

mgr inż. Leszek Cedro

dr hab. inż. Dariusz Janecki, prof. PŚk.

Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Zakład Informatyki i Robotyki

Al. Tysiąclecia PP 7, 25-314 Kielce, email: lcetro@eden.tu.kielce.pl,
djanecki@tu.kielce.pl

LINEARYZACJA MODELU MATEMATYCZNEGO SIŁOWNIKA HYDRAULICZNEGO

W pracy przedstawiono metodę linearyzacji modelu matematycznego układu hydraulicznego obciążonego dodatkową siłą. Układ hydrauliczny zamodelowano w dwóch postaciach: w postaci równań różniczkowych, oraz modelu quasi-liniowego. Uzyskany model uproszczony poddano weryfikacji z modelem dokładnym

LINEARISATION MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC SYSTEM

Abstract

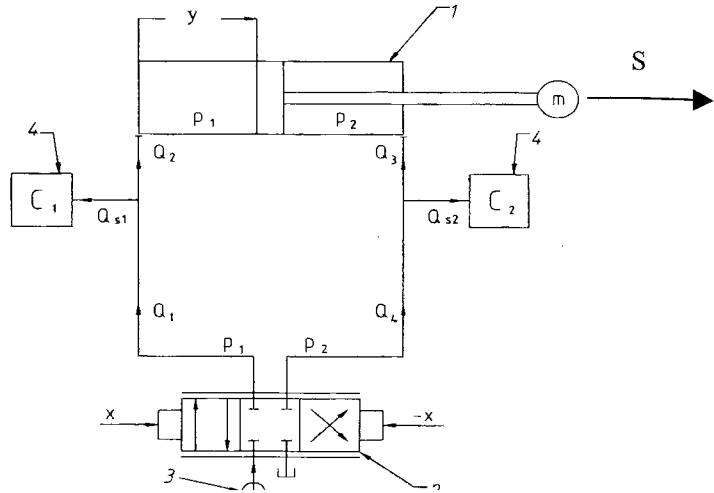
The paper presents the linearisation method for a hydraulic system to a quasi-linear form. The hydraulic system was designed in two forms: as difference equations, and as a quasi-linear model. The obtained simplified model was verified with the accurate model.

1. WSTĘP

Przedmiotem poniższej pracy jest linearyzacja modelu matematycznego siłownika hydraulicznego obciążonego siłą S . Linearyzacja układu nieliniowego, polega na aproksymacji funkcji nieliniowych opisujących obiekt funkcjami liniowymi w pewnym zakresie zmienności ich argumentów. Operację linearyzacji równań stanu można prowadzić zarówno wokół ustalonego punktu pracy, jak i dowolnej trajektorii odniesienia. Zastosowano metodę polegającą na rozwinięciu funkcji nieliniowej w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy, a następnie uwzględnieniu jedynie wyrazów liniowych. W wyniku linearyzacji otrzymano model quasi-liniowy, którego własności odpowiadają własnością modelu nieliniowego w szerokim zakresie zmian sygnału sterującego x i siły S . Przedyskutowano zastosowanie dynamicznych modeli quasi-liniowych w zagadnieniach identyfikacji parametrów oraz projektowania regulatorów ze zmiennymi parametrami (ze zmienną wiodącą).

2. MODEL MATEMATYCZNY

Rysunek 1 przedstawia przykład układu napędowego zasilanego stałym ciśnieniem p_o ,



Rys. 1 Układ hydrauliczny

w którym jako element dławiący został zastosowany rozdzielacz przepływowy (2), a jako odbiornik- siłownik hydrauliczny (1). Stałe ciśnienie p_o zostało wytworzone przez pompę (3). Znajdująca się w układzie ciecz pod stałym ciśnieniem wchodzi do rozdzielacza (2), którego zadaniem jest skierowanie cieczy do określonego miejsca obwodu hydraulicznego. W układzie zastosowano także akumulatory (4), których podstawową funkcją jest gromadzenie cieczy pod ciśnieniem w okresie braku lub zmniejszonego zapotrzebowania odbiornika i oddawania jej w razie zwiększonego zapotrzebowania, w krótkich okresach. Akumulatory te uwzględniają też objętość cieczy w przewodach doprowadzających. Następnie ciecz płynie do siłownika hydraulicznego i napierając na powierzchnię cylindra wywołuje siłę na tłoczniku. Ciecz zgromadzona w drugiej komorze siłownika zostaje wypchnięta i powraca przewodem do rozdzielacza.

Sygnalem sterującym x jest przemieszczenie suwaka w oknie rozdzielacza. Przyjęto, że sygnał może zmieniać się w przedziale $-1 \leq x \leq 1$. Dla $x = 0$ następuje zamknięcie okna rozdzielacza. Pełne otwarcie okna ma miejsce gdy $x = -1$ lub $x = 1$.

Przy budowie modelu hydraulicznego zastosowano następujące założenia upraszczające:

- wartość sygnału sterującego (wejściowego) w postaci przemieszczenia x suwaka jest równa długości odsłoniętej szczeliny dławiącej,
- układ jest zasilany ze stałego źródła ciśnienia, czyli $p_o = const$,
- objętościowy moduł ściśliwości cieczy jest stały w całym zakresie zmian ciśnienia w układzie,

- ciśnienie wyjściowe z rozdzielacza do zbiornika jest pomijalnie małe w stosunku do ciśnienia panującego w komorach siłownika,
- spadki ciśnienia między pompą a rozdzielaczem są równe zeru,
- zmiany objętości cieczy są pomijalnie małe.

Przy powyższych założeniach równania modelu matematycznego układu hydraulicznego są następujące:

$$\begin{aligned}
 v &= \dot{y}, \\
 m\dot{v} + Bv &= F_1 p_1 - F_2 p_2 + S, \\
 Q_1 &= \alpha x \sqrt{|p_0 - p_1|} H(x) + \alpha x \sqrt{|p_1|} H(-x), \\
 \frac{V_1}{E_c} \dot{p}_1 &= Q_1 - F_1 \dot{y} - K_v (p_1 - p_2), \\
 Q_4 &= -\alpha x \sqrt{|p_2|} H(x) - \alpha x \sqrt{|p_0 - p_2|} H(-x), \\
 \frac{V_2}{E_c} \dot{p}_2 &= Q_4 + F_2 \dot{y} + K_v (p_1 - p_2).
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:

Q_1, Q_4 – natężenie przepływu cieczy przez rozdzielacz, α – współczynnik natężenia przepływu cieczy przez okno rozdzielacza przy pełnym jego otwarciu, p_0 – ciśnienie zasilania, $H(x)$ – funkcja skokowa Heavyside'a (1 dla $x \geq 0$ i 0 dla $x < 0$), V_1 – objętość części układu, w której panuje ciśnienie p_1 , V_2 – objętość części układu, w której panuje ciśnienie p_2 , E_c – współczynnik sprężystości, K_v – współczynnik strat wolumetrycznych, v – prędkość tłoka, m – masa tłoka i elementów z nim związanych, B – współczynnik oporu ruchu (tarcia wiskotycznego), p_1, p_2 – ciśnienie na tłoku siłownika, F_1, F_2 – powierzchnie tłoka siłownika, S – zewnętrzna siła działająca na siłownik.

W dalszej części pracy w przeprowadzonych symulacjach przyjmujemy następujące nominalne wartości parametrów:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1 \cdot 10^{-6} [m^5 / Ns], & p_0 &= 4.6 \cdot 10^7 [N / m^2], \\
 K_v &= 5 \cdot 10^{-12} [m^5 / Ns], & F_1 &= 4.0 \cdot 10^{-2} [m^2], \\
 F_2 &= 3.9 \cdot 10^{-2} [m^2], & E_c &= 1.2 \cdot 10^9 [N / m^3], \\
 V_1 &= 0.02 [m^3], & V_2 &= 0.02 [m^3], \\
 B &= 1 \cdot 10^5 [Ns / m], & m &= 5 \cdot 10^2 [kg].
 \end{aligned}$$

3. LINEARYZACJA UKŁADU HYDRAULICZNEGO

Równanie układu z siłownikiem hydraulicznym (1) możemy zapisać w postaci równań stanu.

$$\dot{z} = Az + b(z) \cdot x + d \cdot S, \quad (2)$$

$$v = c^T z.$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{K_v \cdot V_1}{E_c} & \frac{K_v \cdot V_1}{E_c} & -\frac{F_1 \cdot V_1}{E_c} \\ \frac{K_v \cdot V_2}{E_c} & -\frac{K_v \cdot V_2}{E_c} & \frac{F_2 \cdot V_2}{E_c} \\ \frac{F_1}{m} & -\frac{F_2}{m} & -\frac{B}{m} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \cdot V_1}{E_c} \sqrt{p_0 - p_1} \\ -\frac{\alpha \cdot V_2}{E_c} \sqrt{p_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę, że przy stałych wartościach x_0 i S_0 układ osiąga stan równowagi w którym tłok siłownika porusza się ze stałą prędkością przy stałych wartościach ciśnień w komorach siłownika. Wykorzystamy ten fakt przy linearyzacji równań układu (2). Przyjmując $\dot{z} = 0$ w równaniu (2) otrzymujemy

$$Az_0 + b(z_0) \cdot x_0 + d \cdot S_0 = 0 \quad (3)$$

gdzie $z_0 = z_0(x_0, S_0)$ jest ustaloną wartością stanu z dla zadanych wartości x_0 i S_0 . Równanie (3) można rozwiązać analitycznie w przypadku, gdy $K_v = 0$. W przypadku ogólnym gdy $K_v \neq 0$ równanie (3) możemy rozwiązać numerycznie.

W równaniach stanu układu, wektor b jest nieliniową funkcją ciśnień p_1 i p_2 . Dokonując linearyzacji $b(z)$ w punkcie równowagi $z = z_0$ metodą rozwinięcia w szereg Taylora otrzymujemy

$$b(z) = b(z_0) + \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=z_0} (z - z_0),$$

skąd

$$\dot{z} = Az + (b(z_0) + \frac{\partial b}{\partial z} (z - z_0))x + d \cdot S = \tilde{A} \cdot z + \tilde{b} \cdot x + d \cdot S, \quad (4)$$

$$v = c^T z.$$

W powyższych równaniach macierz \tilde{A} i wektor \tilde{b} jest funkcją stanu z_0 , a więc pośrednio funkcją przesunięcia suwaka rozdzielacza x_0 i siły działającej na tłok S_0 .

Wprowadzając pojęcie operatora różniczkowania $s = \frac{d}{dt}$ równania układu w pobliżu położenia równowagi możemy zapisać w postaci

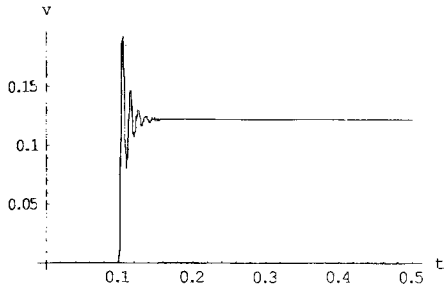
$$v = T(s)x + k_1 S, \quad (5)$$

gdzie

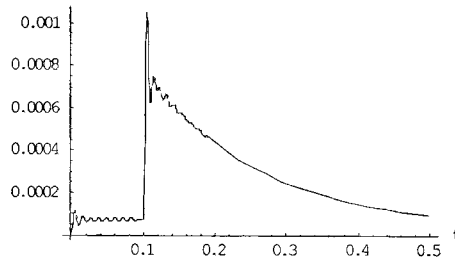
$$T(s) = c^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}, \quad k_1 = c^T (I - \tilde{A})^{-1} d$$

Transmitancja $T(s)$ posiada jedno zero i trzy bieguny, dwa zespolone i jeden rzeczywisty. Jej współczynniki oraz współczynnik k_1 określający wpływ obciążenia S na prędkość tłka i są funkcjami stanu równowagi x_0 i S_0 .

Na rysunku (2, 3) przedstawiono odpowiedź skokową układu rzeczywistego i odpowiedź skokową transmitancji $T(s)$ dla $S=0$. Widzimy, że w obu przypadkach odpowiedź ma charakter oscylacyjny. Jednak odpowiedź transmitancji $T(s)$ osiąga stan równowagi po znacznie dłuższym czasie niż model rzeczywistego układu (1).



Rys. 2 Prędkość tłka dla modelu układu rzeczywistego i modelu zlinearyzowanego



Rys. 3 Różnica prędkości dla modelu układu rzeczywistego i modelu zlinearyzowanego

Sugeruje to istnienie w transmitancji $T(s)$ bieguna, który nie ma swojego odwzorowania w rzeczywistych właściwościach układu siłownika.

Istotnie analiza zer i biegunów transmitancji $T(s)$ dla przykładowych wartości x_0 i S_0 (tabela 1) pokazuje, że zero transmitancji jest bliskie jednemu z jej biegunów. Oznacza, to że transmitancja $T(s)$ może być aproksymowana transmitancją drugiego rzędu, otrzymaną przez skrócenie zera i bliskiego mu bieguna.

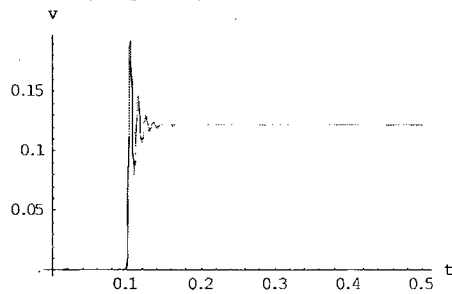
Tabela 1

x	$S[N]$	zero transmitancji $T(s)$	biegun rzeczywisty transmitancji $T(s)$
0.1	30000	-0.621017	-0.617263
0.1	0	-0.626091	-0.622276
1	30000	-6.22871	-6.19094
1	0	-6.27976	-6.24138

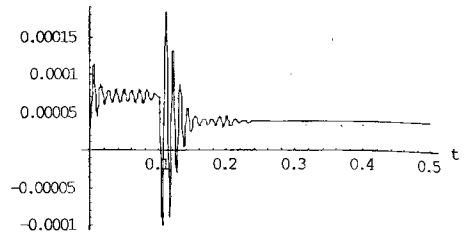
W rezultacie otrzymujemy transmitancję układu zlinearyzowanego postaci

$$T(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (6)$$

Na rysunku (4, 5) porównano odpowiedzi obiektu rzeczywistego i odpowiedzi transmitancji $T(s)$ o zredukowanym rzędzie. Widzimy, że zgodność odpowiedzi skokowych jest wysoka.



Rys. 4 Prędkość tłoka dla modelu układu rzeczywistego i modelu zlinearyzowanego



Rys. 5 Różnica prędkości dla modelu układu rzeczywistego i modelu zlinearyzowanego

4. MODEL QUASI-LINIOWY SIŁOWNIKA

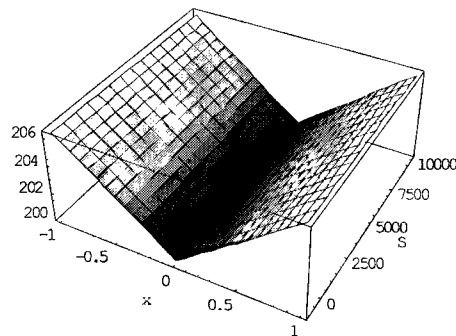
W otoczeniu wybranego punktu x_0 i S_0 równania obiektu możemy zastąpić równaniem różniczkowym liniowym postaci

$$\ddot{v} + a_1 \dot{v} + a_2 v = bx + k_2 S \quad (7)$$

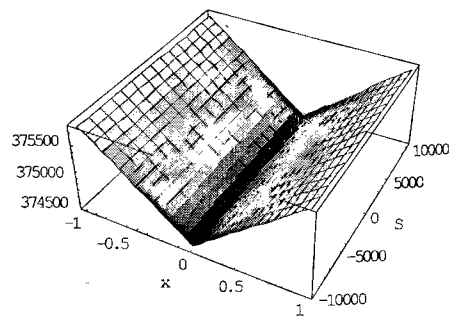
z $k_2 = k_1 a_2$. Zbadamy jak parametry modelu a_1 , a_2 , b i k_2 zależą od punktu pracy. Obliczenia przeprowadzono w programie Mathematica w zakresie zmienności wartości x_0 i S_0 .

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -10000 \leq S \leq 10000$$

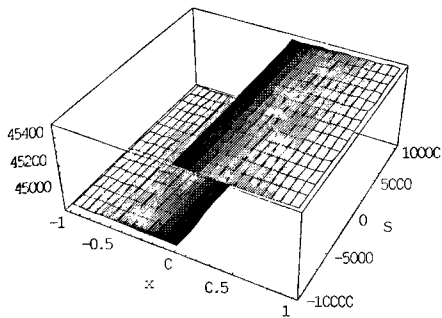
Na kolejnych rysunkach przedstawiono wykresy przestrzenne współczynników modelu.



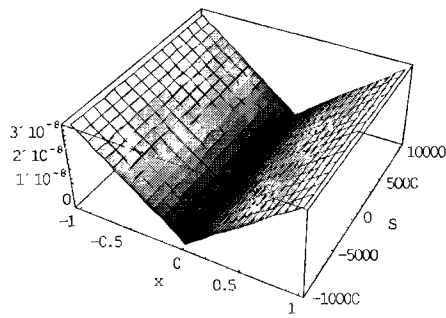
Rys. 6 Parametr a_1



Rys. 7 Parametr a_2



Rys. 8 Parametr b



Rys. 9 Parametr k_1

Bliższa analiza pokazuje, że współczynniki a_1 , a_2 i b w każdym z obszarów $-1 \leq x_0 \leq 0$, $0 \leq x_0 \leq 1$ może być z dobrym przybliżeniem aproksymowane za pomocą funkcji postaci

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 S_0 + \alpha_3 x_0 S_0 \quad (8)$$

z odpowiednio dobranymi współczynnikami $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Zatem

$$a_i(x, S) = \begin{cases} a_{i0}^+ + a_{i1}^+ x + a_{i2}^+ S + a_{i3}^+ xS & \text{dla } x \geq 0 \\ a_{i0}^- + a_{i1}^- x + a_{i2}^- S + a_{i3}^- xS & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$b(x, S) = \begin{cases} b_0^+ + b_1^+ x + b_2^+ S + b_3^+ xS \\ b_0^- + b_1^- x + b_2^- S + b_3^- xS \end{cases},$$

z kolei współczynnik k_1 w niewielkim stopniu zależy od S i można przyjąć

$$k_1(x, S) = \begin{cases} k^+ x & \text{dla } x \geq 0 \\ k^- x & \text{dla } x \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Po podstawieniu wartości $a_1(x, S)$, $a_2(x, S)$, $b(x, S)$, $k_2(x, S)$ do równania (7) otrzymujemy model quasi-liniowy siłownika postaci

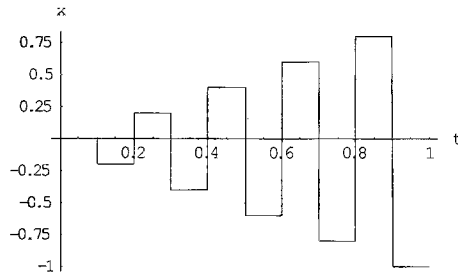
$$\ddot{v} + (a_{10}^+ + a_{11}^+ x + a_{12}^+ S + a_{13}^+ xS)\dot{v} + (a_{20}^+ + a_{21}^+ x + a_{22}^+ S + a_{23}^+ xS)v = (b_0^+ + b_1^+ x + b_2^+ S + b_3^+ xS)x + k^+ xS \quad \text{dla } x \geq 0, \quad (11)$$

$$\ddot{v} + (a_{10}^- + a_{11}^- x + a_{12}^- S + a_{13}^- xS)\dot{v} + (a_{20}^- + a_{21}^- x + a_{22}^- S + a_{23}^- xS)v = (b_0^- + b_1^- x + b_2^- S + b_3^- xS)x + k^- xS \quad \text{dla } x \leq 0.$$

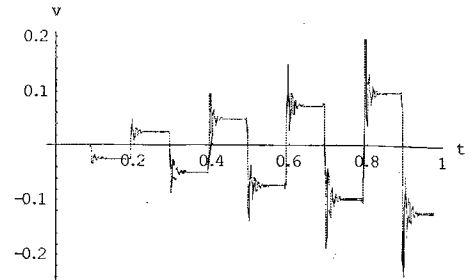
Model ten aproksymuje model rzeczywisty w szerokim zakresie zmienności x i S . Na rysunku (11) porównano odpowiedź obiektu, dla wymuszeń x i $S \neq 0$ przedstawionych na rysunku (10). Widzimy dużą zgodność przebiegów sygnałów prędkości v w obu przypadkach.

5. SYMULACJA

Poniziej porównano wyniki symulacji modelu układu rzeczywistego i układu quasi-liniowego. Na rysunku 10 przedstawiono sygnał zadany w postaci ciągu schodków o narastającej amplitudzie. Umożliwia to porównanie układów w szerokim zakresie zmian sygnału x dla $S = 30000[N]$. Na rysunku 11 przedstawiono wykres prędkości dla obu układów (1) i (7). Widać, że układ quasi-liniowy wiernie odwzorowuje model układu rzeczywistego.



Rys. 10 Sygnał zadany x .



Rys. 11 Prędkość tłoka (v) dla modelu układu rzeczywistego (1) i modelu quasi-liniowego (7).

6. ZASTOSOWANIE

Model quasi-liniowy z parametrami jest oczywiście również modelem nieliniowym. Powstaje pytanie jaki jest sens zastępowania jednego modelu nieliniowego innym modelem nieliniowym. Podamy dwa przykłady zastosowań. Po pierwsze zwróćmy uwagę że model quasi-liniowy jest liniowy względem parametrów obiektu.

Istotnie, można go przedstawić w postaci

$$\mathcal{G} = \theta^T \varphi,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \theta = & [b_0^+, b_1^+, b_2^+, b_3^+, a_{10}^+, a_{11}^+, a_{12}^+, a_{13}^+, a_{20}^+, a_{21}^+, a_{22}^+, a_{23}^+, k_1^+, \\ & b_0^-, b_1^-, b_2^-, b_3^-, a_{10}^-, a_{11}^-, a_{12}^-, a_{13}^-, a_{20}^-, a_{21}^-, a_{22}^-, a_{23}^-, k_1^-] \\ \varphi = & [H(x)x, H(x)x^2, H(x)xS, H(x)x^2S, -H(x)\dot{v}, -H(x)x\dot{v}, -H(x)S\dot{v}, -H(x)xS\dot{v}, \\ & -H(x)v, -H(x)xv, -H(x)Sv, -H(x)x^2Sv, H(x)Sx, H(-x)x, H(-x)x^2, \\ & H(-x)xS, H(-x)x^2S, -H(-x)\dot{v}, -H(-x)x\dot{v}, -H(-x)S\dot{v}, -H(-x)xS\dot{v}, \\ & -H(-x)v, -H(-x)xv, -H(-x)Sv, -H(-x)x^2Sv, H(-x) \cdot x] \\ \mathcal{G} = & \ddot{v}. \end{aligned} \quad (12)$$

Model ten może być wykorzystany w procesach identyfikacji metodą najmniejszych kwadratów, która jest jedną z najbardziej efektywnych metod identyfikacji.

Drugim obszarem zastosowań może być projektowanie układów regulacji parametrycznej. Dla ustalonego punktu pracy x_0, S_0 możemy wyznaczyć regulator wykorzystując klasyczne metody projektowania regulatorów dla układów liniowych. Parametry takiego regulatora zależą od wartości x_0 i S_0 .

Zwróćmy uwagę, że dla ustalonych wartości (x_0, S_0) tłok porusza się ze stałą prędkością v_0 , spełniając równanie

$$a_1(x_0, S_0)v_0 = b(x_0, S_0)x_0 + k_1(x_0, S_0)S_0. \quad (13)$$

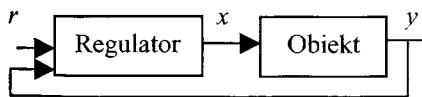
Stąd

$$x_0 = f(v_0, S_0)$$

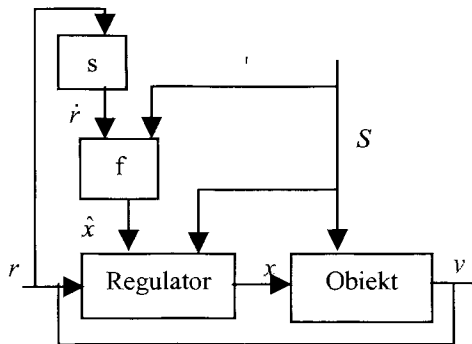
dla pewnej funkcji f .

Zatem istnieje możliwość zastosowania regulatora ze zmiennymi parametrami zależnymi od mierzonej wartości S i oceny przemieszczenia suwaka $\hat{x} = f(\dot{r}, S)$ gdzie \dot{r} jest bieżącym nachyleniem sygnału zadanego.

Regulator niestacjonarny (Rys. 13) z reguły zapewnia lepszą jakość regulacji niż regulator odporny (Rys. 12) ze stałymi parametrami.



Rys. 12 Układ regulacji z regulatorem stacjonarnym



Rys. 13 Układ regulacji z regulatorem ze zmiennymi parametrami

7. WNIOSKI

Po przeprowadzeniu linearyzacji modelu matematycznego siłownika hydraulicznego uzyskano postać uproszczoną (7), która dobrze odwzorowuje zachowanie się modelu układu rzeczywistego (1). Dla modelu quasi-liniowego drugiego rzędu i modelu matematycznego układu siłownika hydraulicznego oba sygnały pokrywają się dokładnie (Rys. 11), dlatego w tym przypadku uproszczenie do takiej postaci quasi-liniowej (12) jest uzasadnione. Taka postać (12) znajduje swoje zastosowanie w procesach identyfikacji i projektowaniu układów regulacji. Dobre wyniki syntezy hydraulicznych

układów synchronizacji przemieszczeń otrzymuje się na podstawie uproszczonych zlinearyzowanych modeli matematycznych. W rezultacie tego dynamiczne zachowanie się tych układów niewiele odbiega od dynamicznego zachowania się układów liniowych. Dzięki temu syntezę można przeprowadzić na bazie modelu zlinearyzowanego.

LITERATURA:

1. J. Giergiel, T. Uhl, *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN Warszawa 1990.
2. D. F. Thompson, J. S. Pruyne, A. Shukla, *Feedback design for robust tracking and robust stiffness in flight control actuators using a modified QFT technique*, INT J. Control 1999 vol 72 no 16 1480-1497.
3. K. Szacka, *Teoria układów dynamicznych*, PW 1999.