

Mgr inż. Andrzej Ruszewski  
Wydział Elektryczny  
Politechnika Białostocka

## OBSZARY STABILNOŚCI UKŁADÓW REGULACJI Z KOREKTORAMI PI I PD

*W pracy rozpatrzono problem stabilności układu regulacji automatycznej złożonego z liniowego obiektu oraz korektora typu PI lub PD. Podano komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych korektorów. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie D podziału.*

### STABILITY REGIONS OF CONTROL SYSTEMS WITH PI AND PD COMPENSATORS

*The stability problem of control systems with PI and PD compensators is analyzed. Simple methods for determining the asymptotic stability regions in the parameter space of compensators are given. The methods proposed are based on the D-decomposition method.*

#### 1. WSTĘP

Podstawowym wymaganiem stawianym układom regulacji automatycznej jest ich asymptotyczna stabilność. Prosty sposób stabilizacji układów niestabilnych jest zastosowanie członów korekcyjnych pierwszego rzędu. Układ regulacji z wyznaczonym korektorem powinien być stabilny i spełniać określone kryteria jakości regulacji.

Problem doboru parametrów korektora może być rozwiązany poprzez wyznaczenie obszarów stabilności w przestrzeni parametrów korektora, tzn. zbiorów parametrów korektora, dla których układ regulacji jest stabilny. Do tego celu możemy wykorzystać metodę podziału D przestrzeni współczynników wielomianów charakterystycznych. Metoda ta została użyta w pracach [3, 5, 6, 7] do wyznaczenia obszarów stabilności i D-stabilności w przestrzeni parametrów regulatorów PI i układów pierwszego rzędu z opóźnieniem. W pracy [1] przedstawiono syntezę korektora pierwszego rzędu stabilizującego przedziałowy obiekt bez opóźnienia. Problem wyznaczania nastaw regulatorów PID z wykorzystaniem metody podziału D rozpatrywany był w pracy [8].

W niniejszej pracy rozpatrzony zostanie problem stabilności układów regulacji złożonych z liniowego obiektu o ogólnej postaci transmitancji operatorowej z opóźnieniem lub bez opóźnienia i szeregowego korektora. Zostaną podane komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności rozpatrywanych układów regulacji na płaszczyznach parametrów korektorów typu PI i PD. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D przestrzeni współczynników wielomianów charakterystycznych układów regulacji.

## 2. SFORMULOWANIE ZAGADNIENIA

Dany jest dynamiczny układ liniowy stacjonarny opisany transmitancją operatorową

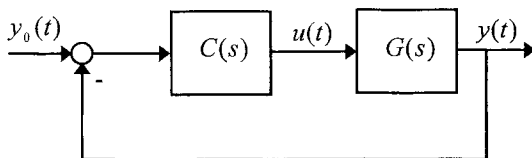
$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} e^{-sh} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + K + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + K + a_1 s + a_0} e^{-sh}, \quad m \leq n, \quad (1)$$

gdzie  $L(s)$  i  $M(s)$  są wielomianami o rzeczywistych współczynnikach,  $h$  jest opóźnieniem czasowym. Rozpatrzmy układ regulacji automatycznej złożony z liniowego obiektu (1) i szeregowego korektora o transmitancji

$$C(s) = K \frac{1 + sT_2}{1 + sT_1}, \quad (2)$$

gdzie  $K$  jest współczynnikiem wzmocnienia, a  $T_1, T_2$  są stałymi czasowymi. W zależności od wartości parametrów  $T_1$  i  $T_2$  transmitancja (2) opisuje korektor przyspieszający lub opóźniający fazę. Korektor (2) jest członem opóźniającym fazę (PI) w przypadku gdy  $T_1 > T_2$ , zaś przyspieszającym fazę (PD) gdy  $T_1 < T_2$ .

Schemat blokowy rozpatrywanego układu regulacji automatycznej jest pokazany na rysunku 1.



Rys. 1. Układ regulacji automatycznej.

Transmitancję operatorową korektora (2) możemy przedstawić w postaci

$$C(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s + p}, \quad (3)$$

gdzie  $p = \frac{1}{T_1}$ ,  $K_1 = pKT_2$ ,  $K_2 = pK$ .

W przypadku, gdy  $p = 0$  z zależności (3) otrzymamy transmitancję operatorową regulatora PI

$$C(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s}. \quad (4)$$

Quasi-wielomian charakterystyczny układu zamkniętego złożonego z obiektu (1) i szeregowego korektora (3) ma postać

$$w(s) = (K_1 s + K_2)L(s) \exp(-sh) + (s + p)M(s). \quad (5)$$

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy quasi-wielomian (5) jest asymptotycznie stabilny, tzn. wszystkie jego zera

mają ujemne części rzeczywiste. Zera quasi-wielomianu charakterystycznego są funkcjami jego współczynników. Przy ustalonej transmitancji obiektu (1) stabilność asymptotyczna quasi-wielomianu (5) zależy od wartości parametrów korektora (3). W przestrzeni parametrów korektora można wyznaczyć zbiór takich wartości jego parametrów, przy których quasi-wielomian (5) ma wszystkie zera o ujemnej części rzeczywistej.

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Zastosujemy metodę podziału  $D$  [2, 4] do wyznaczenia obszaru asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu (quasi-wielomianu (5)) w przestrzeni parametrów  $(K_1, K_2)$ , traktując  $p = 1/T_1$  (biegun korektora) jako zadany parametr. Granice podziału  $D$  dzielą przestrzeń  $(K_1, K_2)$ , na skończoną liczbę obszarów  $D(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Dowolny punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom  $K_1$  i  $K_2$ , dla których quasi-wielomian (5) ma dokładnie  $k$  zer o dodatniej części rzeczywistej. Obszar  $D(0)$ , dla którego liczba zer o dodatniej części rzeczywistej jest równa zero, jest obszarem asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5). W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności należy zbadać asymptotyczną stabilność quasi-wielomianu (5) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. kryterium Michajłowa [2]. Jeżeli obszar  $D(0)$  istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. Granice podziału  $D$  dzielimy na granice zer rzeczywistych oraz granice zer zespolonych. Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (5), który ma zero  $s = 0$ . Granicą zer rzeczywistych na płaszczyźnie  $(K_1, K_2)$  jest linia prosta

$$K_2 = -\frac{pM(0)}{L(0)}, \quad (6)$$

przy czym  $L(0) \neq 0$ .

Granica zer zespolonych odpowiada takim wartościom  $K_1$  i  $K_2$ , dla których quasi-wielomian (5) ma zera urojone sprzężone. Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem  $K_1$  i  $K_2$  równanie  $w(j\omega) = 0$ . Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (5) przy  $s = j\omega$ . Stosując oznaczenia

$$L(j\omega) = U_L(\omega) + j\omega V_L(\omega), \quad (7)$$

$$M(j\omega) = U_M(\omega) + j\omega V_M(\omega) \quad (8)$$

równanie zespolone  $w(j\omega) = 0$  można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych (w zapisie pominięto zależność  $U$  i  $V$  od  $\omega$ )

$$(K_1\omega U_L + K_2\omega V_L)\sin(\omega h) + (K_2U_L - K_1\omega^2 V_L)\cos(\omega h) - \omega^2 V_M + pU_M = 0, \quad (10)$$

$$(K_1\omega^2 V_L - K_2U_L)\sin(\omega h) + (K_2\omega V_L + K_1\omega U_L)\cos(\omega h) + \omega U_M + p\omega V_M = 0. \quad (11)$$

Rozwiązując układ równań (10) i (11) względem  $K_1$  i  $K_2$  odpowiednio otrzymamy

$$K_1 = \frac{(U_L V_M - U_M V_L - p V_L V_M) \omega^2 - p U_M U_L}{\omega(U_L^2 + \omega^2 V_L^2)} \sin(\omega h) + \frac{p V_L U_M - p U_L V_M - U_L U_M - V_L V_M \omega^2}{U_L^2 + \omega^2 V_L^2} \cos(\omega h), \quad (12)$$

$$K_2 = \frac{(U_M U_L - p U_M V_L + p V_M U_L + V_L V_M \omega^2) \omega}{U_L^2 + \omega^2 V_L^2} \sin(\omega h) + \frac{(U_L V_M - U_M V_L - p V_M V_L) \omega^2 - p U_L U_M}{U_L^2 + \omega^2 V_L^2} \cos(\omega h). \quad (13)$$

Linia krzywa o opisie parametrycznym (12), (13) przy zadanej wartości parametru  $p$  wyznacza na płaszczyźnie  $(K_1, K_2)$  granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (5).

W przypadku układu regulacji z obiektem bez opóźnienia ( $h = 0$  w (1)) granica zer rzeczywistych jest linią prostą (6), natomiast opis parametryczny granicy zer zespolonych przyjmuje postać

$$K_1 = \frac{p V_L U_M - p U_L V_M - U_L U_M - V_L V_M \omega^2}{U_L^2 + \omega^2 V_L^2}, \quad (14)$$

$$K_2 = \frac{(U_L V_M - U_M V_L - p V_M V_L) \omega^2 - p U_L U_M}{U_L^2 + \omega^2 V_L^2}. \quad (15)$$

Linia prosta (6) oraz linie krzywe (12), (13) lub (14), (15) wykreślone w funkcji parametru  $\omega \geq 0$  dzielą płaszczyznę  $(K_1, K_2)$  na obszary  $D(k)$ . Interesujący nas obszar  $D(0)$  jeśli istnieje (nie jest pusty) jest obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej.

### Przykład 1.

Należy wyznaczyć zbiór wartości parametrów korektora (3), przy których układ zamknięty z obiektem opisanym transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{27}{(s - 0.1)(s + 2.8)^3}. \quad (16)$$

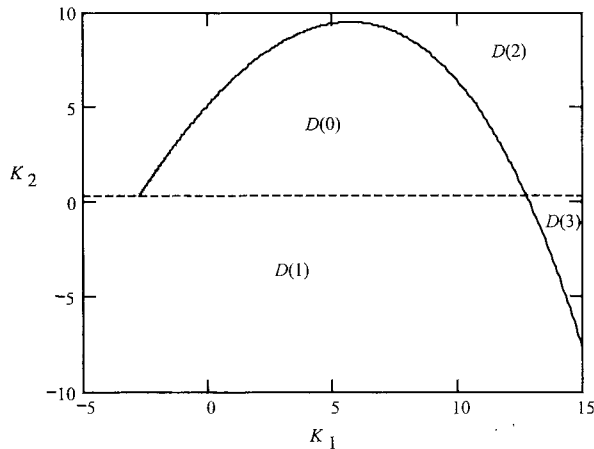
jest asymptotycznie stabilny

Wielomian charakterystyczny układu regulacji złożonego z obiektu (16) i szeregowego korektora (3) ma postać

$$w(s) = 27(K_1 s + K_2) + (s + p)(s - 0.1)(s + 2.8)^3. \quad (17)$$

Podział płaszczyzny  $(K_1, K_2)$  na obszary  $D(k)$  przy określonej wartości parametru  $p = 1/T_1 = 4$  jest pokazany na rysunku 2. Granica zer zespolonych (linia ciągła) została

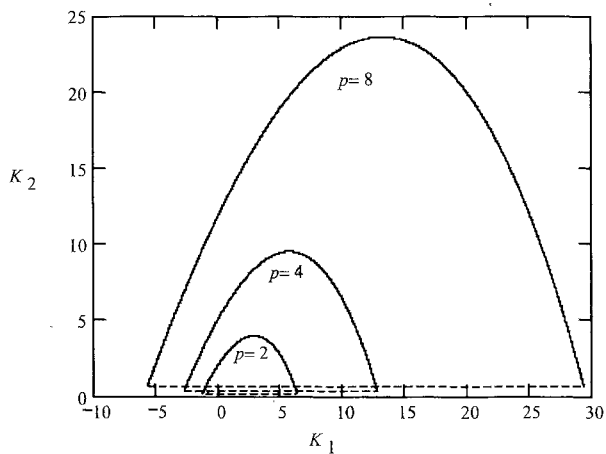
wyznaczona w funkcji parametru  $\omega \in [0, 3.26]$ . Na rysunku 2 linią przerywaną zaznaczono granicę zer rzeczywistych. Granice podziału dzielą przestrzeń  $(K_1, K_2)$  na obszary  $D(k)$ , dla których wielomian (17) ma  $k$  zer o dodatniej części rzeczywistej. Interesujący nas obszar  $D(0)$  jest obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji.



Rys. 2. Podział płaszczyzny  $(K_1, K_2)$  na obszary  $D(k)$ ,  $p = 1/T_1 = 4$ .

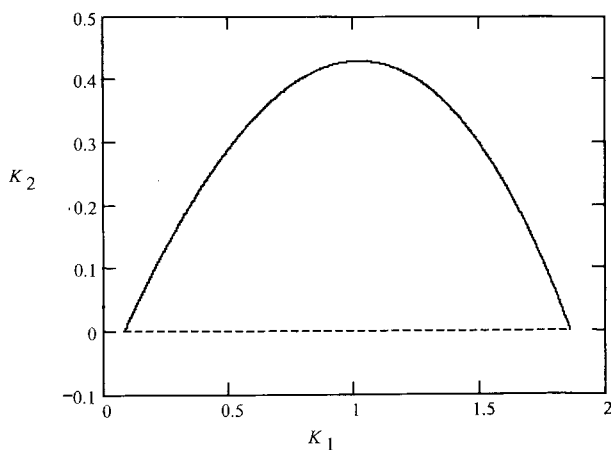
Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz obszaru stabilności, np. o współrzędnych  $K_1 = 5$ ,  $K_2 = 4$ , otrzymamy  $K_1 = pKT_2 = 5$ ,  $K_2 = pK = 4$ . Obliczając z powyższych zależności wartości parametrów korektora (2) otrzymamy  $T_1 = 0.25$ ,  $T_2 = 1.25$ ,  $K = 1$ . Wyznaczony korektor jest członem przyspieszającym fazę (PD), gdyż  $T_1 < T_2$ . Dla innego punktu z obszaru stabilności możemy uzyskać korektor typu PI,  $T_1 > T_2$  (np. wybierając  $K_1 = 0.2$ ,  $K_2 = 3$ , otrzymamy  $T_1 = 0.25$ ,  $T_2 = 0.067$ ,  $K = 0.75$ ). Widzimy, że zarówno szeregowy korektor PI, jak i PD może ustabilizować obiekt (16).

Na rysunku 3 przedstawiono obszary asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej wyznaczone dla kilku wartości parametru  $p$ . Z rysunku 3 wynika, że wzrost wartości  $p$  zwiększa zakresy dopuszczalnych wartości parametrów  $K_1$ ,  $K_2$  (tj.  $T_1$ ,  $T_2$ ), dla których rozpatrywany układ regulacji jest asymptotycznie stabilny. Wzrost wartości  $p$  jest równoważny z przesuwaniami bieguna korektora dalej w lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej.



Rys. 3. Obszary stabilności wielomianu (17) wyznaczone w przestrzeni  $(K_1, K_2)$  dla kilku wartości parametru  $p$ .

Na rysunku 4 przedstawiono obszar asymptotycznej stabilności układu regulacji automatycznej złożonego z obiektu (16) i regulatora PI (4). Na płaszczyźnie  $(K_1, K_2)$  granice podziału D tworzy granica zer rzeczywistych  $K_2 = 0$  oraz granica zer zespolonych o opisie parametrycznym (14), (15), którą wyznacza się w funkcji parametru  $\omega \in [0, 1.54]$  dla  $p = 0$ .



Rys. 4. Obszar stabilności wielomianu (17) wyznaczony w przestrzeni  $(K_1, K_2)$  dla  $p = 0$  (regulator PI).

### Przykład 2.

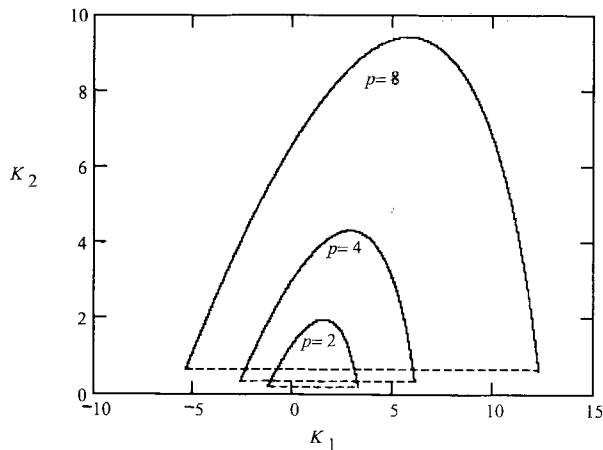
Należy wyznaczyć zbiór wartości parametrów korektora (3), który stabilizuje obiekt opisany transmitancją operatorową [8]

$$G(s) = \frac{27e^{-0.5s}}{(s-0.1)(s+2.8)^3}. \quad (18)$$

W rozpatrywanym przypadku quasi-wielomian charakterystyczny układu regulacji ma postać

$$w(s) = 27(K_1s + K_2)\exp(-0.5s) + (s+p)(s-0.1)(s+2.8)^3. \quad (19)$$

Obszary asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (19) wyznaczone dla kilku wartości parametru  $p$  są pokazane na rysunku 5. Podobnie jak w przykładzie poprzednim większym wartościom parametru  $p$  odpowiadają większe zakresy wartości parametrów  $K_1$ ,  $K_2$ , dla których rozpatrywany układ regulacji jest asymptotycznie stabilny.



Rys. 5. Obszary stabilności quasi-wielomianu (19) wyznaczone w przestrzeni  $(K_1, K_2)$  dla kilku wartości parametru  $p$ .

Z otrzymanych obszarów stabilności dla układów z opóźnieniem i bez opóźnienia wynika, że występowanie opóźnienia w obiekcie regulacji powoduje mniejsze zakresy dopuszczalnych wartości parametrów korektora, przy których układ zamknięty jest stabilny.

W prezentowanych rozważaniach ograniczono się tylko do podania sposobu wyznaczania zbiorów wartości parametrów korektorów, które zapewniają stabilność układu regulacji. W wyznaczonych obszarach stabilności możemy poszukiwać podobszarów, ze względu na określone wskaźniki jakości regulacji przebiegów przejściowych (czas regulacji, przeregulowanie) lub wskaźniki związane z rozkładem pierwiastków równania charakterystycznego (stopień stabilności, oscylacyjność).

### 4. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi stabilizacji za pomocą korektorów typu PI i PD dynamicznych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem i bez opóźnienia. Wykorzystując metodę podziału  $D$  podano komputerową metodę wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych członów korekcyjnych. Dowolny punkt z wyznaczonego obszaru odpowiada stabilności asymptotycznej układu regulacji (wszystkie bieguny położone są w otwartej lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej). Zaprezentowane w niniejszej pracy podejście może być wykorzystane do wyznaczenia zbiorów takich wartości parametrów korektora, przy których wszystkie bieguny układu zamkniętego będą leżały w określonych obszarach  $D$  zawartych w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Problem ten dla układów regulacji z regulatorem PI i obiektami pierwszego rzędu z opóźnieniem rozpatrywany był w pracach [5, 6, 7].

Proponowane podejście może być także uogólnione na korekcję równoległą oraz korekcję w sprzężeniu zwrotnym.

Do wyznaczenia obszarów stabilności rozpatrywanych układów regulacji automatycznej wykorzystano programy komputerowe opracowane w środowisku systemu MATLAB i MATHCAD. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

Pracę wykonano w ramach pracy własnej W/WE/2/05 finansowanej przez Komitet Badań Naukowych.

## LITERATURA

1. Busłowicz M., *Computation of robust first order compensators stabilizing interval plants*. Archives of Control Sciences, 1994, Vol. 3(XXXIX), No. 1-2, pp. 95-103.
2. Busłowicz M., *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*. Seria: Mon. Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom 1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, 2000.
3. Busłowicz M., Ruszewski A., *Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem*. Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, str. 89-94, Zielona Góra, 2002.
4. Górecki H., *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. WNT, Warszawa, 1971.
5. Ruszewski A., *Stabilność układu regulacji automatycznej z regulatorami PI i liniowymi obiektami pierwszego rzędu z opóźnieniem*. Mat. V Ogólnopolskich Warsztatów Doktoranckich, str. 320-325, Istebna, 2003.
6. Ruszewski A., *D-stabilizacja układów regulacji z opóźnieniem*. Mat. Konferencji Naukowo-Technicznej, Automation, str. 314-323, Warszawa, 2005.
7. Ruszewski A., *Obszary D-stabilności układów regulacji z obiektem pierwszego rzędu z opóźnieniem*, Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, str. 183-188, Warszawa, 2005.
8. Shafiei Z., Shenton A. T., *Tuning of PID-type controllers for stable and unstable systems with time delay*, Automatica, 1994, Vol. 30, No. 10, pp. 1609-1615.