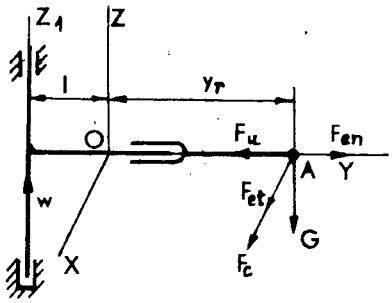
dr inż.PAWEŁ ŁONCICH

Politechnika Irkucka (ZSRR)

OPTYMALNE STEROWANIE RUCHEM MANIPULATORA (ZE WZGLĘDU NA SZYBKOŚĆ DZIAŁANIA)

Zaproponowano rozwiązanie zadania optymalnego sterowania ze względu na szybkość działania ruchem względnym uchwytu manipulatora. Zadanie można rozwiązać przy wykorzystaniu zasady maksimum L.S.Pontriagina. Otrzymano algorytm sterowania, zapewniający realizację podjętego zadania.

Rozpatrzymy zadanie optymalnego sterowania ruchem względnym punktu materialnego. Zadanie takie należy rozwiązać przy projektowaniu manipulatora, którego chwyt może jednocześnie brać udział w dwóch ruchach: postępowym względnym wzdłuż osi Y i obrotowym unoszenia łącznie z kierunkową OA wokół osi Z_1.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy

Zakładamy potrzebę przemieszczenia punktu materialnego A z pewnego ustalonego ($y_r = a$; $y_r = 0$) do położenia zerowego ($y_r = 0$; $y_r = 0$) w warunkach oddziaływania na chwyt manipulatora (który dalej będzie uważany za punkt materialny o masie m), sterowania optymalnego ze względu na szybkość działania. Przy czym moduł funkcji sterowania określa wyrażenie

$$u \leqslant 1 \qquad /1/$$

We wskazanych warunkach ruch chwytu manipulatora jest złożony i można go rozłożyć na ruch obrotowy unoszenia w płaszczyźnie prostopadłej do osi Z_1 i ruch postępowy względny wzdłuż kierunkowej OA.

Na punkt materialny A działają następujące siły:

$G = mg$ — ciężar punktu materialnego (chwytu manipulatora)

$\overline{F}_e = \overline{F}_{et} + \overline{F}_{en}$ — siła bezwładności w ruchu unoszenia

gdzie:

$F_{et} = -m\epsilon(y_r + 1)$ — składowa siły bezwładności skierowana wzdłuż stycznej do toru ruchu, równolegle do osi X

$F_{en} = m\omega^2(y_r + 1)$ — siła odśrodkowa, skierowana ku wzrastającym wartościom współrzędnej y_r

W tych warunkach, rzut siły bezwładności w ruchu obrotowym na oś układu współrzędnych ruchu względnego y określa wyrażenie

$$Fe = F_{en} = m\omega^2(l + y_r) \qquad /2/$$

W tym i w poprzednim wzorze przyjęto oznaczenia:

ω, ϵ — prędkość ruchu obrotowego i przyspieszenie kątowe ruchu unoszenia

l — odległość początku układu współrzędnych XYZ od osi obrotu

Z_1, y_r — bieżąca współrzędna punktu materialnego A w ruchu względnym

Siła Coriolisa $F_c = -2m(\overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_r)$ jest również skierowana równolegle do osi X wobec czego $F_{cy}=0$.

Zakładamy, że urządzenie sterujące wywiera na punkt materialny działanie, wyrażone jako siła F skierowana wzdłuż osi Y do początku układu współrzędnych. Przyjmujemy funkcję sterującą w postaci

$$u = \frac{F}{m}$$

Równanie różniczkowe ruchu względnego punktu materialnego A przyjmuje postać

$$\ddot{y}_r = \omega^2(l + y_r) - u \qquad /3/$$

Zgodnie z zasadą maksimum L.S.Pontriagina [1] dla rozpatrywanego zadania tworzymy funkcję Hamiltona:

$$H = \psi_1 y_1 + \psi_2 y_1 \omega^2 + \psi_2 l \omega^2 - \psi_z u_1 \qquad /4/$$

gdzie ψ_1, ψ_2 — funkcje pomocnicze

Przekształcamy równanie różniczkowe drugiego rzędu /3/ w układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu do postaci

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \psi_1} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \psi_2} = \omega^2(y_1 + l) - u \end{aligned}\right\} \qquad /5/$$

gdzie

$y_1 = y_r;\ y_2 = \dot{y}_r$

Wiadomo, że optymalność układu ze względu na szybkość działania zapewnia maksimum funkcji H, co ma miejsce gdy sygnał sterujący funkcji u ukształtuje się zgodnie z algorytmem

$$u = \text{sign}\ \psi_2 \qquad /6/$$

Funkcje pomocnicze ψ_1 i ψ_2 w /4/ określimy na podstawie zależności [1]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\delta H}{\delta y_1} = -\psi_2 \omega^2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\delta H}{\delta y_2} = -\psi_1 \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Przedstawmy /7/ w postaci

$$\ddot{\psi}_2 - \omega^2 \psi_2 = 0 \qquad /8/$$

Rozwiązania równania różniczkowego /8/ poszukujemy w postaci

$$\psi_2 = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} \qquad /9/$$

Uwzględniając /1/ warunek /6/ zapisujemy

$$u = -\text{sign}\,(c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \qquad /10/$$

Dla sterowania można zapewnić maksimum funkcji H $/u/ \leqslant 1$

przy $u = -1$, jeżeli $\psi_2 > 0$

przy $u = +1$, jeżeli $\psi_2 < 0$

Dla określenia trajektorii fazowych układ równań /4/ zapiszemy

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \pm 1 + \omega\,(y_1 + l) \qquad /11/$$

gdzie

„+" i „–" odpowiednio określają równania $u = -1$, $u = +1$

Określając trajektorie fazowe przy ujemnej wartości sygnału funkcji sterującej $u = -1$.
Z /11/ otrzymujemy

$$\ddot{y}_1 - \omega^2 y_1 = (\omega^2 l + 1) \qquad /12/$$

Rozwiązania tego szczególnego niejednorodnego równania różniczkowego poszukujemy w postaci
$y_{12} = C_5$
Jest oczywiste, że

$$y_{12} = c_5 = -\frac{\omega^2 l + 1}{\omega^2} \qquad /13/$$

Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różniczkowego $\ddot{y}_{\prime\prime} - \omega^2 y_{\prime\prime} = 0$ otrzymamy w postaci

$$y_1 = c_3 e^{\omega t} + c_4 e^{-\omega t} \qquad /14/$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego /12/ jest

$$y_1 = c_3 e^{\omega_3 t} + c_4 e^{-\omega t} + c_5 \qquad /15/$$

Zakładając, że warunki początkowe przy $t = t_0 = 0$ określają wartości $y_r = a$ i $y_r = 0$, znajdujemy zgodnie z ogólnymi zasadami rachunku różniczkowego stałe całkowania

$$c_3 = c_4 = \frac{a - c_5}{2} \qquad /16/$$

i otrzymujemy

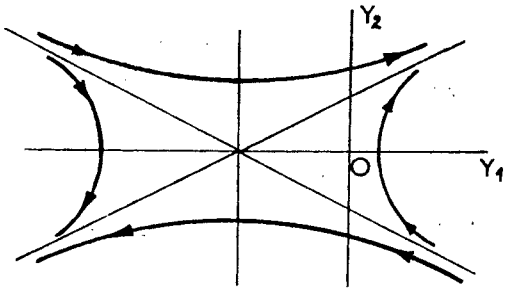
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_3 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + c_5 \\ y_2 &= \dot{y}_1 = c_3 \omega (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \end{aligned}\right\} \qquad /17/$$

Eliminując z /17/ parametr t mamy

$$\frac{(y_1 - c_5)^2}{4c_3^2} - \frac{y_2^2}{4c_3^2 \omega^2} = 1 \qquad /18/$$

a więc trajektorie fazowe przedstawiają hiperbolę przesuniętą od początku układu wzdłuż osi y_1 o wartość równą

$$c_5 = \left| \frac{\omega^2 l + 1}{\omega^2} \right| \text{(Rys.2)}$$



Rys.2. Trajektorie fazowe

Dla sterowania optymalnego określanego równaniem /10/, ustalimy ilość zmian znaku ψ_2.

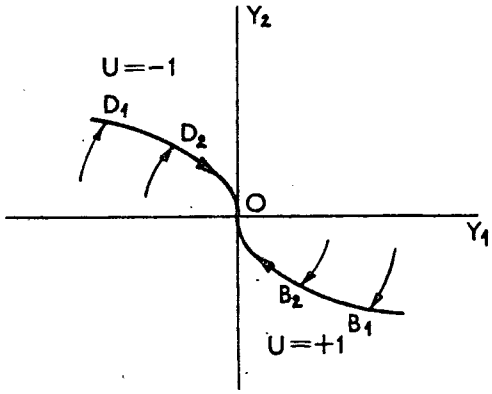
Jeżeli $\psi_2 = 0$, to

$$c_1 e^{\omega t} = -c_2 e^{-\omega t}$$

stąd

$$t = \frac{\ln\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)}{2\omega} .$$

W zależności od warunków początkowych rozwiązanie /19/ albo nie istnieje, albo też istnieje tylko jedno. Dlatego też, ilość przełączeń nie przekracza jednego. Na rysunku 3 przedstawiono trajektorie fazowe, określone przy $u = 1$ i przy $u = -1$, odpowiadające trafianiu punktu na płaszczyźnie fazowej y_1y_2 w punkt o współrzędnych $y_1 = y_r = 0$; $y_2 = y_r = 0$. Przy dowolnym odchyleniu początkowym $y_r = a$, $y_r = 0$ punkt na płaszczyźnie fazowej powinien początkowo trafić do jakiegokolwiek punktu D_i przy $u = +1$ lub do punktu B_i na linii przełączania $y_{2p} = D_1D_2OB_2B_1$ a następnie po linii przełączania do punktu początkowego.



Rys.3. Trajektoria sterowania optymalnego

Sygnały sterujące powinny być formowane zgodnie z równaniem

$$u(y_1) = \begin{cases} +1 \text{ przy } y_2 < y_{2p} \text{ i przy } y_2 = y_{2p} < 0 \\ -1 \text{ przy } y_2 > y_{2p} \text{ i przy } y_2 = y_{2p} > 0 \end{cases} \qquad /20/$$

Równanie linii przełączania określamy w postaci

$$y_{2p} = y_2 = y_1 = \text{sign } y_1 \sqrt{\omega^2[(y_1 - c_5)^2 - 4c_3^2]} \qquad /21/$$

Tak więc dla optymalnego, ze względu na szybkość działania sterowania ruchem względnym chwytu manipulatora, należy znać wartości bieżące y_1 i y_2. Porównując bieżącą wartość $y_2 = y_1$ z wartością przełączania $y_{2p} = f(y_1)$, urządzenie sterujące układu sterowania automatycznego powinno przełączać przekaźnikowo funkcję $u = u(y_1)$ stosownie do równania /20/. Zapewnia to ustalenie optymalnego sterowania ruchem względnym punktu materialnego.

Literatura

[1] Bołtianskij W.G.: Matematyczne metody sterowania optymalnego. Tłum.z ros. WNT, Warszawa 1971.

[2] Besekerskij V.A.:, Popov E.P.: Teorija sistem avtomaticeskogo regulirovanija. Wyd.Nauka, Moskva 1975.