

mgr inż. Paweł Fotowicz  
dr Albin Czubla  
Główny Urząd Miar

## WYRAŻANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU W POSTACI PRZEDZIAŁU UFNOŚCI

*Przedstawiono nowy sposób wyrażania niepewności pomiaru w postaci przedziału ufności. Opisano metody jego obliczania z podziałem na dwie kategorie: analityczne i numeryczne. Do pierwszej z nich można zaliczyć metody oparte o prawo propagacji niepewności do drugiej natomiast oparte o zasadę propagacji rozkładów. Obie grupy metod zostały szczegółowo omówione.*

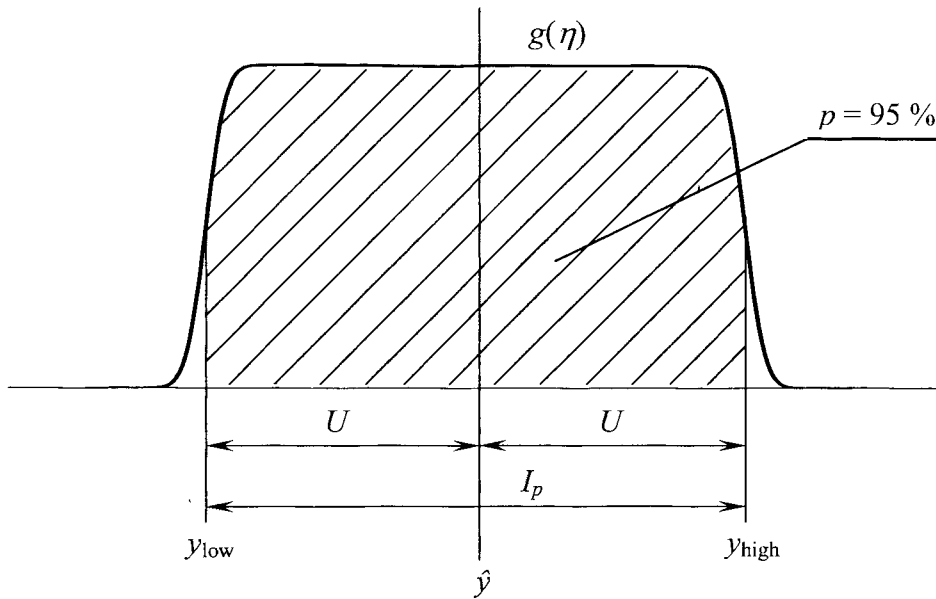
### EXPRESSION OF THE MEASUREMENT UNCERTAINTY AS THE COVERAGE INTERVAL

*Expression of the measurement uncertainty as the coverage interval is presented. The methods for calculating the coverage interval are described. It can be sheared in to two category: analytical and numerical. First methods belong to based on law of uncertainty propagation, the second methods belong to based on propagation of distributions. All groups of methods are detailed described.*

## 1. WPROWADZENIE

Obliczanie niepewności pomiaru to ważne zagadnienie dla metrologii. O wadze problematyki świadczy fakt, że absorbuje uwagę największych międzynarodowych organizacji metrologicznych, w celu ujednoczenia jej wyrażania i wypracowania standardowych procedur postępowania mogących mieć zastosowanie w każdej dziedzinie pomiarowej. Wśród tych prestiżowych organizacji przoduje Międzynarodowe Biuro Miar. Pod jego auspicjami powstał w 1993 roku znany metrologom Przewodnik [1] dotyczący wyrażania niepewności pomiaru. Jednakże na tym dokumencie nie zakończono prac. W 1997 roku dyrektor Międzynarodowego Biura Miar powołał Wspólny Komitet ds. Przewodników w metrologii, którego celem było wypracowanie nowych zasad obliczania niepewności pomiaru. Prace Komitetu zakończyły się obszernym projektem [2] opublikowanym w 2004 roku i przedstawionym do konsultacji krajowym instytucjom metrologicznym. Projekt formułuje zasadę propagacji rozkładów jako podstawę obliczania niepewności pomiaru, a wraz z nią koncepcję wyznaczania przedziału ufności, jako miary niepewności, odpowiadającego poziomowi ufności 95 %. Jest to nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru, gdyż Przewodnik [1] nie zalecał ścisłego powiązania niepewności rozszerzonej z określonym poziomem ufności i nie postulował wyznaczania rozkładu dla wielkości mierzonej na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Przedstawione w nim prawo propagacji niepewności nawiązuje do centralnego twierdzenia granicznego i wynikającego zeń a priori rozkładu dla wielkości

wyjściowej. Nowa koncepcja natomiast uzależnia rozkład wielkości wyjściowej od przyjętego modelu pomiaru i rozkładów jego składowych. Ze względu na ogólny przypadek modelu nieliniowego dla wielkości mierzonej zaleca stosowanie do obliczeń rozkładu prawdopodobieństwa technikę symulacji Monte Carlo. Wyznaczanie przedziału ufności jest następstwem stosowania powyższej techniki. Koncepcje wyznaczania przedziału ufności przewijają się również w literaturze międzynarodowej [3-9] poświęconej zagadnieniom niepewności pomiaru od paru lat. Można je podzielić na metody analityczne i numeryczne. Te pierwsze związane są na ogół z prawem propagacji niepewności, a te drugie nawiązują do zasady propagacji rozkładów.



Rys. 1. Przedział ufności dla symetrycznego rozkładu wielkości wyjściowej

## 2. PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Przedział ufności definiowany jest jako najmniejszy przedział pomiędzy dwoma kwantylami rozkładu prawdopodobieństwa dla wielkości mierzonej  $y$ , które wyznaczają poziom ufności  $p = 95\%$ . W przypadku symetrycznego rozkładu będzie to zawsze tylko jeden przedział, symetryczny wokół wartości oczekiwanej

$$I_p = [y_{low}, y_{high}] \quad (1)$$

gdzie  $y_{low} = G^{-1}(\alpha)$ , a  $y_{high} = G^{-1}(\alpha+p)$ .  $G^{-1}(\alpha)$  jest kwantylem rzędu  $\alpha$ , a  $G^{-1}(\alpha+p)$  kwantylem rzędu  $\alpha+p$  rozkładu opisanego dystrybuantą  $G(\eta)$ . Przyjmuje się, że  $\alpha = 2,5\%$ . W odniesieniu do klasycznie zapisywanej niepewności rozszerzonej przedział ufności można zdefiniować jako

$$I_p = [\hat{y} - U, \hat{y} + U] \quad (2)$$

przy czym

$$\int_{\hat{y}-U}^{\hat{y}+U} g(\eta) d\eta = p \quad (3)$$

gdzie  $g(\eta)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu związanego z wielkością mierzoną,  $\hat{y}$  jej estymatą, a  $p$  poziomem ufności.

### 3. METODY OPARTE O ROZKŁAD A PRIORI DLA WIELKOŚCI MIERZONEJ

W klasycznym podejściu związanym z prawem propagacji niepewności przyjmuje się dla wielkości mierzonej rozkład a priori, a niepewność rozszerzona wyznaczana jest z zależności

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (4)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem rozszerzenia, a  $u_c(y)$  złożoną niepewnością standardową. Można wyróżnić kilka sposobów obliczania niepewności rozszerzonej, które związane są z wyznaczeniem wartości współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 %.

Gdy spełnione są warunki centralnego twierdzenia granicznego, a więc w przypadku gdy udziały niepewności wielkości wejściowych są porównywalne co do wartości oraz dużo mniejsze od złożonej niepewności standardowej to dla wielkości wyjściowej można przyjąć rozkład normalny. Wówczas dla poziomu ufności 95 % współczynnik  $k = 1,96$  lub w często stosowanym przybliżeniu  $k = 2$ .

Gdy niepewności standardowe wielkości wejściowych obliczane są metodą statystyczną to dla wielkości wyjściowej przyjmuje się rozkład t-Studenta z wypadkową liczbą stopni swobody wyznaczaną z formuły Welch-Satterthwaite'a

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (5)$$

gdzie  $u_i(y)$  to udział niepewności wielkości wejściowej z liczbą stopni swobody  $v_i$ . Dla obliczonej w ten sposób liczby  $v_{\text{eff}}$  z tablicy wartości kwantyla  $t(v)$  rozkładu t-Studenta dla poziomu ufności 95 % (tab.1) odczytuje się wartość współczynnika rozszerzenia

$$k = t(v_{\text{eff}}) \quad (6)$$

Gdy wśród wielkości wejściowych znajduje się składowa z dominującym udziałem niepewności to przyjmuje się dla wielkości wejściowej rozkład taki jak rozkład tej

dominującej składowej [10]. Jeżeli jest to składowa o rozkładzie prostokątnym to współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % wynosi  $k = 1,65$ .

Tab. 1. Kwantyle rozkładu t-Studenta dla poziomu ufności 95 %

$\nu$	$t(\nu)$	$\nu$	$t(\nu)$	$\nu$	$t(\nu)$
1	12,7062	19	2,0930	44	2,0154
2	4,3027	20	2,0860	46	2,0129
3	3,1824	21	2,0796	48	2,0106
4	2,7764	22	2,0739	50	2,0086
5	2,5706	23	2,0687	55	2,0040
6	2,4469	24	2,0639	60	2,0003
7	2,3646	25	2,0595	65	1,9971
8	2,3060	26	2,0555	70	1,9944
9	2,2622	27	2,0518	80	1,9901
10	2,2281	28	2,0484	90	1,9867
11	2,2010	29	2,0452	100	1,9840
12	2,1788	30	2,0423	120	1,9799
13	2,1604	32	2,0369	150	1,9759
14	2,1448	34	2,0322	200	1,9719
15	2,1314	36	2,0281	250	1,9695
16	2,1199	38	2,0244	300	1,9679
17	2,1098	40	2,0211	400	1,9659
18	2,1009	42	2,0181	500	1,9647

Gdy wśród wielkości wejściowych znajdują się dwie składowe dominujące o rozkładach prostokątnych to dla wielkości wyjściowej przyjmuje się rozkład trapezowy [10]. Współczynnik rozszerzenia oblicza się z zależności

$$k = \sqrt{\frac{6}{1+\beta^2}} \left( 1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)} \right) \quad \text{dla } \beta \leq \frac{p}{2-p} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2} \quad (8)$$

gdzie  $a_1$  i  $a_2$  to szerokości połówkowe rozkładów obu składowych.

#### 4. METODY OPARTE O ROZKŁAD OBLICZANY DLA WIELKOŚCI MIERZONEJ

W powyższej grupie metod można wyróżnić dwie kategorie. Pierwsza odwołuje się do wyznaczenia rozkładu wielkości wyjściowej na podstawie splotu rozkładów wielkości wejściowych [11] i można je stosować, gdy spełnione jest założenie o liniowości modelu matematycznego wielkości wyjściowej. Druga natomiast dotyczy przed wszystkim modeli nieliniowych i oparta jest na symulacji Monte Carlo [2, 12, 13].

##### 4.1. Metoda analityczna

Metoda polega na przybliżeniu wyniku operacji splotu matematycznego standardowych rozkładów dla wielkości wejściowych [14-15]. Mogą nimi być rozkłady: t-Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny i trapezowy. Wielokrotny splot ostatnich czterech wymienionych rozkładów można przybliżyć rozkładem typu PN, który jest splotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Z kolei splot rozkładów t-Studenta można przybliżyć splotem „równoważnych” im rozkładów normalnych. Owa równoważność polega na przyjęciu takich rozkładów normalnych, dla których przedziały ufności są takie same co do wartości jak wyznaczone na podstawie rozkładów t-Studenta dla danego poziomu ufności. Aby osiągnąć tą równoważność należy zastąpić rozkład t-Studenta rozkładem normalnym, a niepewność standardową wielkości wejściowej powiększyć o iloraz kwantyli tych rozkładów

$$u'(x_i) = \frac{t(v)}{k_N} u(x_i) \quad (9)$$

gdzie  $u(x_i)$  to niepewność standardowa wielkości wejściowej, a  $k_N$  to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego.

Niepewność rozszerzoną można wyznaczyć z zależności

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{t(v)}{k_N} u_i(y) \right)^2} \quad (10)$$

gdzie  $k_{PN}$  to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu typu PN. Wartości powyższego współczynnika dla poziomu ufności 95 % zostały przedstawione w tabeli 2 [16-17] w funkcji ilorazu udziału niepewności

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (11)$$

gdzie  $u_i(y)$  to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym.

Współczynnik  $k_{PN}$  można również wyznaczyć w przybliżony sposób [18-20]

$$\begin{aligned}
 k_{PN} &= k_N \text{ dla } 0 < r_u < 1 \\
 k_{PN} &= k_T \text{ dla } 1 \leq r_u \leq 10 \\
 k_{PN} &= k_p \text{ dla } r_u > 10
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

gdzie

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1} \left( 1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)} \right)}
 \tag{13}$$

$$k_p = \sqrt{3p}
 \tag{14}$$

Tab. 2. Wartości współczynnika rozszerzenia  $k_{PN}$  dla poziomu ufności 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

$k_{PN}$	$r_u$ do wartości	$k_{PN}$	$r_u$ do wartości	$k_{PN}$	$r_u$ do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	$\infty$
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

#### 4.2. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo [2] polega na wygenerowaniu metodą losową wartości dla zmiennej losowej związanej z wielkością mierzoną na podstawie funkcji modelu jej pomiaru

$$y = f(x_1, \dots, x_N)
 \tag{15}$$

gdzie  $x_i$  to zmienne losowe związane z wielkościami wejściowymi. Wartości dla zmiennych losowych związanych z wielkościami wejściowymi generowane są zgodnie z założonymi dla nich rozkładami prawdopodobieństwa. Najczęściej zalecana liczba prób losowych wynosi  $M = 10^6$ . W każdej próbie losowej wyznacza się  $N$  wartości zmiennych losowych  $x_{i(r)}$ , które wprowadza się do równania funkcji pomiaru i wyznacza

na tej podstawie wartość zmiennej  $y_{(r)}$ . Otrzymane wartości porządkuje się zgodnie z niemalejącą kolejnością i każdej z nich przypisuje się kolejną wartość prawdopodobieństwa

$$p_r = \frac{r-0,5}{M} \quad (16)$$

gdzie  $r$  jest kolejną próbą losową. Następnie tworzy się numeryczną dystrybuantę dla wielkości wyjściowej, łącząc  $M$  punktów o współrzędnych  $(y_{(r)}, p_r)$

$$\hat{G}(\eta) = \frac{r-0,5}{M} + \frac{\eta - y_{(r)}}{M(y_{(r+1)} - y_{(r)})} \quad (17)$$

przy czym

$$y_{(r)} \leq \eta \leq y_{(r+1)}, \quad r = 1, \dots, M-1 \quad (18)$$

Przedział ufności wyznacza się obliczając wartości funkcji  $\hat{G}^{-1}(\alpha)$  oraz  $\hat{G}^{-1}(\alpha+p)$ . Przyjęcie  $\alpha=0,025$  daje przedział ufności określony przez kwantyle: 0,025 i 0,975, który jest probabilistycznie symetryczny. Przyjęcie innej wartości niż  $\alpha=0,025$  może nastąpić wtedy, gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest asymetryczna. Wówczas przyjmuje się najkrótszy przedział ufności, który dany jest przez wartość  $\alpha$  spełniającą równanie

$$g(\hat{G}^{-1}(\alpha)) = g(\hat{G}^{-1}(\alpha+p)) \quad (18)$$

lub przy spełnieniu kryterium minimum różnicy

$$\hat{G}^{-1}(\alpha+p) - \hat{G}^{-1}(\alpha) = \min \quad (19)$$

Gdy  $g(\eta)$  jest symetryczna to najkrótszym przedziałem  $I_p$  jest przedział ufności dla którego  $\alpha = (1-p)/2$ . Ogólnie przedział ten obliczany jest komputerowo z  $\hat{G}(\eta)$  przy spełnieniu powyższego kryterium.

## 5. PODSUMOWANIE

Przedstawione metody obliczania przedziału ufności reprezentują różny stopień przybliżenia przy obliczaniu niepewności pomiaru. Metody oparte o rozkład a priori cechują się małą dokładnością i pozwalają na wyrażanie niepewności z jedną cyfrą znaczącą. Można je zaliczyć do klasycznych, gdyż bazują na znanych ze statystyki matematycznej założeniach dotyczących modelu pomiaru. Metoda analityczna oparta o przybliżenie operacji splotu matematycznego rozkładów dla wielkości wejściowych pozwala na wyrażanie niepewności rozszerzonej z dwoma cyframi znaczącymi. Jej błąd obliczania przedziału ufności nie przekracza 3 %, gdy do oceny wielkości wejściowych używa się standardowych rozkładów prawdopodobieństwa [15]. Metoda Monte Carlo zapewnia dokładne wyznaczanie przedziału ufności, gdyż realizuje obliczenia zgodnie z przyjętą definicją powyższego przedziału i dlatego zalecana jest przez dokument [2].

## LITERATURA

- [1] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999
- [2] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions – JCGM document, 2004
- [3] Z. Godec: Standard uncertainty in each measurement result explicit or implicit. *Measurement* 20, 1997
- [4] B. M. Wood and R. J. Douglas: Confidence-interval interpretation of a measurement pair for quantifying a comparison. *Metrologia* 35, 1998.
- [5] M. Ballico: Limitations of the Welch-Satterthwaite approximation for measurement uncertainty calculations. *Metrologia* 37, 2000.
- [6] A. J. Fry: Measurement validation via expected uncertainty. *Measurement* 30, 2001
- [7] R. Willink and B. D. Hall: A classical method for uncertainty analysis with multidimensional data. *Metrologia* 39, 2002
- [8] A. M. H. van der Veen and M. G. Cox: Error analysis in the evaluation of measurement uncertainty. *Metrologia* 40, 2003
- [9] R. Willink: Coverage intervals and statistical coverage intervals. *Metrologia* 41, 2004
- [10] Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument EA-4/02, tłumaczenie GUM, 2001
- [11] C. F. Dietrich: *Uncertainty, Calibration and Probability. The statistics of Scientific and Industrial measurement*, Second edition, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991
- [12] I. Lira: *Evaluating the measurement uncertainty. Fundamentals and practical guidance. Series in measurement science and technology. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia*, 2002.
- [13] S. Brandt: *Analiza danych. Metody statystyczne i obliczeniowe*. PWN, 1998
- [14] P. Fotowicz: Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych. *PAR* 1/2005
- [15] P. Fotowicz: An analytical method for calculating a coverage interval. *Metrologia* 43, 2006
- [16] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. *PAR* 10/2003
- [17] P. Fotowicz: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o spłot rozkładu prostokątnego z normalnym. *PAK* 4/2004
- [18] P. Fotowicz: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. *PAR* 9/2001
- [19] P. Fotowicz: Method for calculating the coverage factor in calibration. *OIML Bulletin XLIII*, 2002
- [20] P. Fotowicz: A method of approximation of the coverage factor in calibration. *Measurement* 35, 2004