wierzchołków i $n - j = 2$ łuków od macierzy A_1 i $n - i = 1$ łuk od macierzy A_2 .

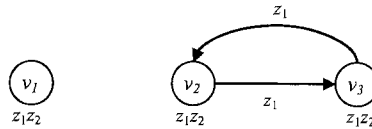
$$-d_{21} z_1^2 z_2 = -4z_1^2 z_2 \quad (14b)$$



Rysunek 2b. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (14b)

3. $i = 3, j = 1 \Rightarrow i + j = k = 4$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n - i - j = 6 - 3 - 1 = 2$ wierzchołków i $n - j = 2$ łuków od macierzy A_1 i $n - i = 0$ łuków od macierzy A_2 .

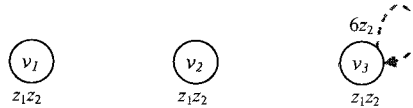
$$-d_{31}z_1^3z_2 = -z_1^3z_2 \quad (14c)$$



Rysunek 2c. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (14c)

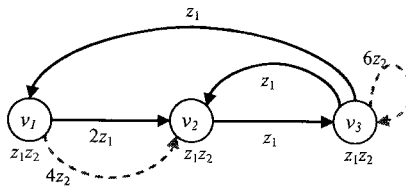
4. $i = 2, j = 3 \Rightarrow i + j = k = 5$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n - i - j = 6 - 2 - 3 = 1$ wierzchołka i $n - j = 0$ łuków od macierzy A_1 i $n - i = 1$ łuku od macierzy A_2 .

$$-d_{23}z_1^2z_2^3 = -3z_1^2z_2^3 \quad (14d)$$



Rysunek 2c. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (14d)

Krok 2: Sumujemy wszystkie dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań uzyskane w kroku 1.



Rysunek 3. Graf skierowany oddziaływań wielomianu charakterystycznego (13)

Krok 3: Sprawdzamy czy w otrzymanym grafie skierowanym oddziaływań w kroku 2 nie pojawiły się dodatkowe cykle. Jeżeli NIE to idziemy do kroku 4. W przeciwnym przypadku kończymy działanie procedury.

W dwuwymiarowym grafie skierowanym oddziaływań z rysunku 3 nie powstały dodatkowe cykle zatem istnieje jednoznaczne rozwiązanie.

Krok 4: Używając dwuwymiarowego grafu skierowanego wyznaczonego w kroku 2 piszemy macierze stanu A_1 i A_2 .

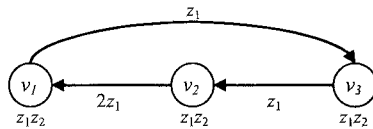
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \quad (15)$$

Rozwiązanie 2. Używając Procedury 2 otrzymujemy kolejno.

Krok 1: Dla wszystkich zmiennych $z_1^i z_2^j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ wyznaczamy dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań.

1. $i = 3, j = 0 \Rightarrow i + j = k = 3$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n - i - j = 6 - 3 - 0 = 3$ wierzchołków i $n - j = 3$ łuków od macierzy \mathbf{A}_1 i $n - i = 0$ łuków od macierzy \mathbf{A}_2 .

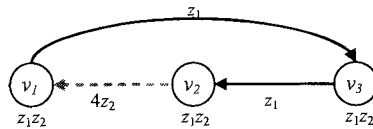
$$-d_{30} z_1^3 = -2z_1^3 \quad (16a)$$



Rysunek 4a. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (16a)

2. $i = 2, j = 1 \Rightarrow i + j = k = 3$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n - i - j = 6 - 2 - 1 = 3$ wierzchołków i $n - j = 2$ łuków od macierzy \mathbf{A}_1 i $n - i = 1$ łuk od macierzy \mathbf{A}_2 .

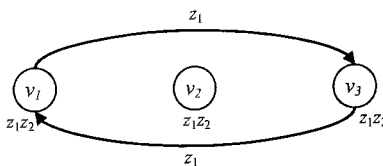
$$-d_{21} z_1^2 z_2 = -4z_1^2 z_2 \quad (16b)$$



Rysunek 4b. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (16b)

3. $i = 3, j = 1 \Rightarrow i + j = k = 4$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n - i - j = 6 - 3 - 1 = 2$ wierzchołków i $n - j = 2$ łuków od macierzy \mathbf{A}_1 i $n - i = 0$ łuków od macierzy \mathbf{A}_2 .

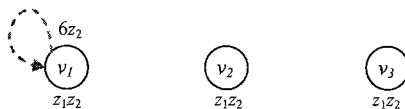
$$-d_{31} z_1^3 z_2 = -z_1^3 z_2 \quad (16c)$$



Rysunek 4c. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (16c)

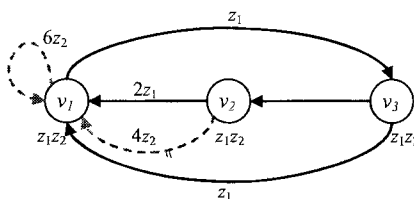
4. $i = 2, j = 3 \Rightarrow i + j = k = 5$ zatem dwuwymiarowy graf skierowany oddziaływań zawiera dokładnie jeden cykl składający się z $2n-i-j=6-2-3 = 1$ wierzchołka i $n-j = 0$ łuków od macierzy A_1 i $n-i = 1$ łuku od macierzy A_2 .

$$-d_{23}z_1^2z_2^3 = -3z_1^2z_2^3 \quad (16d)$$



Rysunek 4c. Graf skierowany oddziaływań wielomianu (16d)

Krok 2: Sumujemy wszystkie dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań uzyskane w kroku 1.



Rysunek 5. Graf skierowany oddziaływań wielomianu charakterystycznego (13)

Krok 3: Sprawdzamy czy w otrzymanym grafie skierowanym oddziaływań w kroku 2 nie pojawiły się dodatkowe cykle. Jeżeli NIE to idziemy do kroku 4. W przeciwnym przypadku kończymy działanie procedury.

W dwuwymiarowym grafie skierowanym oddziaływań z rysunku 5 nie powstały dodatkowe cykle zatem istnieje jednoznaczne rozwiązanie.

Krok 4: Używając dwuwymiarowego grafu skierowanego wyznaczonego w kroku 2 piszemy macierze stanu A_1 i A_2 .

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \quad (17)$$

Uwaga 4. Elementy macierzy stanu (14) i (17) są dodatnie zatem zgodnie z twierdzeniem I układ jest wewnątrznie dodatni.

6. WNIOSKI

W pracy zaproponowano prostą procedurę wyznaczania elementów macierzy stanu A_1 i A_2 szczególnego przypadku dodatniego liniowego układu dwuwymiarowego (2D) opi-

sanego za pomocą drugiego modelu Forasiniego-Marchesiniego używając w tym celu teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań. Zaproponowana metoda została zilustrowana dwoma przykładami numerycznymi, w których pokazano że daje ona różne poprawne rozwiązania dla tego samego wielomianu charakterystycznego. Problemem otwartym jest skonstruowanie algorytmu komputerowego oraz rozszerzenie tej metody na dwuwymiarowe układy dodatnie opisane za pomocą modelu ogólnego oraz modelu Roessera.

Pracę wykonano w ramach grantu KBN 3T11A00628

LITERATURA

- [1] Bang-Jensen J. and Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, London 2001.
- [2] Farina L. and Rinaldi S., *Positive linear systems: theory and applications*, Wiley-Interscience, Series on Pure and Applied Mathematics, New York, 2000.
- [3] Fornasini E. and Marchesini G., *Double indexed dynamical systems*, Math. Sys. Theory, 12:59-72, 1978.
- [4] Fornasini E. and Valcher M.E., *Directed Graphs, 2D State Models, and Characteristic Polynomials of Irreducible Matrix Pairs*, Linear Algebra and Its Applications, 263:275-310 (1997)
- [5] Fornasini E. and Valcher M.E., *On the positive reachability of 2D positive systems*, Positive Systems, LCNIS (2003), 297-304
- [6] Fornasini E. and Valcher M.E., *Controllability and reachability of 2D positive systems: a graph theoretic approach*, IEEE Transaction on Circuits and Systems I (in press)
- [7] Kaczorek T., *Positive 1D and 2D systems*, Springer Verlag, London 2003
- [8] Kaczorek T., *Reachability index of the positive 2D general models*, Bull. Pol. Acad. Tech., vol 52, No. 1, 2004
- [9] Kaczorek T., *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer Verlag, Londyn, 1985.
- [10] Kaczorek T., *Zastosowanie macierzy wielomianowych i wymiernych w teorii układów dynamicznych*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2004..
- [11] Markowski K.A, Kaczorek T., *New method of determination reachability index set of 2D systems*, ISTET, 4-7 July 2005, pp. 178-182, Lviv
- [12] Markowski K.A., *Determine of reachability subspace of two-dimensional positive linear systems described by Roesser model*, Electrotechnical Review, pp 89-93 March 2005.
- [13] Markowski K.A, *Minimalizacja pary macierzy (A,B) układu 2D opisanego modelem ogólnym za pomocą grafów oddziaływań*, XV Krajowa Konferencja Automatyki, t. I, pp. 105-108, Warszawa 27-30 czerwiec 2005
- [14] Markowski K.A, *Użycie grafów oddziaływań do wyznaczania obszaru osiągalności dodatnich układów 2D opisanych modelem ogólnym*, Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie OWD, 16-19. X 2004, Wisła.