

Pewne zagadnienia hydrauliki

KD:62-522
IA:4.0.2.1 2.0

Zaproponowane nieco odmienny od tradycyjnego sposób matematycznego opisu zjawisk zachodzących w układach hydraulicznych. Uproszczone wzory ułatwiają obliczenia oraz umożliwiają klasyfikowanie zjawisk i realizujących je elementów. Wyraźnie podkreślono analogie między zjawiskami hydraulicznymi i elektrycznymi. Pokazano zaletności jakie należy uwzględnić przy modelowaniu układów hydraulicznych przez układy elektryczne.

Rozwój przemysłu i środków transportu spowodował wzrost zainteresowania specjalistów z różnych dziedzin techniki układami hydraulicznymi, które w zastosowaniu do procesów automatycznego sterowania wykazują wiele zalet. Do głównych zalet tych układów należy zaliczyć:

- prostotę budowy i pewność działania,
- możliwość rozwijania dużych mocy przy stosunkowo małych gabarytach i ciężarach,
- dużą trwałość,
- małą bezwładność,
- względy bezpieczeństwa pracy.

Zalety te często przesądzają o wyższości układów hydraulicznych lub elektrohydraulicznych nad układami czysto elektrycznymi.

Pomijając fakt, że w układach hydraulicznych stosowane są elementy precyzyjne, wymagające dobrej znajomości tematu, wydaje się, że duża trudność przy ich projektowaniu sprawia również nie zawsze odpowiednia forma opisu matematycznego zachodzących tam zjawisk.

Niniejsze opracowanie, traktujące o zagadnieniach na ogół nienowych, stanowić ma propozycję unifikacji tych form opisu, przy jednoczesnym możliwie jak największym ich uproszczeniu, co można osiągnąć przez wprowadzenie pewnych wielkości charakterystycznych, wiążących występujące we wzorach, w formie *explicite*, /jawnej/, parametry. Przekształcenia takie, zapewniając większą przejrzystość zapisu ułatwia analizę i syntezę układu. Jednocześnie może ono oddać duże usługi przy modelowaniu rzeczywistych układów na maszynach analogowych.

Wiadomo z praktyki inżynierskiej, że projektując układ hydrauliczny dokonuje się wielu założeń idealizujących zagadnienie. W opracowaniu niniejszym wskazano jedynie na niektóre z nich, dość istotne.

Ciecz jako czynnik pracujący cechuje się ściślnością, tzn. zmianą gęstości w funkcji ciśnienia. Poza tym ciśnienie i temperatura wpływają również na inne własności cieczy, np. na lepkość. W pew-

nych jednak warunkach można to pominąć i traktować parametry fizyczne czynnika jako stałe, a zatem m. in. traktować czynnik jako nieściśliwy. W dalszym ciągu opracowania założenie to będzie aktualne.

Następną bardzo istotną cechą układów hydraulicznych jest nieliniowość zachodzących w nich zjawisk oraz fakt, że są one w zasadzie obwodami o parametrach rozłożonych. W znakomitej większości przypadków traktuje się je jednak jako obwody o parametrach skupionych. Uproszczenie to polega na zastępowaniu fragmentów obwodu o parametrach rozłożonych równoważnymi im zespołami elementów o parametrach skupionych, rozmieszczonych w obwodzie idealizowanym.

Ogólnie rzecz biorąc, analiza układu polega zwykle na określeniu w interesujących punktach ciśnień i natężeń przepływu czynnika. Pracujący układ ma za zadanie zmieniać te dwie wielkości w sposób zamierzony przez użytkownika, a realizacja tego odbywa się przez zmianę parametrów pracy jego elementów.

Rozważając zjawiska zachodzące w układach hydraulicznych jako podstawowy układ jednostek przyjęto: kg, sek, cm. Wartość natężenia przepływu oznaczono symbolem Q , natomiast dla dowolnej różnicy ciśnień przyjęto literę P z ewentualnymi indeksami.

Każdemu fragmentowi układu lub jego elementowi można przyporządkować co najmniej jedną z następujących właściwości: oporność, pojemność, samoindukcyjność. Pojęcia te zostaną sprecyzowane w dalszej części opracowania, ale już same nazwy przypominają analogię z elektrotechniką. Nie jest to bez uzasadnienia, gdyż zjawiska w przyrodzie bez względu na ich charakter opisywane są przy pomocy tego samego aparatu matematycznego. Opis matematyczny natomiast często leży u podstaw definicji.

Oporność hydrauliczna

Opornością nazwano tu zjawisko zachodzące w elemencie układu, polegające na spadku ciśnienia czynnika podczas przepływu przez ten element. W praktyce realizuje się je przy pomocy różnego rodzaju dławików przepływu.

Wiadomo, że w zależności od rodzaju elementu i warunków przepływu w/w spadek ciśnienia jest liniową lub nieliniową funkcją natężenia przepływu. Nie wchodząc w szczegóły można stwierdzić, że na ogół spotykamy się z dwoma rodzajami oporności, dla których obowiązują wzory

$$P = R^2 Q^2$$

/1/

$$P = \bar{R} Q$$

/2/

x/ Przy tego typu zapisie współczynnik R , który jest w zasadzie funkcją Q , w stosunkowo dużych przedziałach zmienności Q można przyjmować jako stały.

Współczynniki R i $\bar{R}$ nazwano odpowiednio:

- $\frac{R}{\bar{R}}$ - oporem nieliniowym,
 $\bar{R}$ - oporem liniowym.

Za jednostkę oporu przyjęto opór elementu, na którym przy przepływie czynnika o natężeniu wynoszącym $Q = 1 \text{ cm}^3/\text{sek}$ ma miejsce spadek ciśnienia równy $P = 1 \text{ kg/cm}^2$.

Jak wynika z powyższej definicji, wymiary jednostek oporu wyrażają się wzorami:

$$[R] = \text{kg}^{1/2} \text{cm}^{-4} \text{sek}^1 \quad /3/$$

$$[\bar{R}] = \text{kg}^1 \text{cm}^{-5} \text{sek}^1 \quad /4/$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku ogólnym opór jednej klasy nie ma równoważnego sobie wśród oporów klasy drugiej. Taka ewentualna zamiana jest możliwa jedynie dla określonego punktu pracy π . Oporo-
 ry mogą być ze sobą łączone szeregowo, równolegle lub w inny sposób. Dla każdego określonego połączenia oporów danej klasy można obliczyć opór zastępczy R_z . I tak np.:

- dla oporów liniowych połączonych szeregowo

$$\begin{array}{c} \bar{R}_1 \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \quad \bar{R}_z = \sum_i \bar{R}_i \quad /5/$$

- dla oporów liniowych połączonych równolegle

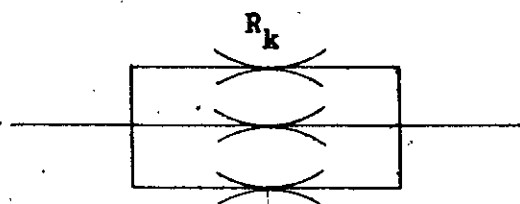
$$\begin{array}{c} \bar{R}_k \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \quad \frac{1}{\bar{R}} = \sum_k \frac{1}{\bar{R}_k} \quad /6/$$

- dla oporów nieliniowych połączonych szeregowo

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \quad R_z^2 = \sum_i R_i^2 \quad /7/$$

π / Pod pojęciem "punkt pracy" rozumie się zespół parametrów określających stan układu lub elementu w ustalonych warunkach pracy. Graficznie reprezentuje go pewien punkt charakterystyki statycznej.

- dla oporów nieliniowych połączonych równolegle



$$\frac{1}{R_z} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad /8/$$

Opór zastępczy jest tej samej klasy co i opory łączone. Jeżeli w obwodzie występują opory różnych klas, w celu określenia oporu zastępczego do każdego przypadku należy podchodzić indywidualnie.

Przy przebiegach zmiennych w czasie, a więc takich w których $Q/t \neq \text{const}$, poza opornością występują zjawiska pojemności i samoindukcji. W przeciwieństwie do oporności powodują one przesunięcie fazowe Q/t i P/t . Ze względu na nieliniowość charakterystyk niektórych zjawisk procesy nieustalone często analizuje się przy pomocy tzw. metody małego parametru. Polega ona na linearyzacji rzeczywistych charakterystyk w małych otoczeniach punktów pracy, przy czym układy współrzędnych zostają przesunięte /bez obrotu/ tak, że ich nowe początki pokrywają się z tymi punktami. Po takiej operacji badanie rzeczywistego układu sprowadza się do badania zastępczego układu liniowego. Aby jednak wyniki nie odbiegały zbyt od rzeczywistości, wahania parametrów wokół wartości ustalonych muszą być odpowiednio małe.

Wzory opisujące zjawiska po linearyzacji charakterystyk w ogólnym przypadku można stosować jedynie dla przebiegów wokół określonego punktu pracy. Oczywiście jest, że przy analizie metodą małego parametru nie wyróżnia się dwóch klas oporów. Zjawisko oporności zostanie opisane przy pomocy jednego wzoru bez względu na klasę oporu. Ponieważ rozważania dotyczą przebiegów zmiennych, zakłada się, że parametry Q i P wahają się wokół wartości ustalonych Q_0 i P_0 , przy czym dla małych z założenia różnic przyjęto oznaczenia:

$$q = Q - Q_0$$

$$p = P - P_0$$

Biorąc wyżej poczynione uwagi oraz wzory /1/ i /2/ można podać następujące wzory opisujące zjawisko oporności po linearyzacji jego charakterystyki:

$$p = 2Q_0 R^2 q \quad /9/$$

$$p = \bar{R} q \quad /10/$$

Stosunek p/q nazwano oporem linearyzowanym i oznaczono symbolem r . Jak wynika z wzoru /9/, w przypadku oporu nieliniowego opór linearyzowany określają równoważne sobie wzory:

$$r = 2Q_0 R^2$$

$$r = 2P_0 / Q_0$$

/11/

$$r = 2R \sqrt{P_0}$$

Wzory /11/ wskazują, że wartość oporu linearyzowanego zależy nie tylko od cech konstrukcyjnych dławika i własności cieczy, lecz także od parametrów przepływu, określonych punktem pracy Q_0, P_0 . W przypadku oporności liniowej oczywiście

$$r = R$$

/12/

Ogólnie zatem dla badań metodą małego parametru zjawisko oporności opisane jest wzorem:

$$p = rq$$

/13/

Dla określenia oporu zastępczego r , w przypadku połączeń szeregowych i równoległych stosuje się wzory /5/ i /6/. Definicja jednostki oporu linearyzowanego pokrywa się z definicją jednostek oporów R i $\bar{R}$, a wymiar jej jest identyczny z wymiarem oporu liniowego i wyraża się wzorem:

$$[r] = \text{kg}^1 \text{cm}^{-5} \text{sek}^1$$

/14/

Pojemność hydrauliczna

W zależności od roli jaką zjawisko to odgrywa w układzie, można by podawać różne jego definicje. Ogólnie rzecz biorąc polega ono na gromadzeniu w pewnym punkcie układu energii potencjalnej. Elementami realizującymi je są różnego rodzaju hydroakumulatory.

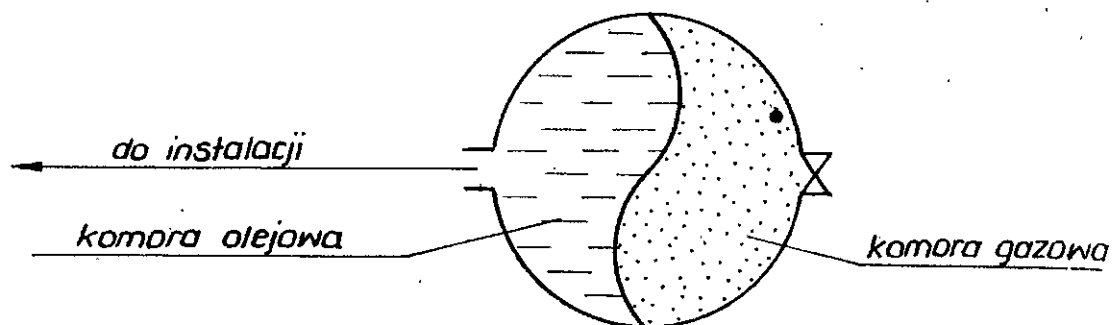
Na ogół w hydraulicznych układach automatycznej regulacji spotyka się dwa rodzaje hydroakumulatorów, a mianowicie: hydroakumulator pneumatyczny i hydroakumulator sprężynowy. W pierwszym energia gromadzona jest przez sprężony gaz /zwykle powietrze/, w drugim jak sama nazwa wskazuje przez sprężynę.

Zasadniczą różnicą między tymi typami z punktu widzenia układu, w którym pracują jest to, że hydroakumulator pneumatyczny podłączony jest do układu tylko jedną końcówką, a zatem schematycznie element taki sprzęga dany punkt układu z punktem, w którym panuje stałe ciś-

nienie odniesienia, tzn. ze zbiornikiem. Inaczej mówiąc, hydroakumulator pneumatyczny zawsze bocznikuje pewien fragment układu do zbiornika. Natomiast hydroakumulator sprężynowy może być podłączony do układu dwiema końcówkami w dowolnych jego punktach, a zatem może on bocznikować dowolny fragment układu bez jakichkolwiek dodatkowych warunków pod tym względem.

Hydroakumulator pneumatyczny

Hydroakumulator pneumatyczny składa się ze zbiornika ciśnieniowego /rys.1/ przedzielnego tłokiem lub przeponą na dwie komory.



Rys.1.

Komora olejowa połączona jest przy pomocy końcówki z instalacją hydrauliczną. Komora gazowa natomiast załadowana jest sprężonym gazem, a końcówka jej zaślepiona.

Dla analizy matematycznej tego elementu przyjęto następujące oznaczenia:

- P_0 - nadciśnienie /względem atmosfery/ gazów w warunkach ustalonych,
- V_0 - objętość gazu w warunkach ustalonych,
- V_g - maksymalna pojemność komory gazowej wynikająca z konstrukcji,
- P_g - nadciśnienie /względem atmosfery/ gazu, odpowiadające objętości V_g ,
- P - bieżąca wartość nadciśnienia /względem atmosfery/ gazu,
- V - bieżąca objętość gazu,
- x - współczynnik politropy,
- a - wartość ciśnienia atmosferycznego.

zakładając politropową przemianę gazu można podać wzór:

$$P_0 + a/V_0^x = P + a/V^x$$

Wprowadzając oznaczenia: $V_0 - V = v$, $P - P_0 = p$ przekształcając powyższy wzór otrzymuje się:

$$P = P_0 + a / \frac{V_0^x - V_0 - v/x}{V_0 - v/x} \quad /15/$$

Uwzględniając tylko pierwszy wyraz rozwinięcia wzoru /15/ w szereg potęgowy oraz podstawiając $a = 1 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy:

$$P = P_0 + \frac{1}{x} \frac{P_0 + 1}{V_0} v \quad /16/$$

Stosunek v/p nazwano linearyzowaną pojemnością hydroakumulatora i oznaczono symbolem c . Wzór /16/ można zatem napisać w postaci:

$$v = cp \quad /17/$$

gdzie: $c = \frac{V_0}{x/P_0 + 1}$

Niejednokrotnie wygodniej jest operować wartościami konstrukcyjnymi. W tym przypadku pojemność hydrauliczna wyraża się wzorem:

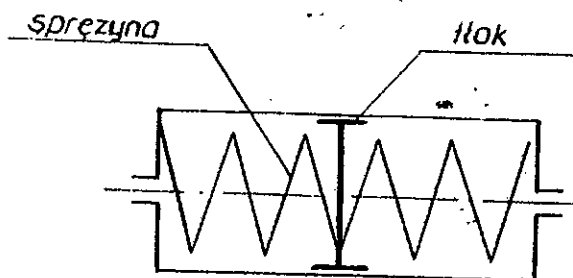
$$c = \frac{V_R}{x} \frac{P_R + 1}{P_0 + 1/2} \quad /18/$$

Różniczkując względem czasu wyrażenie /17/ otrzymuje się zasadniczy wzór opisujący zjawisko pojemności hydraulicznej.

$$q = c \frac{dp}{dt} \quad /19/$$

Hydroakumulator sprężynowy

Podobnie jak hydroakumulator pneumatyczny również i ten składa się ze zbiornika ciśnieniowego /rys.2/ przedzielonego tłokiem na dwie komory.



Rys.2.

Tłok obciążony jest sprężyną. Jedna lub obydwie komory połączone są z instalacją hydrauliczną układu. Przyjmując identyczną definicję pojemności jak przy hydroakumulatorze pneumatycznym, łatwo wykazać, że w tym przypadku jest ona liniowa i wynosi:

$$c = \frac{A^2}{K_s}$$

/20/

gdzie:

A - pole powierzchni czynnej tłoka,

K_s - stała sprężystości sprężyny.

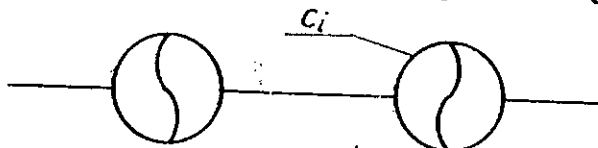
Za jednostkę pojemności hydraulicznej przyjęto pojemność takiego elementu /hydroakumulatora/, na którym zmiana ciśnienia z prędkością $1 \text{ kg/cm}^2\text{sek}$, wywołuje natężenie przepływu $q = 1 \text{ cm}^3/\text{sek}$. Jak wynika z wzorów /17/, /18/, /20/ wymiarem jednostki pojemności hydraulicznej jest:

$$[c] = \text{cm}^5 \text{kg}^{-1}$$

/21/

Pojemności, podobnie jak opory, mogą być ze sobą łączone n. in. szeregowo lub równolegle. Dla poszczególnych rodzajów połączeń można obliczyć pojemność zastępczą c_z , i tak np:

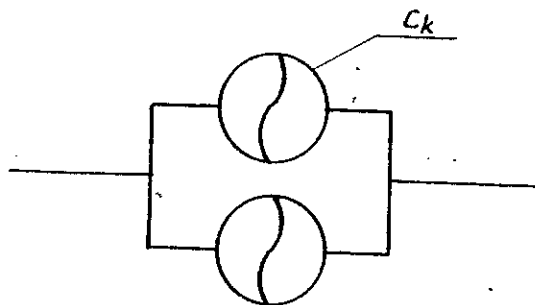
- dla pojemności połączonych szeregowo



$$\frac{1}{c_z} = \sum_i \frac{1}{c_i}$$

/22/

- dla pojemności połączonych równolegle



$$c_z = \sum_k c_k$$

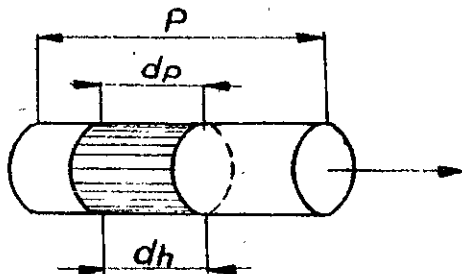
/23/

Samoindukcja hydrauliczna

W dotychczasowych rozważaniach czynnik pracujący, czy też ruchome elementy konstrukcyjne /tłok lub przepona w hydroakumulatorze/ traktowane jako nieważkie. W rzeczywistości posiadają one określoną masę, którą należy uwzględnić przy analizowaniu procesów niustalonych. W celu wyprowadzenia wzorów opisujących te zjawiska rozpatrzony zostanie stan dynamiczny ruchomego elementu substancji, jak na rys.3

Przyjęto następujące oznaczenia:

- dh - różniczka długości elementu,
- A - pole przekroju czynnego /normalnego do kierunku ruchu/,
- u - średnia prędkość przepływu,
- ρ - średnia gęstość elementu,
- dm - różniczka masy,
- Q - natężenie przepływu.



Rys.3.

Można napisać następujące równanie ruchu:

$$dm \frac{du}{dt} = A \frac{dP}{dh} dh \quad /24/$$

Po uwzględnieniu, że $dm = \rho A dh$ oraz $Q = uA$ przekształci się ono następująco:

$$dP = \rho/A \frac{dQ}{dt} dh \quad /25/$$

Całkując równanie /25/ względem h przy założeniu nieściśliwości substancji oraz bezźródłowości elementu, otrzymuje się:

$$P = \frac{\rho \cdot h}{A} \frac{dQ}{dt} \quad /26/$$

Wyrażenie $\frac{\rho \cdot h}{A}$ nazwano współczynnikiem samoindukcji hydraulicznej i oznaczono symbolem L. Po wprowadzeniu tego symbolu wzór /26/ przyjmie postać:

$$P = L \frac{dQ}{dt} \quad /27/$$

W celu ujednolicenia symboliki wzór /27/ zapisany zostanie w postaci

$$p = L \frac{dQ}{dt} \quad /28/$$

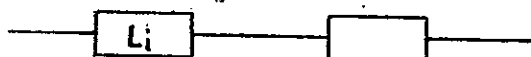
Przyjęto, że jednostkową samoindukcję posiada element, na którym różnica ciśnień równa 1 kg/cm^2 wywołuje przyspieszenie natężenia jego przepływu równe $1 \text{ cm}^3/\text{sek}^2$. Zgodnie z wzorami /26/, /27/, /28/ wymiar jednostki samoindukcji hydraulicznej przedstawia wzór:

$$[L] = \text{kg}^1 \text{sek}^2 \text{cm}^{-5}$$

/29/

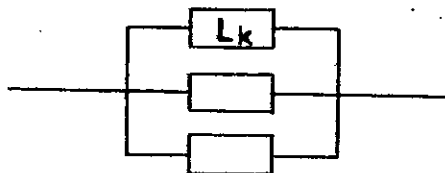
Elementy posiadające cechy samoindukcji występują w połączeniach szeregowych, równoległych i innych. Dla każdego takiego połączenia można określić współczynnik samoindukcji zastępczej L_z . I tak np.

- dla połączenia szeregowego



$$L_z = \sum_i L_i \quad /30/$$

- dla połączenia równoległego



$$\frac{1}{L_z} = \sum_k \frac{1}{L_k} \quad /31/$$

Zrozumiałą jest rzeczą, że linearyzacja charakterystyk, uśrednienie prędkości czynnika itp. obarczają błędami wynik analizy. Niemniej błędy te często są dopuszczalne w obliczeniach inżynierskich.

Obecnie warto zwrócić uwagę na analogię omawianych zjawisk ze zjawiskami elektrycznymi, co ma bardzo istotne znaczenie dla modelowania układów hydraulicznych na elektronowych maszynach analogowych.

Odwzorowując pewien układ hydrauliczny przez obwód elektryczny trzeba uzyskać w obydwu identyczne stałe czasowe i bezwymiarowe współczynniki wzmocnienia.

Inaczej mówiąc, odwzorowując układ hydrauliczny przez równoważny mu obwód elektryczny dokonuje się przekształcenia, w którym niezmiennikiem jest czas.

Wymiary wyżej omówionych jednostek hydraulicznych wskazują, że:

$$[L][c] = \text{sek}$$

$$[r][c] = \text{sek}$$

/32/

Dla jednostek elektrycznych jest:

$$[H] [F] = \text{sek}$$

/33/

$$[\Omega] [F] = \text{sek}$$

gdzie:

$[F]$ - wymiar jednostki farada w cgs.

$[\Omega]$ - wymiar jednostki oma w cgs.

$[H]$ - wymiar jednostki henra w cgs.

Aby układy: hydrauliczny i elektryczny były równoważne dynamicznie, muszą być spełnione zależności:

$$rc = \Omega F$$

/34/

$$Lc = HF$$

gdzie:

r - wartość linearyzowanego oporu hydraulicznego w jednostkach $[r]$.

c - wartość pojemności hydraulicznej w jednostkach $[c]$.

L - wartość samoindukcji hydraulicznej w jednostkach $[L]$.

Ω - wartość oporu elektrycznego w omach.

F - wartość pojemności elektrycznej w faradach.

H - wartość samoindukcji elektrycznej w henrach.

Z powyższego wynika, że jeżeli np. między oporami elektrycznymi i hydraulicznymi ustalona zostanie definicyjna równość:

$$r = k \Omega$$

/35/

to pozostałe parametry muszą spełniać zależności:

$$c = \frac{1}{k} F$$

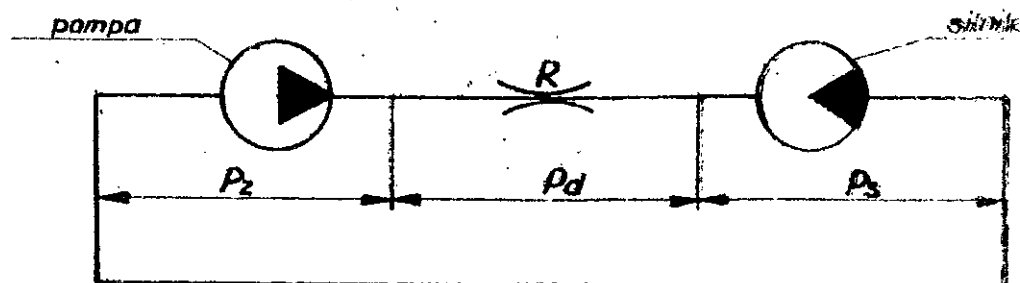
/36/

$$L = k H$$

Wartość współczynnika "k" należy w praktyce tak dobrać, aby układ hydrauliczny mógł być odwzorowany przez elementy elektryczne o realnych wartościach oporu, samoindukcji i pojemności.

Na zakończenie, w celu pokazania pewnych korzyści osiąganych przy stosowaniu wyżej omówionej symboliki, przeanalizowano zagadnienie optymalizacji ze względu na stosowane ciśnienia, prostego układu hydraulicznego.

Niech dla przykładu układ składa się tylko: ze źródła zasilania, tj. pompy, hydraulicznego elementu dławiącego, np. pary suwakowej rozdzielacza oraz odbiornika energii, np. silnika hydraulicznego /rys. 4/3/



Rys. 4.

Przyjęto, że pompa wywołuje różnicę ciśnień P_z , dzięki której czynnik przepływa przez element dławiący, czemu towarzyszy spadek ciśnienia P_d oraz przez odbiornik, na którym istnieje różnica ciśnień P_s . Z bilansu spadków ciśnień wynika, że:

$$P_z = P_d + P_s \quad /37/$$

/Jak widać zakłada się, że instalacja poza w/w elementem dławiącym nie stanowi oporów/. Opór hydrauliczny elementu dławiącego należy do klasy oporów nieliniowych, a zatem słuszny jest wzór:

$$P_d = R^2 Q^2 \quad /38/$$

gdzie:

R - opór elementu dławiącego,

Q - natężenie przepływającej cieczy,

Moc N_s pobierana z układu przez odbiornik określona jest wzorem

$$N_s = P_s \cdot Q \quad /39/$$

Uwzględniając w /39/ wyrażenia /37/ i /38/ otrzymuje się:

$$N_s = /P_z - R^2 Q^2/ Q$$

co po przekształceniu daje wzór

$$P_z = \frac{N_s}{Q} + R^2 Q^2 \quad /40/$$

Z wzoru tego można określić parametry źródła, tj. ciśnienie zasilania i natężenie przepływu, zapewniające odpowiednią moc N_s odbiornika przy obecności w obwodzie elementu dławiącego o wartości oporu R . Łatwo zauważyć, że funkcja P_z/Q jest nieliniowa i dla wartości

$$Q_m = \sqrt{\frac{N_s}{2R^2}}^{1/3} \quad /41/$$

osiąga minimum /rys. 5./ Przekształcając wyrażenie /41/ można stwierdzić, że dla tych optymalnych warunków ma miejsce następujący związek między spadkami ciśnienia

$$P_d = 1/2 P_s \quad /42/$$

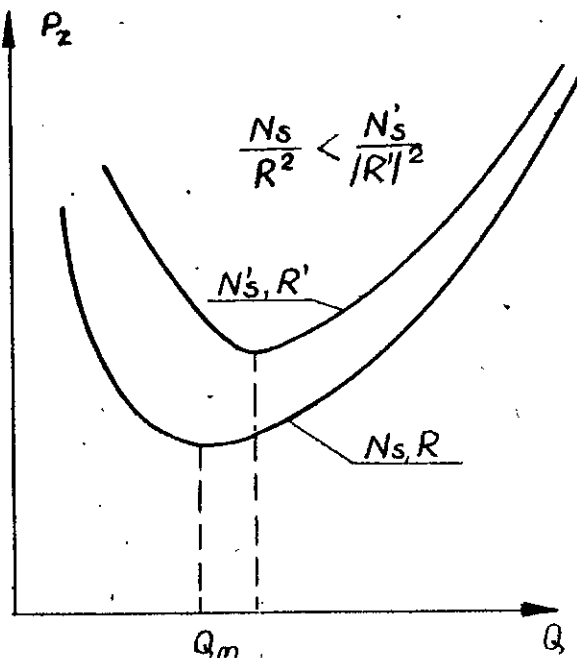
lub uwzględniając /37/

$$P_d = 1/3 P_z \quad /43/$$

W ten sposób można optymalizować układ ze względu na wartość ciśnienia zasilania. Należy jednak zwrócić uwagę, że sprawność układu

$$\eta = \frac{N_s}{N_z} = \frac{P_s}{P_d + P_s} \quad /44/$$

w tym, wyżej określonym, ekstremalnym punkcie wynosi tylko 2/3. Zrozumiałe jest, że zmniejszając natężenie przepływu i podnosząc jednocześnie wartość ciśnienia zasilania w celu zachowania mocy pobieranej przez odbiornik – zmniejszają się straty P_d na elemencie dławiącym, a tym samym sprawność układu wzrasta.



Rys.5.