

dr inż. Andrzej Serwach  
Przemysłowy Instytut  
Automatyki i Pomiarów MERA-PIAP  
Warszawa

## METODY MODELOWANIA PROCESÓW CIĄGŁYCH ZA POMOCĄ MASZYN ANALOGOWYCH

### 1. Wstęp

Dużą grupę zagadnień technicznych można sklasyfikować jako procesy ciągłe opisywane za pomocą modeli matematycznych o parametrach skupionych. Inaczej mówiąc są to procesy, które dają się przedstawić za pomocą układów równań różniczkowych zwyczajnych liniowych i nieliniowych.

Do rozwiązywania tego typu zagadnień szczególnie są przydatne maszyny analogowe, zarówno klasyczne, jak i maszyny analogowe zesterowaniem logicznym. Jako typowe dziedziny zastosowań modelowania analogowego można wymienić:

- procesy chemiczne,
- procesy hutnicze,
- mechanika (budowa maszyn),
- lotnictwo i kosmonautyka,
- elektrotechnika i elektronika,
- energetyka cieplna i jądrowa,
- ekologia (ochrona środowiska),
- biomechanika.

W artykule omówiono trzy różne metody modelowania matematycznego procesów ciągłych: grafów więzów, modelowania z równań podstawowych, modelowania ze schematów strukturalnych.

Główną uwagę poświęcono opisaniu procedury budowy modelu matematycznego procesu. Wynika to stąd, że w literaturze dotyczącej zastosowań maszyn matematycznych do modelowania ten właśnie problem jest zwykle traktowany

marginieśowo. Zagadnienie związane z programowaniem maszyn analogowych omówiono bardziej skrótowo, gdyż istnieje na ten temat obszerna literatura. Warto tu, przede wszystkim polecić pozycję [1].

## 2. Metoda grafów więzów

Metoda grafów więzów jest szczególnie przydatna do modelowania dynamiki fizycznych procesów ciągłych, w których istotny jest przepływ energii. Nazwa została przyjęta przez autora dlatego, że w procesie budowy modelu matematycznego tą metodą, wykorzystanie techniki grafów więzów ma istotne znaczenie. Teoria grafów więzów została opracowana przez grupę uczonych z Massachusetts Institute of Technology pod kierunkiem prof. H. Payntera i służy do graficznego przedstawiania struktury dynamicznej układów fizycznych.

Metoda modelowania komputerowego z wykorzystaniem techniki grafów więzów została opracowana przez autora dla celów modelowania układów hydraulicznych [2,3]. Poniżej podajemy jej rozwinięcie na inne rodzaje układów fizycznych, spotykanych w praktyce inżynierskiej.

Układ fizyczny jest tu traktowany jako przenośnik energii ze źródeł (generatorów), do odbiorników. W związku z takim podejściem wyróżniono dwa podstawowe podzbiory zmiennych stanu:

- zmienne wyężeniowe  $\{e(t)\}$  związane z naprężeniami występującymi w ośrodku,
- zmienne przepływowe  $\{f(t)\}$  związane z przemieszczaniem się ośrodka.

Iloczyn skalarny każdej pary sprzężonej tych zmiennych jest wartością natężenia przepływu energii w danym miejscu, co umownie nazwano mocą w danym punkcie układu.

$$N(t) = e(t) \cdot f(t) \quad /1/$$

W tabelicy 1 zestawiono podstawowe zmienne wyężeniowe i przepływowe, występujące przy analizie układów fizycznych. Dodatkowo zachodzi konieczność posługiwania się całkami względem czasu, z wymienionych w tabelicy 1 zmiennych podstawowych, a więc:

- uogólnionym momentem pędu  $m(t) = \int e(t) dt$  (rzadko używanym),
- uogólnionym przemieszczeniem  $q(t) = \int f(t) dt$  (przesunięcie w ruchu

postępowym, kąt obrotu w ruchu obrotowym, objętość cieczy przy przepływie płynu, ilość ciepła przy przepływie ciepła, ładunek elektryczny przy przepływie prądu).

Tablica 1

Podstawowe zmienne stanu układów fizycznych

Dziedzina	Uogólnione wyężenie $e(t)$	Uogólnione natężenie przepływu $f(t)$
Ruch mechaniczny postępowy	siła $F(t)$	prędkość liniowa $V(t)$
Ruch mechaniczny obrotowy	moment obrotowy $M(t)$	prędkość obrotowa $\omega(t)$
Przepływ płynu (cieczy lub gazu)	ciężnienie $p(t)$	objętościowe natężenie przepływu $Q(t)$
Przepływ ciepła	temperatura $T(t)$	natężenie przepływu ciepła $H(t)$
Przepływ prądu	napięcie $U(t)$	natężenie $i(t)$

Strukturę dynamiczną układu fizycznego można analizować posługując się kilkoma typami elementów, które zestawiono w tabl.2. Wyróżniono pięć elementów jednokanałowych:

- źródło wyężeniowe  $Z_e$  generujące zmienną wyężeniową  $e(t)$  niezależnie od wartości sprzężonej zmiennej przepływowej  $f(t)$ ,
- źródło przepływowe  $Z_f$  generujące zmienną przepływową  $f(t)$  niezależnie od wartości sprzężonej zmiennej wyężeniowej  $e(t)$ ,
- rezystancję  $R$  jako element rozpraszający energię (opisujący efekty tarcia),

- pojemność  $C$  jako element magazynujący energię potencjalną, opisujący wpływ więzów sprężystych,
- inercję  $I$  jako element magazynujący energię kinetyczną opisujący wpływ bezwładności.

Dalej wyróżniono transformator jako element dwukanałowy, przekształcający jeden rodzaj ruchu w drugi oraz dwa węzły idealne trójkanałowe, przepływowy i wytężeniowy, pozwalające odwzorowywać rozgałęzienia strumieni energii w układzie.

Rezystancja, pojemność, inercja i transformator mogą mieć zarówno postać liniową jak i nieliniową. Dodatkowo mogą być one modulowane jednym lub większą ilością sygnałów sterujących.

Zamieszczone w tabl.2 elementy wystarczają do przedstawienia dynamiki układów fizycznych, jednakże w niektórych przypadkach jest pożyteczne wprowadzenie dodatkowych elementów o bardziej złożonej strukturze. Przykładem może być element opisujący charakterystykę statyczną silnika wysokoprężnego, który łączy w sobie funkcje źródła momentu i modulowanej nieliniowej rezystancji wewnętrznej silnika lub transformator zależny od czasu, pożyteczny przy odwzorowywaniu części sterującej układu.

Wprowadzenie dodatkowego elementu nie koliduje z podaną tutaj systematyką, jednak wymaga zawsze ścisłego zdefiniowania jego funkcji będącej z reguły kombinacją prostszych funkcji, realizowanych przez elementy podstawowe.

Każdy z podstawowych elementów struktury (tabl.2) jest oznaczony grafem więzów, a więc pewnego rodzaju siatką graficzną. Za pomocą grafów więzów ilustruje się przepływ energii w układzie i modulację strumieni energii przez elementy struktury. Grafy składają się z symboli literowych (oznaczających typy elementów struktury) połączonych odcinkami prostymi. Odcinki te odwzorowują kanały przepływu mocy, a więc przepływ par sprzężonych sygnałów  $\langle e, f \rangle$ . Za pomocą krótkich poprzecznych kresek na końcach odcinków prostych oznacza się kierunkowość przepływu sygnałów - sygnał  $e$  płynie zawsze w kierunku do tej kreski, a sygnał  $f$  w kierunku przeciwnym. Tak więc graf, w którym wszystkie odcinki łączące symbole literowe są zakończone kreskami poprzecznymi, jest grafem ukierunkowanym. Dodatkowo, w celu oznaczenia sygnałów sterujących traktowanych jako sygnały o zerowej mocy (bez

Tablica 2

Podstawowe elementy struktury dynamicznej układu

Nazwa elementu	Graf więzów	Definicja	Relacja liniowa	Uwagi
Rezystancja	$\frac{e}{f} R$	$e = \varphi_R (f)$	$e = R \cdot f$	rozprasza energię, może być modulowany
Kapacytancja	$\frac{c}{f} C$	$q = \varphi_C (e)$	$q = C \cdot e$	magazynuje energię potencjalną, może być modulowany
Inertancja	$\frac{e}{f} I$	$m = \varphi_I (f)$	$m = I \cdot f$	magazynuje energię kinetyczną, może być modulowany
Zródło wyężeniowe	$Z_{\frac{c}{e} f}$	$e = e(t)$ $f$ wymuszone niezależne od $e$	def.	generuje energię, przypadek szczególny źródła stałego wyężenia $e = \text{const}$
Zródło przepływowe	$Z_{\frac{c}{f} f}$	$f = f(t)$ $e$ wymuszone niezależne od $f$	def.	generuje energię, przypadek szczególny źródła stałego przepływu $f = \text{const}$
Transformator	$\frac{c_1}{f_1} T \frac{c_2}{f_2}$	$e_1 = \varphi_T (e_2)$ $f_2 = \varphi_T (f_1)$	$e_1 = T \cdot e_2$ $T \cdot f_1 = f_2$	przekształca jeden rodzaj ruchu w drugi, idealny w sensie zachowania energii, może być modulowany
Węzeł wyężeniowy	$\frac{c_1}{f_1} \quad 1 \quad \frac{c_2}{f_2}$ $c_3   f_3$	$f_1 = f_2 = f_3$ $\sum_{i=1}^3 c_i = 0$	def.	idealny w sensie zachowania energii rozgałęzienia strumienia energii typu szeregowego
Węzeł przepływowy	$\frac{e_1}{f_1} \quad 0 \quad \frac{c_2}{f_2}$ $e_3   f_3$	$c_1 = e_2 = e_3$ $\sum_{i=1}^3 f_i = 0$	def.	idealny w sensie zachowania energii rozgałęzienia strumienia energii typu bocznikowego

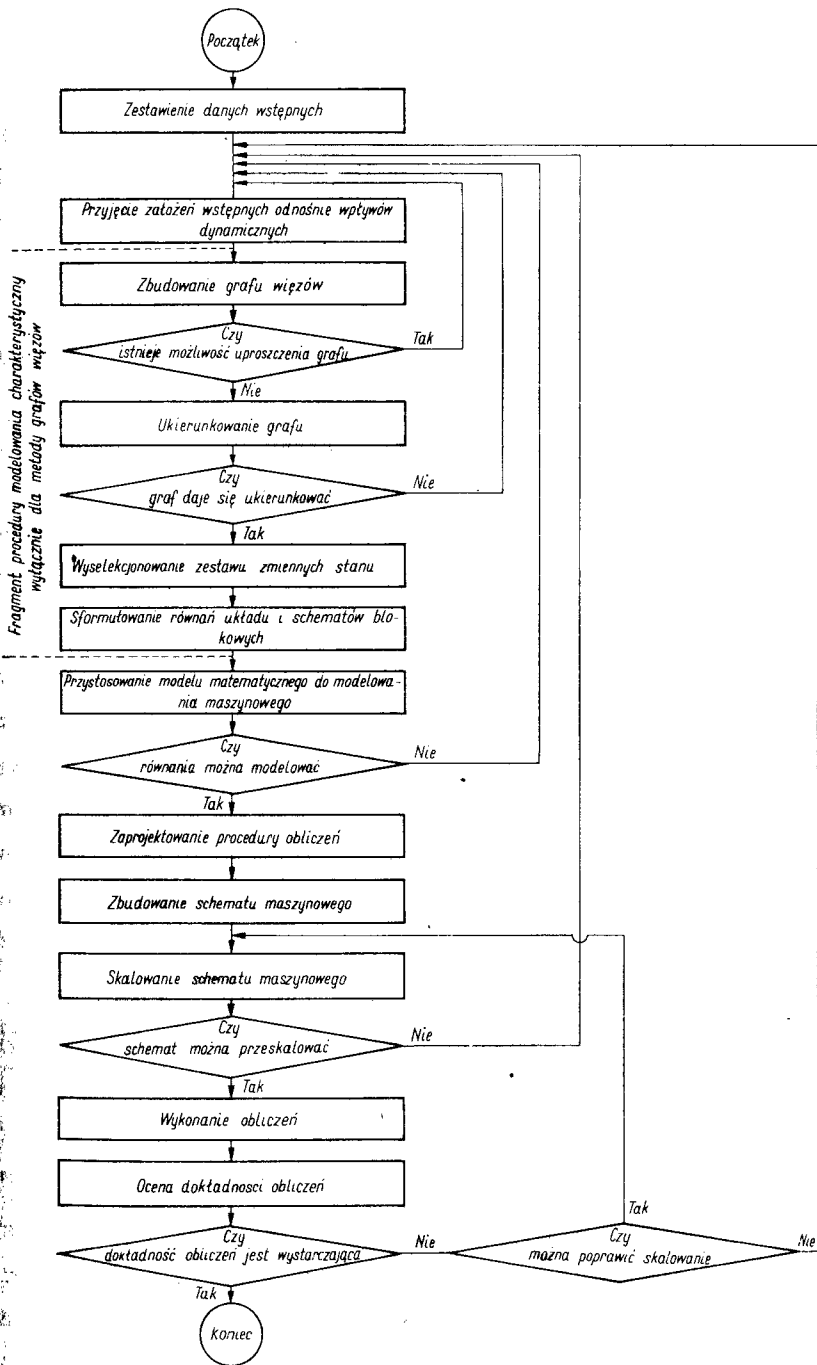
oddziaływania zwrotnego), używa się grafów zwyrodniałych przekazujących tylko jeden sygnał  $e$  lub  $f$  (albo ich całki). Grafy zwyrodniałe są oznaczone za pomocą odcinków zakończonych strzałkami, oznaczającymi kierunek przepływu sygnału. Aby zgodnie z definicją nie zakłócać równowagi energetycznej układu, graf zwyrodniały przekazujący sygnał  $e$  lub  $m$  powinien wychodzić z węzła 0, natomiast graf przekazujący sygnał  $f$  lub  $q$  powinien wychodzić z węzła 1.

Elementy struktury przedstawiają wydzielone zjawiska dynamiczne zachodzące w układzie i nie są ściśle związane z elementami konstrukcyjnymi układu. Dany element konstrukcyjny może być odwzorowany za pomocą zbioru elementów struktury dynamicznej (w tym również zbioru pustego, tzn. pominięty w analizie dynamiki). Zbiór ten może być różny w zależności od przyjętych założeń i żądanej dokładności odwzorowania. Ilustracja powyższego bardzo istotnego stwierdzenia podana jest na przykładzie elementów hydraulicznych w tabl. 2 i w literaturze [3].

### 2.1. Zasady budowy modeli dynamicznych i projektowania programów obliczeń

Obliczenia dynamiczne są jednym z ważniejszych fragmentów procesu projektowania układu fizycznego i mogą być prowadzone w różnych etapach tego procesu. Model matematyczny powinien być uściślony w miarę zwiększania się ilości informacji, a więc począwszy od projektu wstępnego gdy model jest najmniej dokładny aż do fazy badań eksperymentalnych prototypu, gdzie model matematyczny powinien najbardziej odpowiadać rzeczywistości.

Niezależnie od etapu projektowania, w którym dokonuje się obliczeń dynamicznych (bądź się je powtarza w formie bardziej uściślonej) można wyróżnić charakterystyczne kroki przy budowie modelu matematycznego, projektowaniu programu obliczeń i wykonaniu tych obliczeń. Cały proces modelowania dynamiki nosi charakter wielopętlowej iteracji. Na rysunku 1 przedstawiono w formie sieci działań procedurę postępowania przy modelowaniu maszynowym dynamiki metodą grafów węzłów. W sieci zaznaczono tylko główne kroki i pętle. W dalszym ciągu rozdziału szczegółowo omówiono wszystkie kroki procedury wymienione na rys. 1.



Rys. 1. Sieć działań procedury postępowania przy modelowaniu dynamiki

### 2.1.1. Zestawienie danych wstępnych

Pierwszym krokiem w analizie dynamiki układu hydraulicznego powinno być zestawianie danych wstępnych. Ilość danych wstępnych zależy od fazy, w jakiej znajduje się projekt układu i celu obliczeń dynamicznych. Zazwyczaj jako dane wstępne traktuje się:

- założenia techniczne układu,
- wyniki obliczeń stanów ustalonych,
- zbiór charakterystyk statycznych i dynamicznych elementów, które wchodzi w skład układu,
- wyniki badań laboratoryjnych elementów, a nawet całego układu o ile celem obliczeń dynamicznych jest identyfikacja układu.

Oprócz powyższych informacji w zestaw danych wstępnych powinien wchodzić ramowy program obliczeń, określający ich cel i zakres, oraz żadaną dokładność obliczeń.

### 2.1.2. Przyjęcie założeń wstępnych odnośnie wpływów dynamicznych

Po zestawieniu danych wstępnych, na ich podstawie, a szczególnie na podstawie ramowego programu obliczeń, można przyjąć założenia wstępne o wpływie poszczególnych parametrów układu na przebiegi dynamiczne i pominięciu czynników mających znaczenie drugorzędne. Na tym etapie procesu modelowania bardzo duże znaczenie ma intuicja i doświadczenie zawodowe prowadzącego analizę, bowiem im bardziej założenia wstępne są zgodne z rzeczywistością tym krótszy jest proces iteracyjny budowy modelu.

Przyjęcie założeń polega na wyspecyfikowaniu parametrów, które najprawdopodobniej mają istotny wpływ na przebieg procesów dynamicznych w danym układzie.

### 2.1.3. Zbudowanie grafu więzów

Na podstawie przyjętych w poprzednim kroku założeń wstępnych buduje się następnie graf więzów układu, stosując podstawowe elementy struktury dynamicznej. Elementy te reprezentują parametry układu wyspecyfikowane w założeniach.

Zbudowanie grafu polega na jego narysowaniu, nazwaniu występujących w nim zmiennych i parametrów, oraz wyspecyfikowaniu wartości liczbowych pa-



rametrów, występujących w grafie. Przy określeniu wartości liczbowych korzysta się z danych wstępnych. Każdy element grafu może być scharakteryzowany konkretną wartością liczbową, jeżeli jest liniowy, lub zależnością funkcyjną w przypadku nieliniowości.

Już na tym etapie analizy istnieje możliwość skorygowania założeń wstępnych. Korekcja polega przede wszystkim na pominięciu tych elementów, które, jak wynika ze struktury grafu i wartości liczbowych, nie będą miały istotnego wpływu na przebiegi dynamiczne, a zostały wymienione w założeniach i wprowadzone do grafu. W celu oceny możliwości uproszczenia grafu trzeba porównać między sobą wartości liczbowe parametrów opisujących elementy struktury tego samego typu, a więc oddzielnie rezystancje, pojemności, inercje, źródła wytężenia i przepływu.

Elementy danego typu, ale opisujące różne rodzaje ruchu należy porównywać uwzględniając "przełożenia", a więc współczynniki transformatorów z zachowaniem zasady równości strumienia energii, przepływającego przez element pierwotny i transformowany. W przypadku gdy wartość liczbową charakteryzująca dany element jest znacznie mniejsza od największej wartości liczbowej dla elementów tego samego typu w grafie, element taki ma nieznaczny wpływ na dynamikę układu, można więc go pominąć i w ten sposób uprościć graf, korygując jednocześnie założenia wstępne.

Kryterium klasyfikacji parametrów - pod względem ich wartości - na istotne i pomijalne zależy od żądanej dokładności obliczeń i od możliwości obliczeniowych maszyny. W przypadku maszyn analogowych, ze względu na dość wąskie zakresy nastaw współczynników, elementy o wartościach mniejszych od maksymalnych więcej niż sto razy muszą być na ogół odrzucane ze względu na trudności z przeskalowaniem modelu maszynowego.

Oprócz wyżej opisanej, istnieje również możliwość wstępnego uproszczenia grafu przez wprowadzenie elementów zastępczych danego typu, np. sumarycznej rezystancji, sumarycznej pojemności itp. Wprowadzenie elementów zastępczych bez istotnej zmiany struktury grafu jest możliwe tylko wtedy, jeżeli elementy zastępowane, połączone są ze sobą bezpośrednio szeregowo, bądź równoległe (przez węzły wytężeniowe lub przepływowe).

Jeżeli łączy się ze sobą elementy opisujące różne rodzaje ruchu, należy uwzględnić przełożenia transformatorów. Dla przykładu można połączyć rezystancję hydrauliczną oporów przepływu w kanałach wewnętrznych silnika z rezystancją mechaniczną strat tarcia w silniku, uwzględniając przełożenie w postaci chłonności jednostkowej silnika. Wypadkowa rezystancja może być przy tym zarówno mechaniczna, jak i hydrauliczna.

#### 2.1.4. Ukierunkowanie grafu

Otrzymany w poprzednim kroku graf więzów musi być następnie ukierunkowany, a więc należy na nim zaznaczyć kierunki przepływu sygnałów, tzn. przyczynowość. Inaczej mówiąc jest to ustalenie, które zmienne w każdym elemencie mają być w dalszym ciągu uważane za wejściowe, a które za wyjściowe.

Ukierunkowanie grafu nie może być zrealizowane w sposób dowolny. Ograniczenia wynikają zarówno z właściwości poszczególnych elementów struktury dynamicznej, jak również z właściwości maszyn matematycznych. Z punktu widzenia przyczynowości elementy struktury można sklasyfikować hierarchicznie, zależnie od ważności narzuconych ograniczeń. Klasyfikacja ta jest podana w tabl.3. Opierając się na tej hierarchii można ustalić procedurę ukierunkowania grafu. Z punktu widzenia przyczynowości wszystkie elementy struktury można podzielić na trzy grupy:

**Generatory przyczynowości.** Do tej grupy należą przede wszystkim elementy  $Z_e$  i  $Z_f$ , które zawsze generują informację o przyczynowości. O ile to możliwe elementy C i I powinny być również generatorami przyczynowości z uwagi na zalecaną formę całkową.

**Przenośniki informacji o przyczynowości.** Do grupy tej należą elementy 0, 1 i T, które przenoszą informacje o przyczynowości wzdłuż grafu. Narzucona przez nie kierunkowość musi być bezwzględnie przestrzegana.

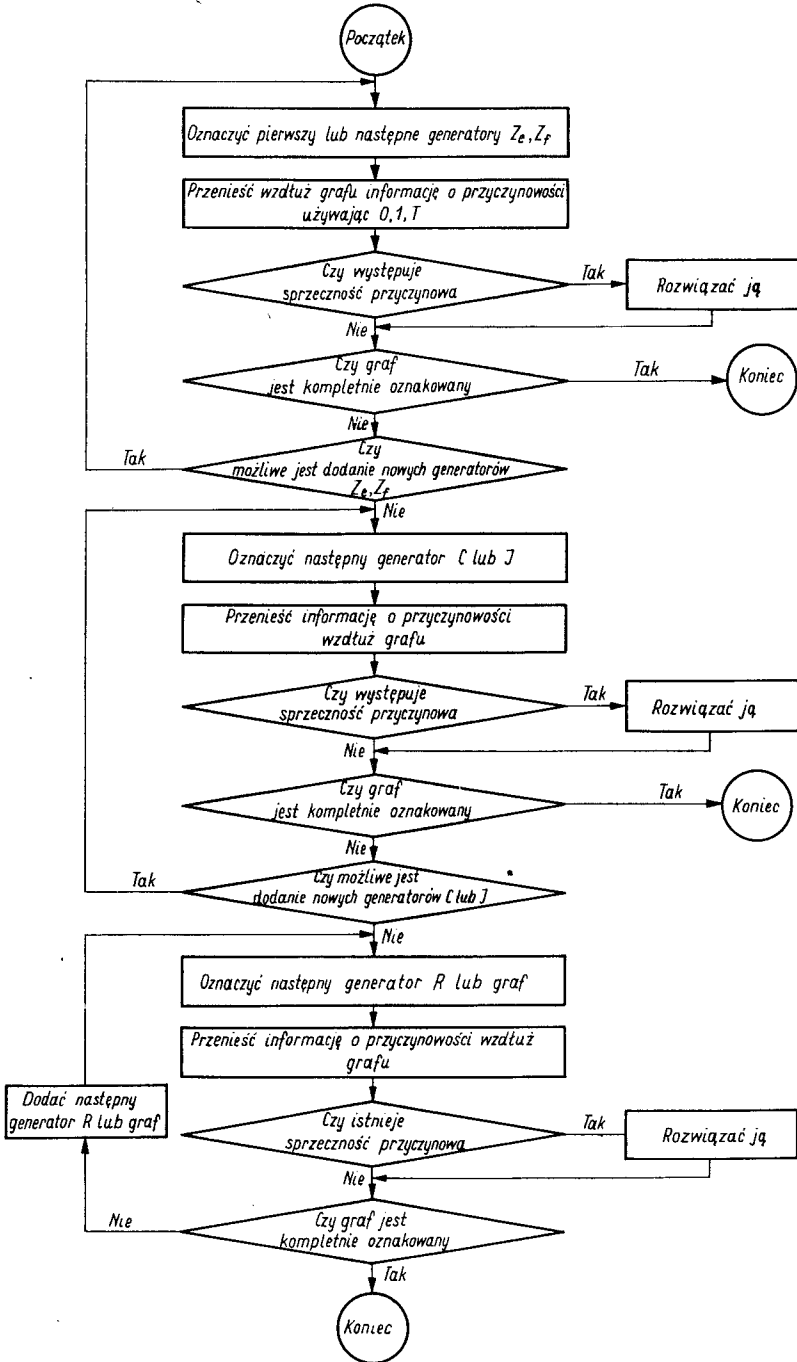
**Odbiorniki informacji o przyczynowości.** Zalicza się tutaj element R, a czasem także C i I.

Ogólna metoda oznaczenia kierunkowości polega na użyciu generatorów dla wprowadzania informacji o przyczynowości do grafu, użyciu przenośników w celu implikacji tej informacji i zakończeniu procesu ukierunkowania grafu na odbiornikach. Jest to zazwyczaj procedura iteracyjna z uwagi na występujące

Tablica 3

Hierarchiczna klasyfikacja elementów struktury z punktu widzenia istotności ograniczeń przy ukierunkowaniu grafu

Poziom ważności ograniczeń	Typ elementu	Grafy ukierunkowane	Wymagania
1	$Z_e$	$Z_e \xrightarrow{e}$	kierunkowość musi odpowiadać fizycznej definicji
	$Z_f$	$Z_f \xleftarrow{f}$	
2	T	$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1} \quad \xrightarrow{e_2} \\ f_1 \quad T \quad f_2 \\ \xleftarrow{e_1} \quad \xleftarrow{e_2} \\ f_1 \quad T \quad f_2 \end{array}$	zasadą jest, że kierunkowość narzucona przez grafy wchodzące do elementu od strony już oznakowanej (jeden dla T, jeden lub dwa dla 0,1) determinuje kierunkowość grafów wychodzących do części nie oznakowanej. W innym przypadku element traci sens
	1	$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1} \quad \xrightarrow{e_2} \quad \xrightarrow{e_1} \quad \xrightarrow{e_2} \\   \quad   \quad   \quad   \\ e_3 \quad e_3 \\ \xrightarrow{e} \quad \xrightarrow{e_2} \\   \\ e_3 \end{array}$	
	0	$\begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \quad 0 \quad \xrightarrow{f_2} \quad \xrightarrow{f_1} \quad 0 \quad \xrightarrow{f_2} \\   \quad   \\ f_3 \quad f_3 \\ \xrightarrow{f_1} \quad 0 \quad \xrightarrow{f_2} \\   \\ f_3 \end{array}$	
3	C	$C \xrightarrow{e}$	zalecana forma całkowa ze względu na właściwości maszyn matematycznych
	I	$I \xleftarrow{f}$	
4	R	$\begin{array}{c} R \xrightarrow{e} \\ R \xleftarrow{f} \end{array}$	forma dowolna



Rys.2. Sieć działań procesu ukierunkowania grafu

Tablica 4

Podział zbioru zmiennych grafu na podzbiory

Lp.	Nazwa podzbioru zmiennych	Wyszczególnienie	G r a f
1.	Zmienne stanu energetycznego	wytężeniowe dla C przepływowe dla I	$C \xrightarrow{e}$ $I \xrightarrow{f}$
2.	Zmienne wejściowe	wytężeniowe związane z $Z_e$ przepływowe związane z $Z_f$	$Z_e \xrightarrow{e}$ $Z_f \xrightarrow{f}$
3.	Zmienne przejściowe	wytężeniowe i przepływowe związane z R w danych ukierunkowaniach	$R \xrightarrow{e}$ $R \xrightarrow{f}$
4.	Zmienne dodatkowe	pozostałe zmienne związane z 0;1; T w danych ukierunkowaniach	
5.	Zmienne obserwowalne	przeznaczone do rejestracji, wybrane spośród wszystkich pozostałych podzbiorów, zwykle z dwóch pierwszych	

w grafie sprzeczności, które wymagają korekt. Korekty te, odwrotnie niż omawiane w punkcie 2.1.3., wymagają zwykle dodawania do grafu nowych elementów lub zmiany usytuowania elementów i noszą charakter istotnych zmian strukturalnych. Algorytm procesu ukierunkowania grafu jest przedstawiony w formie sieci działań na rys.2. Stosowanie kompletnego algorytmu jest konieczne tylko w bardziej skomplikowanych przypadkach. Każdy krok iteracyjny jest wywołany niemożliwością ukierunkowania grafu w danej postaci. Dodanie następnego generatora oznacza zmianę struktury dynamicznej modelu (przez rzeczywiste dodanie nowego elementu lub zmianę miejsca elementu w grafie), co wymaga korekty założeń wstępnych. Fakt ten jest zaznaczony w ogólnym algorytmie postępowania przedstawionym na rys.1.

#### 2.1.5. Klasyfikacja zmiennych stanu

Ukierunkowanie grafu kończy w zasadzie budowę modelu dynamiki układu. Dalsze etapy dotyczą już przystosowania modelu do obliczeń maszynowych i wykonania samych obliczeń. Pierwszym krokiem w tej części działań jest sklasyfikowanie zmiennych stanu. Ilość zmiennych każdego typu (wyteżeniowych, przepływowych i ich całek) jest równa ilości więzów z tym, że więzom zwyczajnym przypisana jest tylko jedna zmienna podstawowa lub jej całka. Dla celów analizy nie wszystkie zmienne są potrzebne. W celu ułatwienia ich selekcji jest pożyteczne uprzednie pogrupowanie zmiennych. W tabl.4 przedstawiono podział zbioru zmiennych na pięć podzbiorów, w które należy je pogrupować.

Ostatnim etapem klasyfikacji jest przypisanie odpowiednim zmiennym przepływowym związanym z węzłami "0" i odpowiednim zmiennym wyteżeniowym związanym z węzłami "1" znaków "+" lub "-" w zależności od tego czy dany węzeł sumuje, czy też rozdziela strumień energii.

#### 2.1.6. Sformułowanie równań układu

Mając sklasyfikowane zmienne grafu i posługując się definicjami elementów można sformułować w sposób uporządkowany równania układu. Najbardziej elegancką formą zapisu matematycznego właściwości dynamicznych układu jest zbiór równań przedstawiający przebiegi dynamiczne w układzie w zależności tylko od zmiennych wejściowych i zmiennych stanu energetycznego. Należy

więc dążyć do wyeliminowania zmiennych przejściowych i dodatkowych pod warunkiem oczywiście, że nie są one wyznaczone jako obserwowalne. W efekcie powinno się otrzymać zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu liniowych i nieliniowych o stałych i zmiennych współczynnikach, zależnych od zmiennych wejściowych i stanu energetycznego. Oczywiście jest to możliwe tylko w tym przypadku jeżeli cały graf ma formę całkową (do czego zawsze powinno się dążyć), tzn. wszystkie elementy ukierunkowane C i I w grafie są opisane równaniem różniczkowym pierwszego rzędu.

Procedurę formułowania równań można zrealizować w pięciu krokach:

1. Dla każdego magazynującego energię elementu grafu należy napisać jego równanie ze zmiennymi stanu energetycznego jako wyjściowymi, a więc:

$$\text{dla C} \quad \text{---} \quad e = \Phi_c^{-1} [q(t)] \quad /2/$$

$$\text{albo} \quad \frac{de}{dt} = \varphi_c^{-1} [f(t)] \quad /3/$$

$$\text{dla I} \quad \text{---} \quad f = \Phi_I^{-1} [m(t)] \quad /4/$$

$$\text{albo} \quad \frac{df}{dt} = \varphi_I^{-1} [e(t)] \quad /5/$$

2. Dla wszystkich zmiennych przejściowych związanych z R należy napisać relacje zgodnie z kierunkowością, a więc

$$\text{dla R} \quad \text{---} \quad e = \varphi_R(f) \quad /6/$$

$$\text{dla R} \quad \text{---} \quad f = \varphi_R^{-1}(e) \quad /7/$$

3. Należy przedstawić każdą dodatkową zmienną (związaną z 0; 1; T) bezpośrednio w funkcji pozostałych zmiennych.

Po zrealizowaniu powyższych trzech kroków otrzymuje się trzy podzbiory równań, uzależniających zmienne stanu energetycznego, zmienne przejściowe i zmienne dodatkowe od zmiennych wejściowych (ze źródeł) i wzajemnie

od siebie. Te trzy podzbiory opisują dynamikę układu. Jeżeli w czasie obliczeń będzie zachodziła konieczność obserwowania zmiennych przejściowych i dodatkowych, proces formułowania równań układu należy w tym miejscu zakończyć, w przeciwnym przypadku równania można przekształcić w celu wyeliminowania zmiennych przejściowych i dodatkowych, co robi się w następnych dwóch krokach:

4. Eliminuje się zmienne przejściowe określone za pomocą zależności statycznych od zmiennych wejściowych, stanu energetycznego i dodatkowych.
5. Eliminuje się zmienne dodatkowe określone jako funkcje zmiennych wejściowych i stanu energetycznego (przejściowe już wyeliminowane).

Po zrealizowaniu odpowiednich kroków (trzech lub pięciu), otrzymuje się model matematyczny dynamiki układu jako zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu. Zgodnie z rozdz.2, występujące w zbiorze równań symbole funkcji  $R$ ,  $C$ ,  $I$  i ich odwrotności oraz  $T$  mogą być współczynnikami w przypadku równań liniowych, albo funkcjami w przypadku równań nieliniowych i o zmiennych współczynnikach. Układ równań opisujący model matematyczny układu można przedstawić graficznie w formie schematu blokowego, w którym występują bloki realizujące proste funkcje matematyczne i linie sygnałowe łączące bloki między sobą. Zbiór podstawowych bloków podano w tabl.5. Stosowanie schematów blokowych jest bardzo przydatne w przypadku stosowania do modelowania maszyn analogowych, hybrydowych i cyfrowych wyposażonych w języki symulacyjne, gdyż ułatwia to znacznie programowanie maszyny. Przy pewnej wprawie modelującego jest możliwe bezpośrednie przejście z grafu do schematu blokowego bez konieczności rozpisywania równań.

#### 2.1.7. Przystosowanie modelu matematycznego do modelowania maszynowego

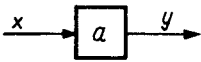
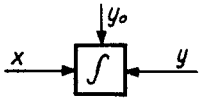
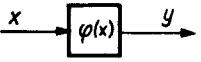
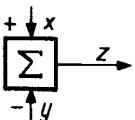
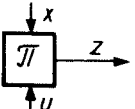
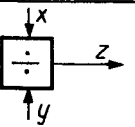
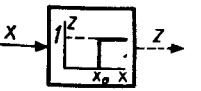
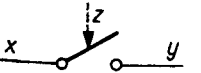
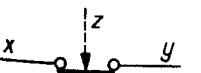
Otrzymany w następstwie opisanych wyżej zabiegów model matematyczny dynamiki układu musi być następnie przystosowany do maszyny matematycznej, którą dysponuje modelujący. Chodzi tutaj nie o typ maszyny, lecz o jej wyposażenie. Przystosowanie równań do modelowania maszynowego powinno przede wszystkim zawierać:

- uproszczenie przebiegów zmiennych wejściowych, tak aby łatwo można było je generować w maszynie. Konieczność korzystania z tego zabiegu występuje rzadko, gdyż zmienne wejściowe są zazwyczaj dość prostymi



Tablica 5

Podstawowe bloki funkcyjne używane do budowy schematów blokowych modelu matematycznego układu

Schemat	Równanie definiujące	Typ bloku
	$y = ax$	mnożenie przez stały współczynnik
	$y = \int_0^{\tau} x dt + y_0$	całkowanie w przedziale czasu $0 \dots \tau$ , gdzie $\tau$ czas liczenia
	$y = \varphi(x)$	funkcja nieliniowa jednej zmiennej
	$z = x - y$	sumowanie
	$z = x \cdot y$	mnożenie
	$z = \frac{x}{y}$	dzielenie
	$z = 1$ dla $x \geq x_0$ $z = 0$ dla $x < x_0$	porównywanie sygnałów analogowych i generacja sygnału logicznego dwustanowego
	$y = 0$ dla $z = 0$ $y = x$ dla $z = 1$	styk normalnie otwarty sterowany sygnałem logicznym dwustanowym
	$y = x$ dla $z = 0$ $y = 0$ dla $z = 1$	styk normalnie zamknięty sterowany sygnałem logicznym dwustanowym

funkcjami standardowymi,

- uproszczenie formy nieliniowości do postaci łatwej do zamodelowania. Oczywiście możliwa tu jest nawet całkowita linearyzacja w przypadkach dopuszczalnych ze względu na dokładność przybliżenia,
- ponowne przeanalizowanie możliwości pominięcia niektórych wpływów dynamicznych jak to było już zrobione w punkcie 2.1.3.

Jeżeli w wyniku procesu przystosowania równań do modelowania zostają wprowadzane do nich jakiegokolwiek zmiany, niezbędna jest korekta założeń wstępnych i w miarę konieczności również pozostałych wcześniejszych kroków algorytmu.

#### 2.1.8. Zaprojektowanie procedury obliczeń

Po przystosowaniu układu równań do możliwości maszyny, którą dysponuje modelujący, niezbędne jest ułożenie procedury obliczeń. Należy więc wykonać następujące działania:

- wyspecyfikowanie zmiennych obserwowalnych,
- ułożenie planu obliczeń zawierającego: sposób i kolejność wprowadzania do modelu zmiennych sterujących, procedurę rozwiązywania zadania, sposób i kolejność rejestracji danych wyjściowych (zmiennych obserwowalnych).

Bardziej szczegółowego omówienia wymaga procedura rozwiązywania zadania, która jest podstawową częścią planu obliczeń. W praktyce inżynierskiej najczęściej używa się procedury prób i błędów w celu uzyskania żadanego rozwiązania. Dotyczy to szczególnie układów przemysłowych, które są budowane z elementów handlowych dobieranych z typoszeregów. W przypadku modelowania dynamiki nowo projektowanych elementów, a również całych układów o przeznaczeniu specjalnym jest możliwe stosowanie procedur optymalizacyjnych. Praktycznie w grę wchodzi tzw. optymalizacja parametryczna czyli automatyczne poszukiwanie za pomocą maszyny takich wartości wybranych parametrów modelu dynamicznego, dla których rozwiązanie jest możliwie najbliższe optymalnemu, według przyjętego kryterium jakości. Kryteria jakości mogą mieć różną postać zależnie od potrzeb. Muszą one jednak zawsze posiadać właściwości funkcji odległości w przestrzeni rozwiązań. Często stosowanym kryterium przy modelowaniu dynamiki jest całka z kwadratu uchybu lub algebraicznej

kombinacji kwadratów uchybów, czyli różnic między przebiegiem rzeczywistym a zadany daną zmiennej, w zadany czasie [3]. Innym interesującym przykładem jest kryterium energetyczne [5]. Kryterium jakości wybiera się zwykle tak, aby rozwiązanie optymalne odpowiadało minimalnej wartości kryterium.

Istnieje wiele sposobów automatycznej optymalizacji parametrycznej za pomocą maszyn matematycznych [3 i 5]. Na zakończenie należy zwrócić uwagę, że tradycyjne maszyny analogowe (bez sterowania logicznego) nie nadają się do przeprowadzania optymalizacji automatycznej.

#### 2.1.9. Zbudowanie schematu maszynowego

Mając określony model matematyczny i procedurę obliczeń należy przystąpić do zaprogramowania maszyny analogowej. Pierwszym krokiem w programowaniu maszyny jest zbudowanie schematu maszynowego. Schemat maszynowy jest graficznym przedstawieniem sieci połączeń członów obliczeniowych maszyny analogowej. Schemat maszynowy buduje się tak, aby odwzorowywał model matematyczny przedstawiony w formie układu równań bądź schematu blokowego.

W przypadku, gdy model matematyczny jest podany w formie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, budowę schematu maszynowego należy rozpocząć od narysowania integratorów w ilości odpowiadającej ilości równań w układzie. Na wyjściach integratorów należy następnie zaznaczyć zmienne stanu, których pochodne znajdują się po lewej stronie układu równań. Następnie wyjścia i wejścia integratorów należy połączyć bezpośrednio przez potencjometry, sumatory, inwertory i człony nieliniowe, zgodnie z zależnościami algebraicznymi, rozpisanymi po prawej stronie układu równań.

W przypadku jeżeli model matematyczny jest przedstawiony w formie schematu blokowego, zbudowanie schematu maszynowego polega na zastąpieniu bloków w schemacie blokowym odpowiednimi symbolami członów obliczeniowych, które realizują w maszynie funkcje matematyczne wyrażone przez bloki. Przedstawienie modelu matematycznego w formie schematu blokowego w zdecydowany sposób ułatwia programowanie maszyny.

#### 2.1.10. Skalowanie schematu maszynowego

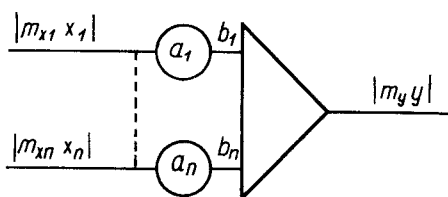
Skalowanie schematu maszynowego jest niezbędne dlatego, że zakres zmian sygnałów w maszynie jest ograniczony do  $\pm 1$  JM (JM - jednostka maszynowa,

w maszynie WAT 1001 wynosi 100 V), natomiast zakresy zmian zmiennych fizycznych, występujących w równaniach zazwyczaj nie odpowiadają możliwemu zakresowi zmian zmiennych maszynowych. Wyróżnia się skalowanie amplitud i skalowanie czasu.

Najprostszy sposób doboru skal amplitud dla zmiennych maszynowych polega na oszacowaniu wartości maksymalnych odpowiednich zmiennych fizycznych i doborze współczynnika skali amplitudy  $m_x$  danej zmiennej fizycznej  $x$  z zależności:

$$m_x \cong \frac{1 JM}{x_{\max}} \quad /8/$$

Dla wygody operowania współczynnikami skali, szczególnie przy skalowaniu osi współrzędnych na wykresach, gdy dana zmienna jest wyznaczona jako obserwowalna, jest wskazane dobieranie skal tak, aby były one wielokrotnościami lub podwielokrotnościami jednostek, w jakich są wyrażone zmienne fizyczne. Po określeniu współczynników skal amplitud oblicza się wartości nastaw potencjometrów (w JM) i wybiera się wzmocnienia wejść członów operacyjnych maszyny według zależności:



dla sumatorów:  $a_i b_i = \frac{m_y}{m_{x_i}} K \quad /9/$

dla integratorów:  $a_i b_i = \frac{m_y}{m_{x_i} \cdot m_t} K \quad /10/$

gdzie:

$i = 1, 2 \dots n;$

$a_i$  - nastawa  $i$ -tego potencjometru (JM),

$b_i$  - wzmocnienie  $i$ -tego wejścia,

$K$  - wartość współczynnika, przez który jest mnożona zmienna fizyczna  $x_i$  w modelu matematycznym,

$m_{x_i}$  - współczynnik skali amplitudy zmiennej wejściowej  $x_i$ ,

$m_y$  - współczynnik skali amplitudy zmiennej wyjściowej  $y$ ,

$m_t$  - współczynnik skali czasu (patrz niżej),

$|m_{x_i} x_i|$  ;  $|m_y y|$  zmienne maszynowe.

Po przeskalowaniu amplitud, w przypadku gdy wzmocnienie na wejściach integratorów otrzymuje się zbyt małe lub zbyt duże w stosunku do możliwości maszyny, jest niezbędne odpowiednie przyspieszenie lub zwolnienie przebiegów obliczeniowych w maszynie w stosunku do przebiegów w rzeczywistym układzie. Inaczej mówiąc niezbędne jest wprowadzenie różnicy między czasem maszynowym i rzeczywistym według współczynnika skali czasu:

$$m_t = \frac{t_m}{t_{rzecz}} \quad /11/$$

gdzie:

$t_m$  - czas maszynowy

$t_{rzecz}$  - czas rzeczywisty (w układzie fizycznym).

Ze względu na niemożność dokładnego określenia wartości maksymalnych wszystkich zmiennych fizycznych, opisane wyżej skalowanie jest skalowaniem wstępnym. Następnie należy uruchomić program w maszynie i w przypadku gdy część członów operacyjnych przesterowuje się (wartości maksymalne zmiennych maszynowych przekraczają 1 JM) poprawić skalowanie, zmniejszając odpowiednio współczynniki skal przesterowujących się zmiennych. W przypadku gdy wartości maksymalne niektórych zmiennych są znacznie mniej-

sze od 1 JM, należy odpowiednio zwiększyć współczynniki skal tych zmiennych. Każda zmiana współczynnika skali danej zmiennej wymaga zmiany tych nastaw, w określeniu których [10] i [11] dany współczynnik skali występuje. Zmiana współczynnika skali czasu wymaga równoczesnej zmiany współczynników na wszystkich wejściach wszystkich integratorów w schemacie maszynowym.

Jeżeli schemat maszynowy nie daje się przeskalować, tzn. wartości współczynników wykraczają poza zakres możliwy do realizacji, oznacza to błędnie przyjęty model matematyczny i należy wrócić do początku procedury.

#### 2.1.11. Wykonanie obliczeń

Po przeskalowaniu i uruchomieniu programu wykonuje się obliczenia zgodnie z procedurą zaplanowaną w punkcie 2.1.8. Wyniki obliczeń z maszyny analogowej można zwykle otrzymywać w postaci odczytów z woltomierza cyfrowego wyskalowanego w JM, w postaci przebiegów obserwowalnych na monitorze, wreszcie, co jest najwygodniejsze, jako wykresy z rejestratora XYt zarówno w funkcji czasu jak i w formie portretu fazowego.

#### 2.1.12. Ocena dokładności obliczeń

W problemie dokładności obliczeń wydzielić można dwa zasadnicze podproblemy:

- dokładność obliczeń w maszynie,
- dokładność odwzorowania właściwości rzeczywistego układu za pomocą modelu.

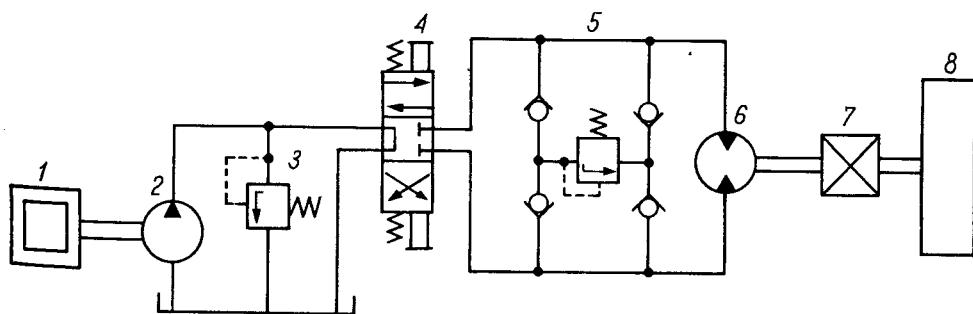
Dokładność obliczeń w maszynie zależy od typu i dokładności samej maszyny i jej podstawowych członów oraz od sposobu zaprogramowania. Zagadnienia dokładności obliczeń w tym rozumieniu i sposobów jej poprawiania są omówione szczegółowo w podręcznikach programowania. Szczególnie obiecującą dla analizy dokładności obliczeń jest metoda badania wrażliwości [1] odpowiedzi dynamicznej modelu w maszynie na uchyby wartości parametrów. W przypadku niezadawalającej dokładności obliczeń w maszynie należy przede wszystkim podjąć próbę poprawienia programu maszynowego, zwłaszcza ponownego przeskalowania.

Wstępnej oceny dokładności odwzorowania właściwości rzeczywistego układu za pomocą modelu można dokonać drogą analizy założeń upraszczających przyjętych w trakcie modelowania. Ścisła ocena dokładności może być jednak

że dokonana tylko przez porównanie przebiegów dynamicznych w modelu z przebiegami w rzeczywistym obiekcie. W przypadku identyfikacji obiektu sterowania porównanie takie jest w ogóle celem obliczeń. W przypadku projektowania nowego urządzenia porównania takiego można dokonać dopiero po wykonaniu i przebadaniu prototypu. Tym można wytłumaczyć prawidłowość, że model dynamiczny układu jest tym ściślejszy, im bliżej do końca procesu projektowania. Jeżeli dokładność obliczeń jest niewystarczająca (w obu aspektach), należy wrócić do początku procesu iteracyjnego. W przypadku zadowalającej dokładności obliczeń, proces modelowania jest zakończony.

## 2.2. Przykład analizy dynamiki hydraulicznego napędu ruchu obrotowego nadwozia koparki

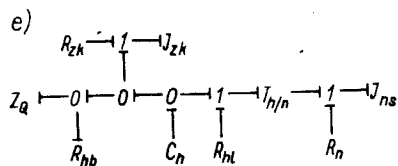
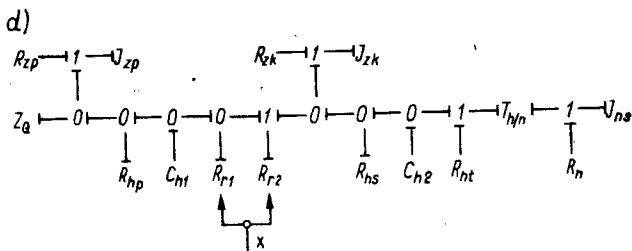
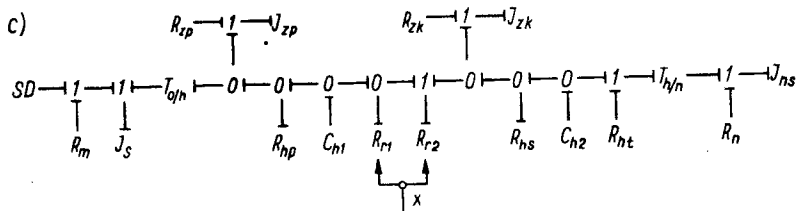
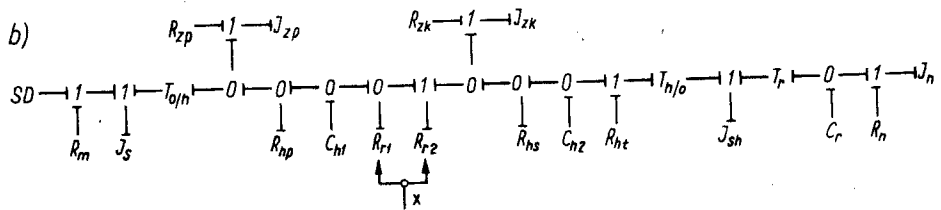
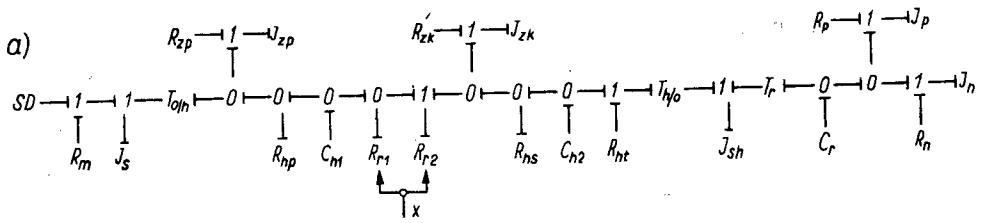
Dla przykładu opisano poniżej główne etapy budowy modelu matematycznego i przygotowania programu obliczeń w przypadku analizy dynamiki hydraulicznego napędu ruchu obrotowego nadwozia koparki. Schemat hydrauliczny tego napędu pokazano na rys.3. Na rys.4 przedstawiono grafy więzów różnych modeli dynamicznych tego układu, poczynając od najbardziej skomplikowanego (wynikającego z założeń wstępnych), aż do najprostszego, przyjętego ostatecznie do modelowania maszynowego.



Rys.3. Schemat hydraulicznego napędu obrotu koparki 1 - silnik wysokoprężny, 2 - pompa stałej wydajności, 3 - zawór przelewowy, 4 - rozdzielacz, 5 - zawór krzyżowy, 6 - silnik hydrauliczny, 7 - reduktor, 8 - nadwozie koparki

W modelu wstępnym przedstawionym za pomocą grafu więzów na rys. 4a uwzględniono następujące właściwości układu:

- charakterystykę regulatorową silnika wysokoprężnego, uzależniającą moment na wale silnika od jego obrotów (element SD),



Rys. 4. Grafy więzów kolejnych wariantów modelu matematycznego hydraulicznego napędu koparki



- straty tarcia mechanicznego w przekładni łączącej wał silnika z pompą hydrauliczną (element  $R_m$ ),
- masowy moment bezwładności części wirujących silnika, koła zamachowego i pompy (element  $I_s$ ),
- transformację energii mechanicznej silnika na energię hydrauliczną wyjściową z pompy (element  $T_{o/h}$ ),
- dynamikę zaworu przelewowego wyrażoną za pomocą rezystancji  $R_{zp}$  (charakterystyka statyczna) i inertancji zastępczej  $I_{zp}$ ,
- przecieki wewnętrzne w pompie (element  $R_{hp}$ ),
- ściśliwość cieczy w części obwodu hydraulicznego między pompą i rozdzielaczem (element  $C_{h1}$ ),
- charakterystykę rozdzielacza wyrażoną za pomocą dwóch równoległe połączonych rezystancji  $R_{r1}$  i  $R_{r2}$  modulowanych synchronicznie sygnałem sterującym  $x$  (przemieszczenie suwaka rozdzielacza),
- dynamikę zaworu krzyżowego wyrażoną za pomocą rezystancji  $R_{zk}$  i inertancji zastępczej  $I_{zk}$ ,
- przecieki wewnętrzne w silniku hydraulicznym (element  $R_{hs}$ ),
- ściśliwość cieczy w części obwodu hydraulicznego między rozdzielaczem i silnikiem (element  $C_{h2}$ ),
- straty tarcia w obwodzie hydraulicznym (element  $R_{ht}$ ),
- transformację energii hydraulicznej na wejściu do silnika hydraulicznego na energię mechaniczną na wale tego silnika (element  $T_{h/o}$ ),
- masowy moment bezwładności części wirujących silnika i reduktora odniesiony do osi wału silnika hydraulicznego (element  $I_{sh}$ ),
- transformację ruchu obrotowego wału silnika hydraulicznego na ruch obrotowy nadwozia przez przełożenie reduktora (element  $T_r$ ),
- sprężystość wałów reduktora (element  $C_r$ ),
- opory tarcia w mechanizmie nadwozia (element  $R_n$ ),
- opory tarcia podwozia o grunt (element  $R_p$ ),
- masowy moment bezwładności nadwozia odniesiony od osi obrotu nadwozia (element  $I_n$ ),
- masowy moment bezwładności podwozia odniesiony do osi obrotu nadwozia (element  $I_p$ ).

W poprawnie zaprojektowanym napędzie mechanizmu obrotu nadwozia nie powinny występować przeciążenia powodujące przekroczenie oporów tarcia suchego podwozia o grunt i w konsekwencji poślizg podwozia. Jeżeli poślizg nie występuje można uważać, że nadwozie jest zbudowane na sztywnej podstawie, co sprowadza się do pominięcia w grafie więzów elementów  $R_p$  i  $I_p$ . Tak uproszczony graf pokazano na rys.4b.

Z reguły sztywność wałów reduktora jest znacznie większa od sztywności instalacji hydraulicznej, co oznacza, że można pominąć pojemność  $C_r$ , gdyż dominującą jest pojemność  $C_{h2}$ . W takim przypadku można jeszcze zredukować masowy moment bezwładności części wirujących silnika i reduktora do osi obrotu nadwozia i po zsumowaniu z momentem bezwładności nadwozia otrzymać zastępczą inercję nadwozia  $I_{ns}$ . Można również wprowadzić transformator zastępczy  $T_{h/n}$ , będący iloczynem transformatorów  $T_{h/o}$  i  $T_r$ . Tak przekształcony i uproszczony graf pokazano na rys.4c.

Mechanizm obrotu nadwozia w koparce pobiera od silnika spalinowego nawet w stanach przejściowych nie więcej niż połowę mocy maksymalnej. Dlatego jest możliwe pominięcie całej struktury dynamicznej silnika i założenie, że do układu jest wprowadzona moc ze źródła stałego przepływu  $Z_Q$ , reprezentującego wydajność teoretyczną pompy hydraulicznej. Ewentualny spadek obrotów silnika spalinowego pod obciążeniem może być uwzględniony przez odpowiednie skorygowanie oporności przecieków hydraulicznych  $R_{hp}$  (wprowadzenie przecieków wyższych niż rzeczywiste). Tak uproszczony graf pokazano na rys. 4d. Ponieważ zawór krzyżowy jest zazwyczaj nastawiony na ciśnienie niższe niż zawór przelewowy (który służy do zabezpieczenia również innych obwodów roboczych koparki) przy normalnej bezawaryjnej pracy napędu nadwozia otwiera się tylko zawór krzyżowy. Dlatego elementy reprezentujące zawór przelewowy można pominąć w modelu dynamicznym.

Najbardziej krytyczny przypadek w pracy mechanizmu obrotu ma miejsce podczas gwałtownego przełączania rozdzielacza (w czasie pomijalnie małym w stosunku do czasu trwania procesów przejściowych w układzie). Jeżeli ograniczyć się do badania tylko najbardziej niekorzystnego z dynamicznego punktu widzenia przypadku, model można ostatecznie uprościć do postaci przedstawionej za pomocą grafu więzów na rys.4e. W grafie tym występują elementy zastępcze:

$R_{hb}$  - rezystancja bocznikująca uwzględniająca przecieki w całym układzie, gdy rozdzielacz jest otwarty ( $Z_Q \neq 0$ ) lub tylko w obwodzie między rozdzielaczem i silnikiem hydraulicznym gdy rozdzielacz jest zamknięty ( $Z_Q = 0$ ),

$C_h$  - pojemność hydrauliczna uwzględniająca ściśliwość cieczy w całym układzie gdy rozdzielacz jest otwarty ( $Z_Q \neq 0$ ) lub tylko w obwodzie między rozdzielaczem i silnikiem, gdy rozdzielacz jest zamknięty ( $Z_Q = 0$ ),

$R_{hl}$  - rezystancja linii uwzględniająca straty hydrauliczne w całym obwodzie, w tym również opory rozdzielacza.

Efekt gwałtownego otwierania i zamykania rozdzielacza należy w tym przypadku uwzględnić za pomocą funkcji skokowych w źródle przepływu  $Z_Q$ . Rozpisane z grafu więzów (rys. 4e) i uporządkowane zgodnie z zasadami podanymi w punkcie 2.1.6. równania mają postać:

$$\frac{dp_s}{dt} = \varphi \frac{-1}{C_h} \left[ Z_Q(t) - Q_{zk} - \varphi \frac{-1}{R_{hb}} (p_s) - T_{h/n} \omega \right] \quad /12/$$

$$\frac{dQ_{zk}}{dt} = \frac{1}{I_{zk}} \left[ \varphi(p_s) - R_{zk}^{-1} \cdot Q_{zk} \right] \quad /13/$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_n} \left[ T_{h/n} (p_s - R_{hl} \cdot T_{h/n} \cdot \omega) - \varphi R_n(\omega) \right] \quad /14/$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad /15/$$

Warunki początkowe zerowe

przy czym:

$$\varphi \frac{-1}{C_h} = \frac{1}{C_{h1}} \quad \text{dla } Z_Q \neq 0$$

$$\varphi \frac{-1}{C_h} = \frac{1}{C_{h2}} \quad \text{dla } Z_Q = 0$$

$$Z_Q(t) = Q_p [1(t) - 1(t - \tau_o)]$$

$$\varphi_{R_{hb}}^{-1}(p_s) = \left( \frac{1}{R_{hp}} + \frac{1}{R_{hs}} \right) p_s \quad \text{dla } Z_Q \neq 0$$

$$\varphi_{R_{hb}}^{-1}(p_s) = \frac{1}{R_{hs}} \cdot p_s \quad \text{dla } Z_Q = 0$$

$$\varphi(p_s) = 0 \quad \text{dla } |p_s| \leq p_o$$

$$\varphi(p_s) = p_s - p_o \operatorname{sign} p_s \quad \text{dla } |p_s| > p_o$$

$$\varphi_{R_n}(\omega) = M_o \operatorname{sign} \omega + B \cdot \omega$$

gdzie oprócz poprzednio wymienionych oznaczeń:

$Q_p$  - teoretyczna wydajność pompy

$t$  - czas

$Q_{zk}$  - natężenie przepływu przez zawór krzyżowy

$C_{h1}$  - pojemność hydrauliczna całego układu

$C_{h2}$  - pojemność hydrauliczna części układu między rozdzielaczem i silnikiem hydraulicznym

$p_o$  - ciśnienie otwarcia zaworu krzyżowego

$p_s$  - spadek ciśnienia na silniku hydraulicznym (z uwzględnieniem strat linii)

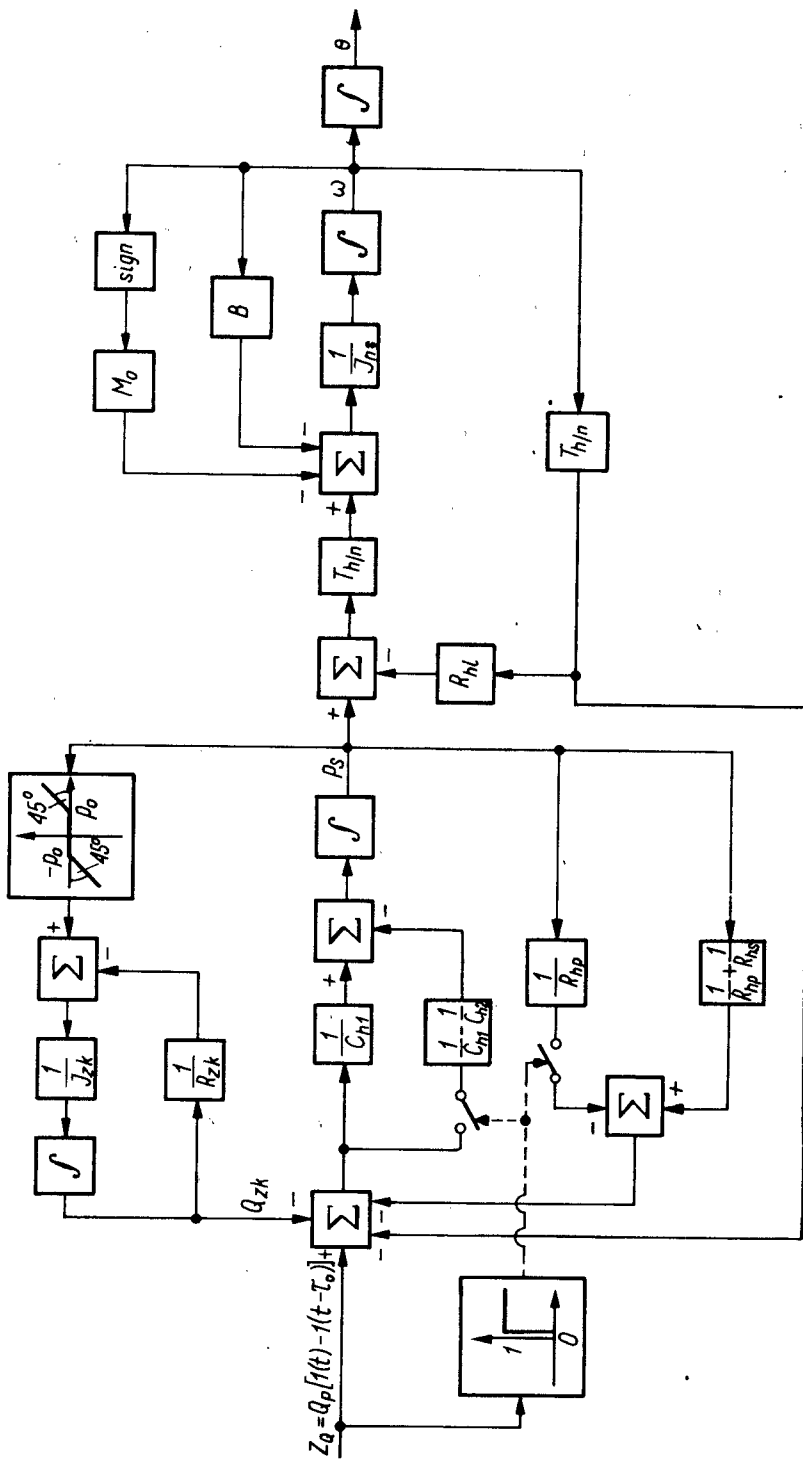
$\tau_o$  - czas między otwarciem i zamknięciem rozdzielacza dobrany tak, aby procesy przejściowe w układzie przy rozruchu zdążyły się ustalić

$M_o$  - moment oporów tarcia suchego nadwozia

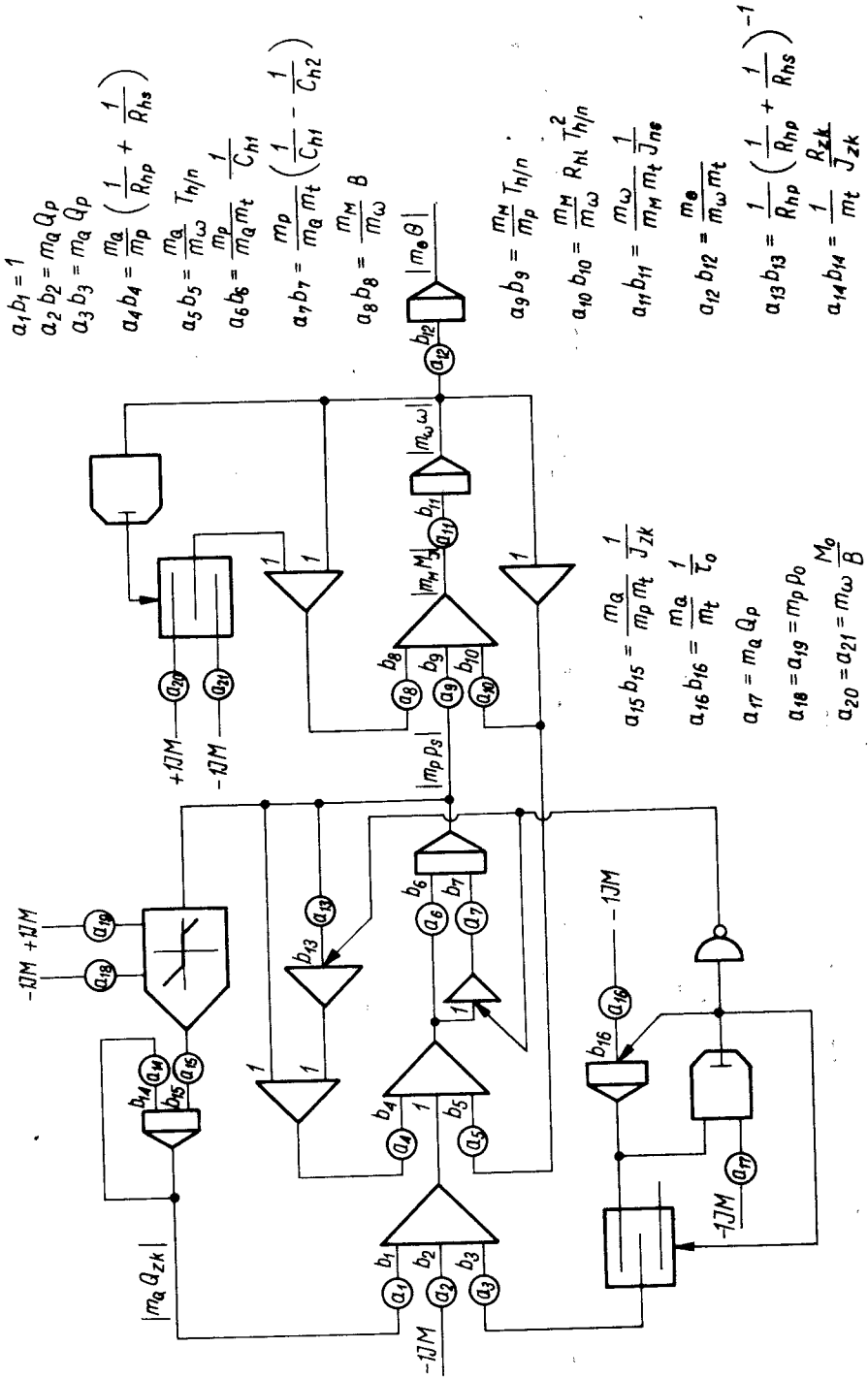
$B$  - współczynnik oporów tarcia lepkiego nadwozia

$\omega$  - prędkość obrotowa nadwozia

$\Theta$  - kąt obrotu nadwozia.



Rys. 5. Schemat blokowy modelu matematycznego hydraulicznego napędu obrotu koparki według wariantu "e"



Rys. 6. Schemat maszynowy hydraulicznego napędu obrotu koparki

Schemat blokowy odpowiadający równaniom /12/.../15/pokazano na rys.5. Na rysunku 6 pokazano natomiast schemat maszynowy odpowiadający schematowi blokowemu z rys.5. Program przedstawiony za pomocą tego schematu umożliwia jednoczesne badanie rozruchu i hamowania mechanizmu obrotu.

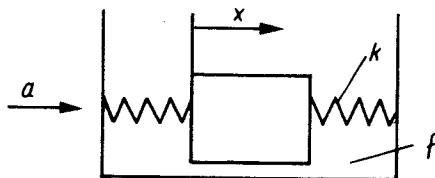
### 3. Metoda modelowania bezpośrednio z równań podstawowych

Metoda modelowania bezpośrednio z równań podstawowych była wcześniej znana i bardziej rozpowszechniona od metody grafów więzów omówionej w rozdziale 2. Różnice między obu metodami występują tylko w fazie budowy modelu matematycznego. Pozostała część algorytmu modelowania jest wspólna (rys.1). Z tego powodu w niniejszym rozdziale omówiono tylko sam proces budowy modelu matematycznego. Polega on na ułożeniu na podstawie założeń wstępnych równań wszystkich elementów układu. Przy układaniu tych równań należy posługiwać się podstawowymi prawami fizyki:

- równaniami sił i momentów, ewentualnie najbardziej ogólnymi równaniami Lagrange'a w mechanice,
- równaniami energii i ciągłości w hydraulice i pneumatyce,
- prawami Ohma i Kirchhoffa w elektrotechnice itd.

Otrzymany w ten sposób układ równań opisujących dynamikę badanego układu należy następnie przekształcić i uporządkować w ten sposób, aby uzyskać układ równań różniczkowych, w których z lewej strony będą się znajdować pochodne najwyższego rzędu, a z prawej wszystkie pozostałe czony. Z uporządkowanego układu równań można następnie zbudować schemat blokowy podobnie jak w przypadku metody grafów więzów i dalej postępować według procedury opisanej w rozdziale 2. W prostszych przypadkach budowanie schematu olokowego nie jest konieczne i można bezpośrednio z równań zbudować schemat maszynowy.

Jako przykład zastosowania tej metody opisano modelowanie dynamiki czujnika przyspieszenia. Schemat elementu pomiarowego tego czujnika jest pokazany na rys.7.



Rys.7. Schemat elementu pomiarowego czujnika przyspieszenia

Czujnik można opisać za pomocą dwóch równań:

- równania sił działających na element pomiarowy

$$m \ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx \quad /16/$$

- równania transformatora różnicowego, przekształcającego przemieszczenie elementu pomiarowego na sygnał elektryczny

$$U = c \cdot x \quad /17/$$

gdzie:

$a$  - przyspieszenie oddziaływujące na czujnik

$m$  - masa elementu pomiarowego

$x$  - przemieszczenie elementu pomiarowego z położenia neutralnego

$f$  - współczynnik tarcia lepkiego w elemencie pomiarowym

$k$  - sztywność sprężyn zwrotnych

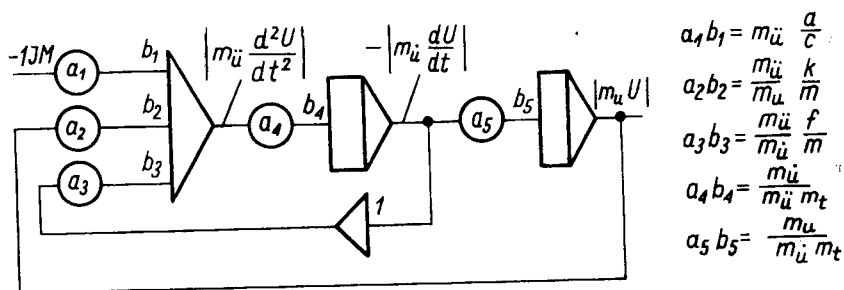
$c$  - stała transformatora różnicowego

$U$  - napięcie wyjściowe z transformatora różnicowego.

Równania /16/ i /17/ po przekształceniach dają równanie /18/ uzależniające napięcie wyjściowe z transformatora różnicowego od przyspieszenia oddziaływującego na czujnik.

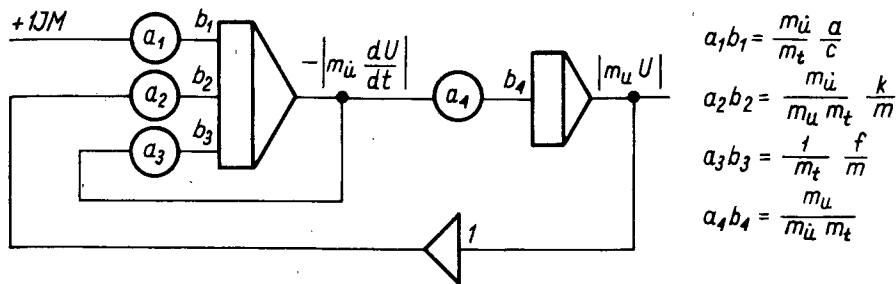
$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1}{C} \left( a - \frac{f}{m} \frac{dU}{dt} - \frac{k}{m} U \right) \quad /18/$$

Równanie /18/ może być zamodelowane dwoma sposobami w zależności od tego czy przebieg drugiej pochodnej (rys.8), jest interesujący, czy też nie (rys.9). Opis zastosowania metody modelowania z równań podstawowych do analizy dynamiki układów hydraulicznych podano w [4].



Rys.8. Schemat maszynowy czujnika przyspieszenia - wariant 1





Rys.9. Schemat maszynowy czujnika przyspieszenia - wariant 2

#### 4. Modelowanie ze schematów strukturalnych

Najstarszą z omawianych tutaj metod modelowania procesów ciągłych jest metoda modelowania ze schematów strukturalnych. Wynika to stąd, że pierwszymi użytkownikami maszyn analogowych byli automatycy, którzy w momencie ich pojawienia się dysponowali dobrze opracowanymi metodami analizy dynamiki układów za pomocą schematów strukturalnych, zawierających bloki z transmitancjami poszczególnych elementów układu.

Podobnie jak poprzednio metoda modelowania ze schematów strukturalnych różni się od metody grafów więzów tylko procedurą budowy modelu matematycznego. Dalsze postępowanie jest zgodne z algorytmem podanym na rys.1. Dlatego omówiono tutaj tylko zasady budowy modelu, który ma być w końcu przedstawiony w formie schematu strukturalnego.

Schemat strukturalny, opisujący dynamikę modelowanego układu otrzymuje się w ten sposób, że na podstawie założeń wstępnych odnośnie wpływów dynamicznych układu się równania elementów układu, wychodząc z podstawowych zależności fizycznych. Następnie równania te linearyzuje się, stosuje się do nich przekształcenia Laplace'a i sprowadza do formy transmitancji opisujących poszczególne elementy układu. Dysponując transmitancjami elementów buduje się schemat strukturalny składający się z bloków, zawierających poszczególne transmitancje, połączonych liniami sygnałowymi. Na tym etapie jest możliwe uproszczenie modelu matematycznego i korekta założeń wstępnych przez pominięcie transmitancji, zawierających stałe czasowe znacznie mniejsze od największych stałych czasowych, występujących w schemacie strukturalnym.

Po ewentualnym uproszczeniu schematu strukturalnego niezbędne jest jego dostosowanie do formy możliwej do modelowania. Chodzi tu o wyeliminowanie ze schematu członów różniczkujących. Przy przekształceniach należy posługiwać się zasadami algebry schematów strukturalnych opisanymi w podręcznikach klasycznej teorii automatycznej regulacji. Należy zwrócić uwagę, że jeżeli wyeliminowanie czystych członów różniczkujących ze schematu jest niemożliwe, najprawdopodobniej przyjęto niewłaściwe założenia wstępne i należy wrócić do początku procedury.

Po przekształceniu schematu strukturalnego dla potrzeb modelowania buduje się na jego podstawie schemat maszynowy, zastępując bloki z transmitancją odpowiednimi zestawami członów analogowych. Modele analogowe typowych transmitancji są zestawione w podręcznikach dotyczących zastosowań maszyn analogowych [1]. Dalszy tok postępowania jest zgodny z procedurą przedstawioną w rozdziale 2.

## 5. Zakończenie

Spośród przedstawionych trzech metod modelowania dynamiki procesów ciągłych najbardziej przydatna, zdaniem autora, jest metoda grafów więzów, przy czym istotne znaczenie ma zastosowanie tutaj samej techniki grafów więzów. Technika ta charakteryzuje się szeregiem pożytecznych właściwości:

- Grafy więzów bardziej bezpośrednio odpowiadają układowi fizycznemu niż układy równań różniczkowych.
- Grafy więzów opisują strukturę (rozgałęzienia strumieni energii) i naturę (rezystancję, kapacytancję, inertancję) układu modelowanego co jest wygodne dla badania wpływu zmian konstrukcyjnych w czasie projektowania.
- Z punktu widzenia teorii sterowania grafy więzów umożliwiają uzyskanie takiego zbioru zmiennych stanu, który ma bezpośrednią interpretację fizyczną, co jest nie tylko wygodne dla intuicyjnych interpretacji, ale także sugeruje rodzaj sprzężeń jakie należy zastosować w celu realizacji żądanego sposobu sterowania.
- Grafy zapewniają łatwość odróżnienia części sterującej układu od części wykonawczej. Grafy zwyrodniałe reprezentują część sterującą, a grafy pełne część wykonawczą, w której istotny jest przepływ energii.

- Technika grafów więzów umożliwia zbudowanie modelu matematycznego układu, ocenę wpływu poszczególnych parametrów i uproszczenie modelu bez rozpisywania równań układu. W bardzo prostych przypadkach jest możliwe bezpośrednie zaprogramowanie maszyny, na podstawie narysowanego grafu.

Metoda grafów więzów jest nieprzydatna w przypadku modelowania układów, w których przeważa część sterująca (przepływ sygnałów, a nie energii). Jest ona również mało przydatna przy modelowaniu układów opisywanych bardzo złożonymi zależnościami nieliniowymi typu statycznego oraz tam gdzie w stanach granicznych pracy układu zachodzi konieczność przełączania jednego układu równań opisujących dynamikę na inny układ równań. W tych przypadkach nie zastąpiona jest metoda modelowania bezpośrednio z równań podstawowych. Ma ona jednak zasadniczą wadę. Mianowicie, praktycznie jest niemożliwa ocena poprawności przyjętych założeń wstępnych w fazie budowy modelu. Ewentualne błędy ujawniają się dopiero na etapie programowania maszyny, co znacznie wydłuża proces modelowania i przysparza wiele pracy.

Najmniej przydatna spośród omawianych metod jest metoda modelowania ze schematów strukturalnych. Wynika to stąd, że samo jej powstanie było w pewnym sensie nieporozumieniem. Mianowicie schematy strukturalne są zasadniczą częścią graficzno-analitycznych procedur analizy i syntezy układów automatyki, opracowanych na skutek braku odpowiednich środków obliczeniowych, umożliwiających modelowanie dynamiki w nierozwiązywalnych analitycznie przypadkach. W rezultacie przy stosowaniu modelowania strukturalnego przysparza się sobie niepotrzebnej pracy dokonując przekształceń równań podstawowych, oraz zubaża się możliwości analizy rzeczywistych procesów zachodzących w układzie przez stosowanie koniecznej dla otrzymania transmitancji linearyzacji. Zaciemnia się również obraz fizyczny zjawisk przez uwikłanie współczynników bezpośrednio charakteryzujących właściwości konstrukcyjne w wielokrotnie przekształconych współczynnikach transmitancji. Dlatego stosowanie modelowania strukturalnego obecnie można zalecić tylko wówczas, gdy dysponuje się np. danymi z pomiarów (identyfikacji), opracowanymi właśnie w formie transmitancji. W takich przypadkach powrót do równań podstawowych, stanowiłby niepotrzebną komplikację.

Ponieważ, jak wynika z powyższej analizy, żadna z opisywanych metod nie jest uniwersalna, przy modelowaniu bardziej złożonych przypadków zachodzi

konieczność stosowania metod mieszanych np.:

- modelowanie z równań części sterującej układu i modelowania metodą grafów części wykonawczej,
- modelowanie z równań regulatora i modelowanie strukturalne obiektu zidentyfikowanego w formie schematu strukturalnego.

Należy tu przestrzec, że stosowanie metod mieszanych wymaga dużej wprawy, gdyż w innym przypadku można popełnić zasadnicze błędy.

Trzyletnia praktyka zespołu z MERA-PIAP w modelowaniu procesów ciągłych za pomocą maszyny analogowej ze sterowaniem logicznym WAT 1001 wykazała, że najwłaściwszą końcową formą przedstawiania modelu matematycznego jest schemat blokowy omówiony w rozdziale 2. Przy czym nie jest istotne, którą z omawianych metod dochodzi się do tej ostatecznej formy zapisu. W przypadku dużej wprawy i dobrej znajomości fizyki modelowanego zagadnienia, schemat blokowy można zbudować bezpośrednio na podstawie założeń odnośnie struktury dynamicznej układu. Można to nazwać "skróconą metodą" budowy modelu matematycznego. Została ona zastosowana np. w pracy [5].

Przedstawione w tym artykule metody modelowania procesów ciągłych mogą być stosowane z niewielkimi zmianami w przypadku użycia maszyny cyfrowej jako środka obliczeniowego. Różnice dotyczą etapów układania programu maszynowego. Jednakże maszyny cyfrowe w aktualnym stanie ich rozwoju są bardzo niewygodne do rozwiązywania problemów modelowania dynamiki procesów ciągłych. Dotyczy to zwłaszcza maszyn, które nie są wyposażone w języki symulacyjne, a więc większości maszyn posiadanych w kraju. Z posiadanych w kraju najbardziej użyteczne do cyfrowego modelowania dynamiki układów ciągłych są maszyny z serii IBM-360 i IBM-370, wyposażone w język symulacyjny CSMP [6]. Należy jednak zwrócić uwagę, że modelowanie nawet na tych szybkich i nowoczesnych maszynach może kosztować kilkaset razy drożej niż w przypadku użycia zwykłej maszyny analogowej ze sterowaniem logicznym.

Na zakończenie trzeba zwrócić uwagę, że główną wadą modelowania komputerowego dynamiki jest niemożność otrzymania eleganckich, w sensie matematycznym, rozwiązań w postaci analitycznej. Na szczęście, wada ta nie ma istotnego znaczenia w praktycznym projektowaniu układów.

## Literatura

- [1] Levine L.: Metody stosowania maszyn analogowych do rozwiązywania problemów w technice, Warszawa WNT.1969.
- [2] Serwach A., Frydliński S.: Hybrid simulation of hydraulic systems, Proceedings of the 7th AICA Congress, Prague 27-31 August, 1973.
- [3] Serwach A.: Modelowanie dynamiki układów hydraulicznych za pomocą maszyn matematycznych, Prace PIAP 22/1975. Skrót opublikowano w Archiwum Budowy Maszyn, t.XXI, z.3, 1974 .
- [4] Serwach A.: Zastosowanie maszyn analogowych do modelowania dynamiki napędów hydraulicznych, Magazyn Technologa Przemysłu Lotniczego i Silnikowego, 1970.
- [5] Serwach A., Frydliński, S., Jabłkowski J., Judycka K., Widelska J.: Parametric optimization of the hydraulic system of the excavator, Proceedings of the AICA Symposium on hybrid computation in dynamic system design, Rome November 11-14, Paper C3-1, 1974.
- [6] System 360 Continuous System Modeling Program. User's Manual, IBM Application Program GH20-0367-4.
- [7] Serwach A.: Modele dynamiczne układu hydraulicznego koparki. Sprawozdanie. Archiwum PIAP nr arch.1681.