mgr inż. MARIAN WRZESIEŃ

Przemysłowy Instytut
Automatyki i Pomiarów MERA-PIAP

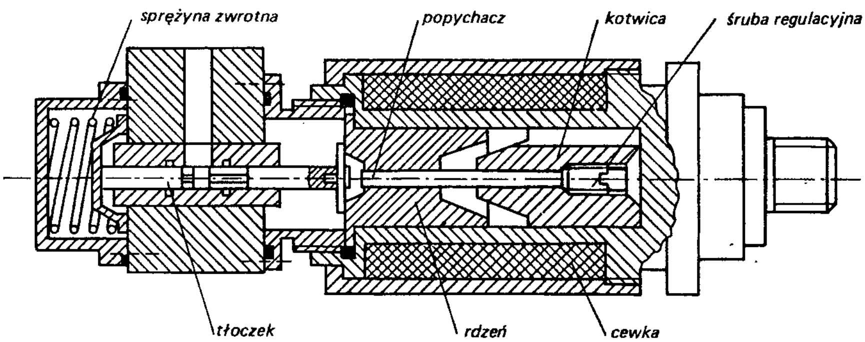
W a r s z a w a

MODEL MATEMATYCZNY ORAZ BADANIA SYMULACYJNE ELEKTROMAGNESU

W artykule przedstawiono analizę stanów dynamicznych elektromagnesu na podstawie zasady wariacyjnej Hamiltona. Zaproponowano takie wykorzystanie tej zasady, które umożliwia zbudowanie modelu matematyczno-fizycznego elektromagnesu na podstawie statycznych pomiarów siły elektromagnesu. Porównano wyniki otrzymane w czasie symulacji komputerowej zbudowanego modelu z wynikami uzyskanymi na drodze eksperymentalnej.

1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono analizę stanów dynamicznych elektromagnesu (rys. 1) sterującego rozdzielaczem hydraulicznym. Analiza ta została przeprowadzona w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów w czasie opracowywania modelu matematycznego układu sterowania elektrohydraulicznego ciągnika gąsienicowego.



Rys. 1. Elektromagnes typu UE–5

W elektromagnesie występują zarówno wielkości elektryczne jak i mechaniczne. Z tego względu, zastosowano równania Lagrange'a i Hamiltona ujmujące problem od strony energetycznej. Metoda ta pozwala traktować energię jednakowo we wszystkich układach fizycznych, a zatem daje możliwość analizowania układów, w których występują mieszane wielkości fizyczne. Podano również sposób

praktycznego wykorzystania tej metody, nie wymagający skomplikowanych czynności przygotowawczych przed przystąpieniem do właściwej analizy.
W pracy zamieszczono przykłady obliczeń przeprowadzonych z wykorzystaniem maszyny cyfrowej w języku symulacyjnym CSMP dokonane we współpracy z mgr inż. Stefanem Frydlińskim.
Pomiary siły elektrodynamiczne oraz pomiary niektórych parametrów rozdzielacza hydraulicznego wykorzystanych w niniejszej pracy zostały przeprowadzone przy udziale mgr inż.Macieja Oleksiuka.

2. Równania dynamiki dla obwodów elektromechanicznych

Równania dynamiki dla obwodów elektromechanicznych można przedstawić następująco [dodatek]:

$$R\cdot i + \frac{d\psi(i,x)}{dt} = U_Z \qquad /1/$$

$$m\cdot\ddot{x} + B_H\cdot\dot{x} + k\cdot x - \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^i \psi'(i',x)\,di'\right] = 0 \qquad /2/$$

W celu rozwiązania równań /1/ i /2/ należy wyznaczyć funkcję koenergii magnetycznej W'_m bądź strumienia skojarzonego $\psi(i,x)$. W praktyce nastręcza to dużo trudności.
Poniżej podano odmienną postać równań dynamiki obwodu elektromechanicznego, która w przypadku prowadzenia analizy elektromagnesu ułatwia praktyczne posługiwanie się równaniem Lagrange'a [dodatek].
W pracy [3]zostało wykazane, że siła pochodzenia elektrycznego F_{ed} w układzie elektromechanicznym spełnia równanie:

$$F_{ed} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^i \psi'(i', x)\,di\right] \qquad /3/$$

Z zasady prac przygotowanych [3]wynika, że siła ta jest dodatnia jeżeli jest skierowana przeciwnie do przyjętego dodatniego kierunku prędkości $\dot{x}$. W analizowanym przypadku, dla układu elektromechanicznego przy braku siły zewnętrznej, siła elektrodynamiczna jest przyczyną ruchu kotwicy elektromagnesu. Jest zatem skierowana zgodnie z kierunkiem prędkości $\dot{x}$ przyjętym za dodatni.
Po uwzględnieniu powyższych uwag równania dynamiki przyjmą następującą postać:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial i}\left(\int_0^x F_{ed}\,(i', x')\,dx'\right)\right] + R\cdot i = U_Z \qquad /4/$$

$$m\cdot\ddot{x} + B_H\cdot\dot{x} + k\cdot x = F_{ed} \qquad /5/$$

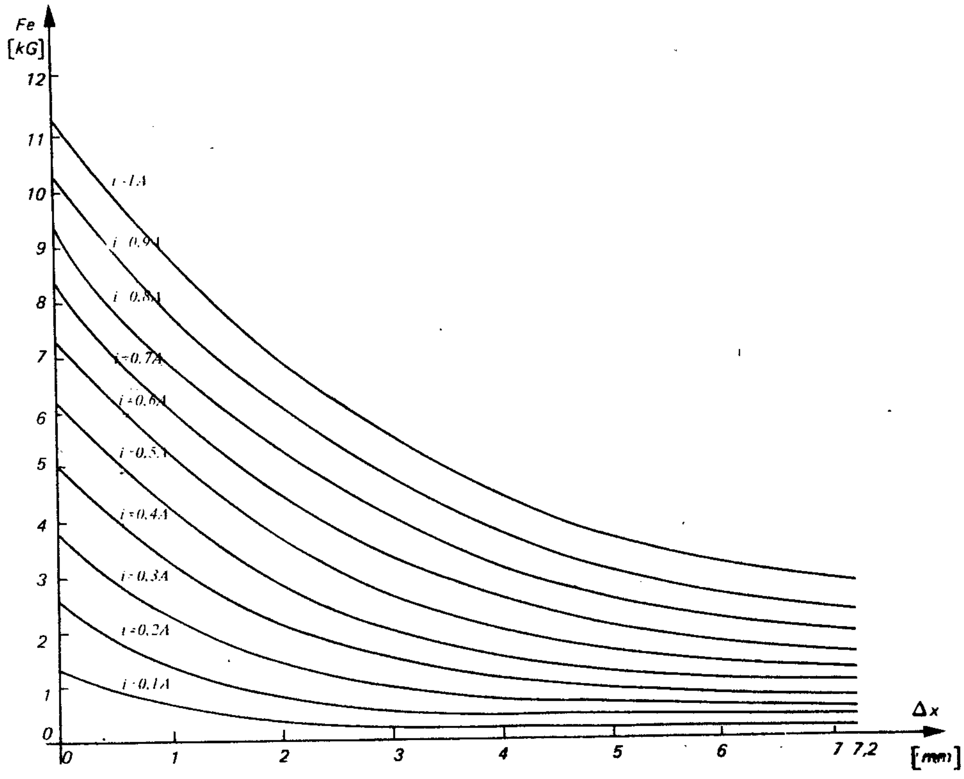
W celu wyznaczenia siły elektrodynamicznej F_{ed}, dokonano pomiarów tej siły dla wartości prądów $i = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3 \ldots 1$ A przy położeniach kotwicy elektromagnesu zmieniających się od 0 (największa szczelina w obwodzie magnetycznym) do wartości maksymalnej położenia kotwicy (brak szczeliny w obwodzie magnetycznym), z krokiem 0,5 mm. Na rys. 2 przedstawiono zależność siły elektrodynamicznej w funkcji położenia i prądu. Po przeprowadzeniu aproksymacji charakterystyk z rys. 2 otrzymano postać analityczną siły elektrodynamicznej. Wyraża się ona następująco:

$$F_e = a_m\cdot \exp[-b_m\cdot(N-x)] + c_m\cdot(N-x) \qquad /6/$$

$$a_m = (A + B \cdot i) \cdot \left[1 - \exp(C \cdot i)\right] \qquad /7/$$

$$b_m = D - E \cdot i + F \cdot \exp(G \cdot i) \qquad /8/$$

$$c_m = (K + H \cdot i) \cdot \left[1 - \exp(M \cdot i)\right] \qquad /9/$$



Rys.2. Zależność siły elektrodynamicznej w funkcji położenia kotwicy i prądu cewki. Przez położenie kotwicy rozumie się wartość szczeliny Δx w obwodzie magnetycznym

W wyrażeniach /6–9/ stałe (dla elektromagnesu typu UE–5) przyjmują następujące wartości:

$A = 108\,[N]$, $B = 49\left[\frac{N}{A}\right]$, $C = -3{,}386\left[\frac{1}{A}\right]$, $D = 365\left[\frac{1}{m}\right]$, $E = 140\left[\frac{1}{A \cdot m}\right]$,

$F = 600\left[\frac{1}{m}\right]$, $G = -2{,}9\left[\frac{1}{A}\right]$, $H = 294\left[\frac{N}{A \cdot m}\right]$, $K = 883\left[\frac{N}{m}\right]$, $M = -2{,}8\left[\frac{1}{A}\right]$, $N = 0{,}0085\,[m]$

Po wprowadzeniu wyrażeń /6–9/ do wzoru /4/ otrzymamy zależność /4/ w nowej postaci:

$$P_1 \cdot \dot{i} + P_2 \cdot \dot{x} + R \cdot i = U_Z \qquad /10/$$

przy czym:

$$P_1 = \left\{\left[\left(\frac{1}{b_m} + N - x\right)\cdot\left(\frac{2 \cdot a_m \cdot b'^2}{b} - 2 \cdot a' \cdot b' - a_m \cdot b''\right) + \left(a'' + a_m \cdot b'^2 \cdot (N-x)^2\right)\right]\frac{1}{b_m} \cdot \exp\ldots\right.$$

$$\left.\left[-b_m \cdot (N-x)\right] + c'' \cdot x \cdot \left(N - \frac{1}{2}x\right)\right\} \qquad /11/$$

$$P_2 = \exp\left[-b_m (N-x)\right]\cdot\left[a' - a_m \cdot b' \cdot (N-x)\right] + c' (N-x) \qquad /12/$$

oraz:

$$a' = \frac{da_m}{di} \qquad /13/$$

$$b' = \frac{db_m}{di} \qquad /14/$$

$$c' = \frac{dc_m}{di} \qquad /15/$$

$$a'' = \frac{d^2a_m}{di^2} \qquad /16/$$

$$b'' = \frac{d^2b_m}{di^2} \qquad /17/$$

$$c'' = \frac{d^2c_m}{di^2} \qquad /18/$$

Składnik $P_2 \cdot \dot{x}$ w równaniu /10/ jest znany formalnie jako napięcie pochodzenia mechanicznego[3]. Napięcie to jest indukowane w uzwojeniu elektromagnesu na skutek ruchu kotwicy z prędkością $\dot{x}$. Po uzyskaniu opisu analitycznego w postaci ogólnej (zależności: /4/. . . /18/),uwzględniono następnie zjawiska zachodzące w elektromagnesie typu UE–5, które dotychczas nie były rozpatrywane.

3. Analiza szczegółowa elektromagnesu typu UE–5

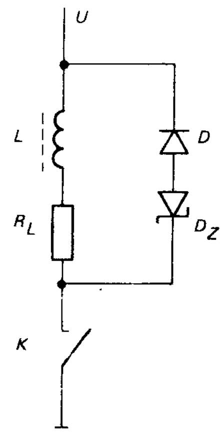
Z zasady działania elektromagnesu UE–5 wynika, że w czasie ruchu kotwicy elektromagnesu następuje jej zderzenie z tłoczkiem (rys. 1) przy położeniu $x = x_n$. Założono, że od tego momentu kotwica porusza się razem z tłoczkiem. W związku z powyższym, w tym momencie zwiększa się masa poruszana siłą elektrodynamiczną oraz zwiększa się tłumienie hydrauliczne – powiększone o tłumienie hydrauliczne tłoczka. Z zasady zachowania pędu wynika, że w punkcie $x = x_n$ prędkość poruszających się mas staje się równa:

$$\dot{x}_{II} = \frac{m_k}{m_t + m_k} \cdot \dot{x}_I, \qquad \text{dla} \quad \dot{x} > 0 \qquad /19/$$

przy czym:

$\dot{x}_I$ – prędkość przed zderzeniem,
$\dot{x}_{II}$ – prędkość po zderzeniu,
m_k – masa kotwicy,
m_t – masa tłoczka rozdzielacza.

Od położenia $x=x_n$ rozpoczyna się również oddziaływanie sprężyny zwrotnej elektromagnesu ściskanej przez rozpoczynający ruch tłoczek. Uwzględniono wstępne ściśnięcie sprężyny o wartość $x=x_p$, która wynika z konstrukcji elektromagnesu.
Po osiągnięciu przez tłoczek i kotwicę położenia granicznego $x=x_{lim}$ następuje ich zatrzymanie ze względu na ograniczenie mechaniczne. Wtedy prędkość i przyspieszenie stają się równe zeru. Podobne zjawisko zachodzi przy maleniu prądu, gdy kotwica osiąga położenie wyjściowe $x = 0$.
Obok siły elektrodynamicznej F_{ed}, na ruch kotwicy i tłoczka wpływa siła ciężkości F_c. W zależności od usytuowania elektromagnesu w stosunku do pionu, siła ciężkości może działać zgodnie z siłą elektromagnetyczną, przeciwnie do niej, lub nie wpływać na ruch (położenie poziome).
Ponadto uwzględniono odłączenie napięcia zasilającego po czasie $t=t_p$ i rozładowanie energii zgromadzonej w cewce elektromagnesu - w obwodzie przedstawionym na rys.3. Obwód ten zapewnia szybszy powrót suwaka rozdzielacza elektrohydraulicznego do położenia wyjściowego, w porównaniu z układem nie zawierającym diody Zenera w obwodzie rozładowującym energię cewki. Wpływ diody Zenera polega na zwiększeniu szybkości zaniku prądu cewki, a tym samym siły elektrodynamicznej.



Rys.3. Obwód rozładowania energii magnetycznej zgromadzonej w cewce elektromagnesu; L–indukcyjność cewki elektromagnesu, R_L–rezystancja cewki elektromagnesu, D_Z–dioda Zenera, D–dioda prostownicza, U–napięcie zasilające, K–klucz tranzystorowy

Powyższe uwagi zostały uwzględnione w układzie równań /4/. . ./18/, które obecnie przyjmą postać:
Zależności /6/. . . /18/ bez zmian.

$$U_Z = U[1 - 1(t-t_p)] + U_r \cdot 1(t-t_p) \qquad /20/$$

$$U_r = \begin{cases} U_{zen} & \text{dla} \quad i > \dfrac{U_{zen}}{R_{zen}} \\ R_{zen} \cdot i & \text{dla} \quad i \leqslant \dfrac{U_{zen}}{R_{zen}} \end{cases} \qquad /21/$$

$$m_k \cdot \ddot{x} + B_{1H} \cdot \dot{x} \cdot f + \left[m_t \cdot \ddot{x} + B_{2H} \cdot \dot{x} \cdot f + k \cdot (x_p + x - x_n) \right] \cdot F_1 = F_{ed} - F_c \qquad /22/$$

Zależności /6/. . ./9/ bez zmian.

$$F_1 = \begin{cases} 0 \text{ dla } & x < x_n \\ 1 \text{ dla } & x \geqslant x_n \end{cases} \qquad /23/$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{m_k}{m_t + m_k} & \text{dla} \quad x = x_n \quad \text{i} \quad \dot{x} > 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x \neq x_n \quad \text{lub} \quad x = x_n \quad \text{i} \quad \dot{x} \leqslant 0 \end{cases} \qquad /24/$$

$$F_c = (m_k + m_t \cdot F_1) \cdot g \cdot k_k \qquad /25/$$

k_k = + 1, 0, −1 w zależności od usytuowania elektromagnesu,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{gdy} \begin{cases} x = x_{lim} & \text{i} \quad F_{ed} > k \cdot (x_p + x_{lim} - x_n) \text{ lub} \\ x = 0 & \text{i} \quad F_{ed} = 0 \end{cases} \qquad /26/$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x} \\ \ddot{x} &= \ddot{x} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{gdy nie jest spełniony warunek zawarty w /26/} \\ \text{oraz jest spełniony odpowiedni warunek z /24/} \end{array} \qquad /27/$$

przy czym:

B_{1H} – współczynnik tłumienia hydraulicznego kotwicy,

B_{2H} – współczynnik tłumienia hydraulicznego tłoczka rozdzielacza,

U – wartość napięcia zasilającego,

U_r – aproksymowane napięcie diody Zenera,

U_{zen} – napięcie Zenera,

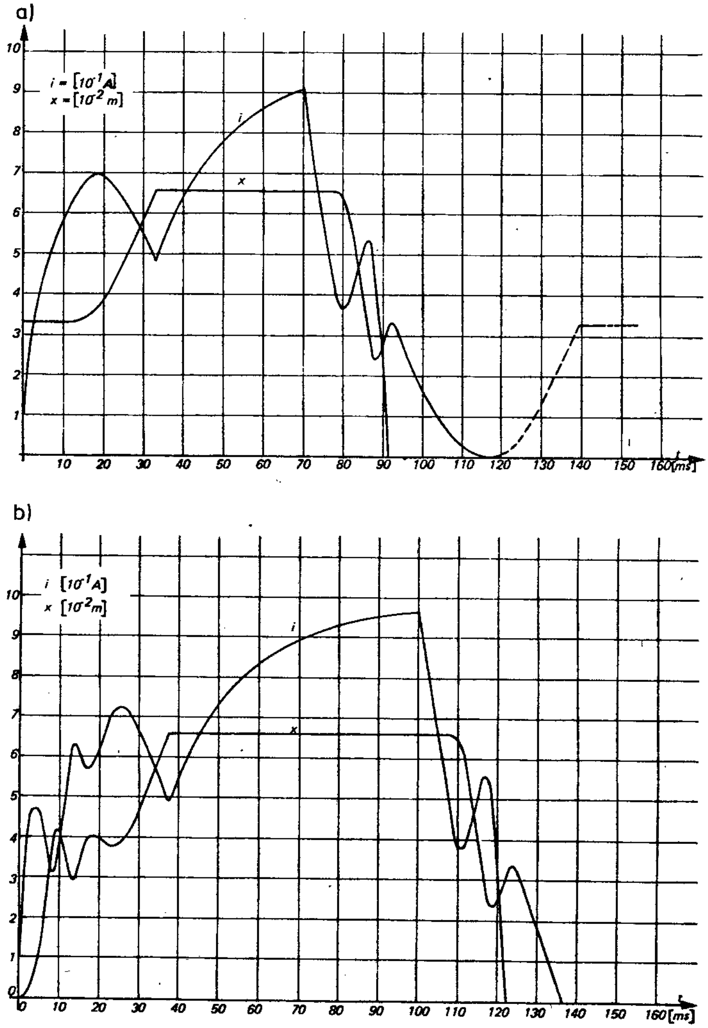
R_{zen} – rezystancja diody Zenera w zakresie prądów, przy których napięcie diody Zenera jest mniejsze niż U_{zen},

g – przyspieszenie ziemskie.

Pozostałe wielkości występujące w powyższych równaniach zostały omówione wcześniej. Przy konstruowaniu wyżej wymienionych zależności przyjęto, że w momentach zderzeń kotwicy i tłoczka z obudową elektromagnesu, tj. gdy położenie x osiąga wartość x_{lim} przy $\dot{x} > 0$ oraz osiąga wartość $x = 0$ przy $\dot{x} < 0$, nie występują odbicia kotwicy i tłoczka od obudowy.

4. Modelowanie obwodu elektromechanicznego na maszynie cyfrowej

Zależności /6/. . . /18/,/20/. . . /27/ opisujące zjawiska dynamiczne w obwodzie elektromechanicznym stanowią model matematyczny układu. Równania te zostały zamodelowane na maszynie cyfrowej RIAD, z wykorzystaniem języka CSMP. Na podstawie wydruków stanowiących rozwiązanie układu równań modelu, sporządzono wykresy przebiegów prądu i położenia części ruchomej elektromagnesu (rys.4).

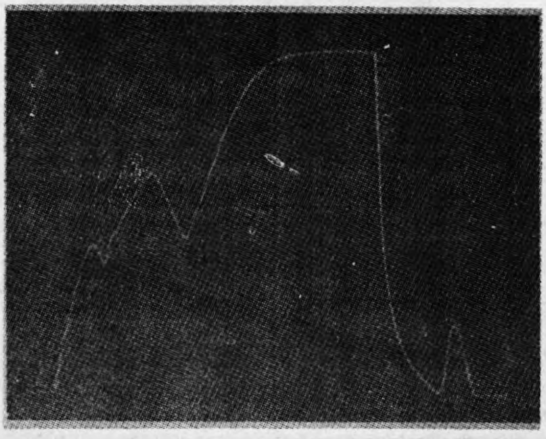


Rys.4. Przebiegi prądu i oraz położenia x kotwicy elektromagnesu sporządzone na podstawie wydruków maszyny cyfrowej: a) kierunek siły ciężkości zgodny z kierunkiem działania siły elektrodynamicznej: (impuls sterujący o czasie trwania 70 ms), b) kierunek siły ciężkości przeciwny do kierunku działania siły elektrodynamicznej (impuls sterujący o czasie trwania 100 ms)

Przebiegi przedstawione na rys.4 zostały następnie zweryfikowane przez porównanie ich z przebiegami rzeczywistymi prądu płynącego w elektromagnesie po zasileniu go prostokątnym impulsem napięcia. Wyniki doświadczenia zostały utrwalone na fotografiach (fot.1, fot.2). Porównanie przebiegów rzeczywistych prądu z przebiegami otrzymanymi z maszyny cyfrowej pozwala wnioskować, że charakter zachodzących procesów w obu przypadkach jest identyczny. Brak jednoznaczności pomiędzy tymi przebiegami wynika stąd, że oscylogramy były zdejmowane w elektromagnesie, którego kotwica nie była tak dobrze smarowana, jak to przedstawiono w modelu matematycznym (współczynnik tłumienia hydraulicznego B_H). W układzie bowiem rzeczywistym (modelowanym), kotwica jest zalana olejem, co znacznie zmniejsza tłumienie hydrauliczne. Mogą występować zatem większe przyspieszenia podczas ruchu kotwicy, czego efektem jest powodowanie silniejszych przeregulowań prądu (rys.4).

Przyjęto, że jeżeli przebiegi prądu w układzie rzeczywistym pokrywają się z przebiegami prądu w modelu matematycznym, to ruch kotwicy w modelu matematycznym odpowiada ruchowi rzeczywistemu.

Fot. 1. Oscylogram przebiegu prądu elektromagnesu; siła ciężkości działa zgodnie z siłą elektrodynamiczną; $\vdash\!\dashv$ 20 ms; I ~0,14 A



Fot. 2. Oscylogram przebiegu prądu elektromagnesu; siła ciężkości działa przeciwnie do siły elektrodynamicznej; $\vdash\!\dashv$ 20 ms; I ~0,14 A

Powyższe założenie jest przyjęte głównie w wyniku istnienia niezwykłych trudności przy weryfikowaniu ruchu kotwicy elektromagnesu na podstawie eksperymentu. Po pierwsze, najczęściej brak jest bezpośredniego dostępu do części ruchomej elektromagnesu; po drugie, należałoby stosować czujniki położenia o znikomych oporach ruchu (w badanym elektromagnesie siła ciężkości rzędu 50 gramów wpływa istotnie na charakter zjawisk).

5. Wnioski

Dotychczas uzyskane wyniki wskazują, że model matematyczny elektromagnesu jest poprawny z punktu widzenia dokładności odwzorowania przebiegów położenia kotwicy jak też zmian prądu cewki.

Zamodelowanie układu na maszynie cyfrowej daje możliwość zbadania ruchu kotwicy elektromagnesu bez kłopotliwego konstruowania stanowiska pomiarowego. Pozwala również badać działanie obwodu elektromechanicznego przy zmianach takich wielkości, jak:

- rezystancja cewki (wpływ temperatury),
- napięcie zasilania,
- stała sprężyny zwrotnej,
- wstępne ściśnięcie sprężyny itp.

Mozna również przeprowadzić, na przykład, próbę linearyzacji charakterystyki statycznej położenia kotwicy elektromagnesu poprzez wyznaczenie odpowiedniego napięcia zmiennego o wybranym kształcie, amplitudzie i częstotliwości tak, aby było spełnione wymaganie liniowości.

Opisany sposób analizy wykorzystujący model matematyczno-fizyczny oraz uzyskane wyniki przedstawione w niniejszej pracy mogą znaleźć zastosowanie przy badaniu obiektów elektromechanicznych, jak też przy konstruowaniu układów automatyki zawierających takie obiekty.

Dodatek

1. Funkcja Lagrange'a dla obwodu elektromechanicznego

W czasie analizy elektromagnesu korzystano z zasady wariacyjnej Hamiltona [1–4]. W celu prawidłowego zastosowania tej metody analizy układów dynamicznych, niezbędne było wyznaczenie funkcji stanu, tj. funkcji zależnej tylko od aktualnego stanu układu, a niezależnej od sposobu dojścia do tego stanu. Z istoty tej funkcji wynika, że jej argumentami będą współrzędne uogólnione q i prędkości uogólnione $\dot{q}$.

Dla sformułowania zależności określających różne funkcje stanu ważne są pojęcia energii i koenergii [1–4].

Rozważmy układ o jednym stopniu swobody, tj. taki, którego stan jest określony dwiema współrzędnymi uogólnionymi q_1, q_2, związanymi równaniami więzów [1]:

$$F(q_1; q_2) = 0 \qquad /1/$$

Załóżmy, że

$$q_1 \cdot dq_2 = dW \qquad /2/$$

jest przyrostem energii zmagazynowanej w układzie, odpowiadającym przesunięciu dq_2 oraz że całkowita energia układu jest funkcją stanu, czyli całka

$$W = \int_{q_{2A}}^{q_{2B}} q_1 \, dq_2 \qquad /3/$$

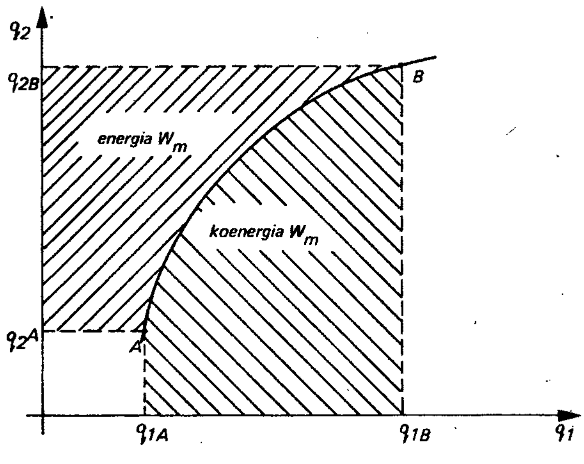
nie zależy od drogi całkowania (q_{1A}, q_{2A} – współrzędne określające stan początkowy układu; q_{1B}, q_{2B} – współrzędne określające stan końcowy układu).

Funkcję

$$W' = \int_{q_{1A}}^{q_{1B}} q_2 \, dq_1 \qquad /4/$$

nazywamy koenergią układu (interpretację geometryczną podano na rys.1). W przypadku układów liniowych jest spełniona zależność:

$$W = W' \qquad /5/$$



Rys. 1. Interpretacja geometryczna energii i koenergii

Dla przypadku obwodów elektrycznych, które są opisywane za pomocą zmiennych:

i_i – prąd,

ψ_i – strumień skojarzony,

u_{ci} – napięcie pomiędzy okładzinami kondensatora,

q_i – ładunek zgromadzony w kondensatorze ($i = 1, 2, 3 \ldots n$), oraz których stan początkowy odpowiada zerowym wartościom wszystkich zmiennych,

energia pola magnetycznego zgromadzona w obwodzie jest wyrażona zależnością:

$$W_m = \int_{0 \ldots 0}^{\psi_1 \ldots \psi_n} \sum_{i=1}^{n} i'_i \, (\psi'_i) \, d\psi'_i \qquad /6/$$

koenergia pola magnetycznego obwodu jest wyrażona zależnością:

$$W'_m = \int_{0...0}^{i_1...i_n} \sum_{i=1}^{n} \psi'_i\,(i'_i)\,di'_i \qquad /7/$$

energia pola elektrycznego obwodu jest wyrażona zależnością:

$$W_e = \int_{0...0}^{q_1...q_n} \sum_{i=1}^{n} u'_{ci}\,(q'_i)\,dq'_i \qquad /8/$$

koenergia pola elektrycznego obwodu jest wyrażona zależnością:

$$W'_e = \int_{0...0}^{u_{c1}...u_{cn}} \sum_{i=1}^{n} q'_i\,(u'_{ci})\,d\,u'_{ci} \qquad /9/$$

Jeżeli obwody mechaniczne są opisane przez zmienne:

f_i – siła,

p_i – pęd,

x_i – przesunięcie,

$\dot{x}_i$ – prędkość (i = 1, 2, 3 . . . n)

oraz stan początkowy układu odpowiada zerowym wartościom wszystkich zmiennych, to:
energia potencjalna układu jest wyrażona zależnością:

$$V = \int_{0...0}^{x_1...x_n} \sum_{i=1}^{n} (-f'_i\,(x'_i))dx'_i \qquad /10/$$

koenergia potencjalna jest wyrażona zależnością:

$$V' = \int_{0...0}^{f_1...f_n} \sum_{i=1}^{n} (-x'_i\,(f'_i))df'_i \qquad /11/$$

energia kinetyczna układu jest wyrażona zależnością:

$$T = \int_{0...0}^{p_1...p_n} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}'_i\,(p'_i)dp'_i \qquad /12/$$

koenergia kinetyczna układu jest wyrażona zależnością:

$$T' = \int_{0...0}^{\dot{x}_1...\dot{x}_n} \sum_{i=1}^{n} p'_i\,(\dot{x}'_i)\,d\dot{x}'_i \qquad /13/$$

We wzorach przez ′ oznaczono współrzędną bieżącą dla odróżnienia od współrzędnych stanu końcowego, będących górnymi granicami całkowania.

Można wykazać [1], że w przypadku elektromagnesu z ruchomą kotwicą, który stanowi nieliniowy układ elektromechaniczny, funkcja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t) \tag{14}$$

którą nazwiemy funkcją Lagrange'a, przyjmie postać:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} W'_m \\ T - V \end{bmatrix} \tag{15}$$

a po wprowadzeniu odpowiednich wielkości charakteryzujących układ elektromechaniczny otrzymamy:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \int\limits_0^i \psi'(i')\, di' \\ \\ \frac{1}{2}\cdot m \cdot \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\cdot k \cdot x^2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

przy czym oznaczenia są następujące:

m — masa kotwicy,

k — stała sprężyny zwrotnej.

2. Zasada wariacyjna Hamiltona dla obwodu elektromechanicznego

Zasada wariacyjna Hamiltona brzmi następująco [1,2] :

Dla ruchu rzeczywistego w każdym przedziale czasu $\langle t_0\ ,\ t_1\rangle$ zachodzi równość :

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0 \tag{17}$$

gdzie: $\delta q_l\,(t_0) = 0, \qquad \delta q_l\ (t_1) = 0, \qquad l = 1, 2, 3 \ldots n$

to znaczy, że wariacja całki funkcji Lagrange'a w ciągu przesunięcia zachodzącego w czasie od t_0 do t_1 jest równa zeru, jeżeli wariacje δq_l poszczególnych zmiennych uogólnionych są przesunięciami przygotowanymi i równają się zeru dla $t = t_0$ i $t = t_1$.

Z równania /17/ można otrzymać równanie Eulera–Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^T} = 0 \tag{18}$$

przy czym przez $\mathbf{q}^T$ oznaczono wektor transponowany wektora $\mathbf{q}$.

Zasadę Hamiltona można rozszerzyć na układy niezachowawcze przez uwzględnienie wektora uogólnionych sił zewnętrznych $\mathcal{M}$, niezależnych od uogólnionych współrzędnych i prędkości,

lecz, co najwyżej, zależnych od czasu oraz uwzględnienie wektora funkcji stratności Rayleigha $\mathcal{F}$, zależnej od prędkości uogólnionych, działającej wewnątrz układu.
Wtedy równanie ruchu przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^T}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^T} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^T} = \mathcal{M} \qquad /19/$$

W przypadku analizowanego obwodu elektromechanicznego poszczególne wielkości występujące w równaniu /19/ mają postać:

$$q = \begin{bmatrix} \int_0^t i dt' \\ x \end{bmatrix} \qquad /20/$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} i \\ \dot{x} \end{bmatrix} \qquad /21/$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot R \cdot i^2 \\ \frac{1}{2} \cdot B_H \cdot \dot{x}^2 \end{bmatrix} \qquad /22/$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} U_Z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad /23/$$

przy czym oznaczenia są następujące:

R – rezystancja cewki elektromagnesu,
B_H – współczynnik tłumienia hydraulicznego kotwicy,
U_Z – napięcie zasilające cewkę elektromagnesu.

Po podstawieniu zależności /16/, /20/, /21/, /22/, /23/ do wzoru /19/, otrzymamy:

$$R \cdot i + \frac{d\psi(i, x)}{dt} = U_Z \qquad /24/$$

$$m \cdot \ddot{x} + B_H \cdot \dot{x} + k \cdot x - \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^i \psi(i', x)\, di'\right] = 0 \qquad /25/$$

Literatura

[1] Missala J., Missala T.: Elektryczne pomiary wielkości mechanicznych. Warszawa 1971. PWN.

[2] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1971. PWN.

[3] Meisel J.: Zasady elektromechanicznego przetwarzania energii. Warszawa 1970. WNT.

[4] Gutowski R.: Mechanika analityczna. Warszawa 1971. PWN.

[5] Landau L.D., Lifszyc E.M.: Krótki kurs fizyki teoretycznej. t.1. Warszawa 1980. PWN.

[6] Resnick R., Halliday D.: Fizyka t.1. Warszawa 1965. PWN.