

doc. dr inż. ANDRZEJ SERWACH
 mgr JERZY MIŁOSZ
 Przemysłowy Instytut
 Automatyki i Pomiarów MERA-PIAP
 Warszawa

SYMULACJA OPÓŹNIENIA TRANSPORTOWEGO W PRZYPADKU NIEUSTALONEJ PRĘDKOŚCI NOŚNIKA

W artykule podano definicję opóźnienia transportowego w przypadku nieustalonej prędkości nośnika oraz algorytm symulacji tego procesu w postaci fortranowskiej SUBROUTINE. Przeanalizowano dokładność modelu przybliżonego, przydatnego do symulacji opóźnienia w języku CSMP. Jako przykład zastosowania, podano model matematyczny transportu ciepła rurociągiem, przy czym uwzględniono w nim dodatkowo straty ciepła.

W technologicznych procesach ciągłych, niekiedy występuje zagadnienie transportu danej cechy procesu rurociągiem, za pomocą płynu. Najpopularniejszym przykładem takiego procesu jest transport ciepła za pomocą wody, jako nośnika w sieciach ciepłych. Podczas transportu występują opóźnienia spowodowane skończoną prędkością nośnika. Jeżeli prędkość ta jest ustalona w czasie, to opóźnienie jest stałe i model matematyczny zjawiska jest znany. Zazwyczaj opisuje się go za pomocą transmitancji w postaci wykładniczej. Określenie opóźnienia transportowego jest bardziej skomplikowane, gdy prędkość nośnika jest nieustalona, tzn. zmienna w czasie, co np. w sieciach ciepłych ma miejsce w przypadku zautomatyzowanych odbiorników.

Model matematyczny procesu transportu danej własności za pomocą nośnika o nieustalonej prędkości można opisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(0) & \text{dla } 0 \leq t \leq \tau_0 \\ y(t) &= x[t - \tau(t)] & \text{dla } t > \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad /1/$$

gdzie:

- t — wiodąca zmienna niezależna w procesie, tzn. czas
- $x(t)$ — zmienna niezależna opisująca własność transportowaną na początku drogi transportu w bieżących chwilach czasu
- $x(0)$ — wartość początkowa $x(t)$
- $y(t)$ — zmienna zależna (wyjściowa) opisująca własność transportowaną na końcu drogi transportu w bieżących chwilach czasu
- τ_0 — opóźnienie transportowe dla wartości $x(0)$

$\tau(t)$ — bieżące opóźnienie transportowe

Początkowe i bieżące opóźnienie transportowe określa się jako granice całkowania w równaniach:

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &\Rightarrow I = \int_0^{\tau_0} v(t) dt \\ \tau(t) &\Rightarrow I = \int_{t-\tau(t)}^t v(t) dt \end{aligned} \right\} \quad /2/$$

gdzie:
 I — długość drogi transportowej, np. długość rurociągu
 $v(t)$ — prędkość nośnika

Wyżej zdefiniowany problem nie ma rozwiązania analitycznego, jeżeli pominąć przypadki nieistotne, które nie występują podczas badania własności złożonych modeli matematycznych metodą symulacji komputerowej.

Cyfrowy algorytm symulacyjny dla modelu opisanego równaniami /1/ i /2/ jest stosunkowo prosty. Został on zbudowany według następującej, ogólnej procedury:

- 1^o zapamiętywanie dla kolejnych dyskretnych chwil czasu; odpowiadających im bieżących (przychodzących z zewnątrz) wartości $x(t)$,
- 2^o całkowanie, na bieżąco, przebiegu $v(t)$ za pomocą sumowania przyrostów pól odpowiadających dyskretnym przyrostom czasu;
- 3^o zapamiętywanie dla kolejnych dyskretnych chwil czasu; odpowiadających im wartości całek z prędkości;
- 4^o jeżeli wartość całki z prędkości jest mniejsza lub co najwyżej równa długości drogi transportowej, podstawianie w miejsce zmiennej wyjściowej $y(t)$ wartości początkowej $x(0)$;
- 5^o w przypadku przeciwnym, szukanie takiej wartości całki z prędkości, która odjęta od wartości całki odpowiadającej bieżącej chwili czasu, daje w wyniku długość drogi transportowej I (zadaną dokładnością);
- 6^o podstawienie w miejsce zmiennej wyjściowej $y(t)$ wartości zmiennej wejściowej x odpowiadającej chwili czasu z przeszłości, dla której wartości całki z prędkości spełnia warunek 5^o.

Powyższy algorytm zajmuje dużo miejsca w pamięci komputera (konieczność zapamiętywania po dwie wartości w każdym kroku symulacji-całkowania), dlatego w praktyce musi być uzupełniony procedurą interpolacyjną. Jego realizacja jako fortranowska SOBROUTINE jest podana na wydruku z komputera.

```

SUBROUTINE DELAY(A,B,C,D,P,KL,M,KP,JOT,YW)
  REAL A,B,C,D,P,R,YW,Y1,Y2,CC,Z1,Z2
  INTEGER KL,KP,JOT,L,M
  DIMENSION CC(2,1000)
  IF(A.GE.P) GO TO 6
  P=0.
  KP=0
  JOT=0
  YW=-C
6  R=M+B*(YW+C)/2.

```

```

        YW=C
        KP=KP+1
        IF (MOD(KP,KL).NE.1) GO TO 7
        JOT=JOT+1
        CC(1,JOT)=0
        CC(2,JOT)=R
    7 CONTINUE
        IF (JOT-1.LE.0) GO TO 1
        IF (CC(2,JOT).LT.0) GO TO 1
        L=0
    30 L=L+1
        Z1=CC(2,JOT-1)-CC(2,L)
        IF (Z1.GT.P) GO TO 30
        IF (L-1) 1,1,2
    1 Y1=CC(1,1)
        GO TO 300
    2 Y1=CC(1,L)
    300 CONTINUE
        M=0
    31 M=M+1
        Z2=CC(2,JOT)-CC(2,M)
        IF (Z2.GT.P) GO TO 31
        IF (M-1) 3,3,4
    3 Y2=CC(1,1)
        GO TO 301
    4 Y2=CC(1,M)
    301 YW=Y1+(Y2-Y1)*MOD(KP,KL)/FLOAT(KL)
        RETURN
        END

```

Symbole użyte w SUBROUTINE DELAY (A, B, C, D, P, KL, R, KP, JOT, YW) mają następujące znaczenie:

- A — czas, zmienna niezależna procesu symulacji (odpowiednik t);
- B — krok symulacji, także krok całkowania;
- C — prędkość nośnika zmienna w czasie (odpowiednik $v(t)$);
- D — sygnał wejściowy zmienny w czasie, charakteryzujący własność transportowaną na początku drogi transportu (odpowiednik $x(t)$);
- P — droga transportu (odpowiednik l);
- KL — liczba naturalna, określająca w co którym kroku symulacji zmienne D i R zostają wpisane do tablicy;
- R — całka z C liczona metodą trapezów;
- KP — licznik kroków symulacji;
- JOT — indeks tablicy;
- YW — sygnał wyjściowy (odpowiednik $y(t)$).

Typy zmiennych:

REAL A, B, C, D, P, R, YW

INTEGER KL, KP, JOT.

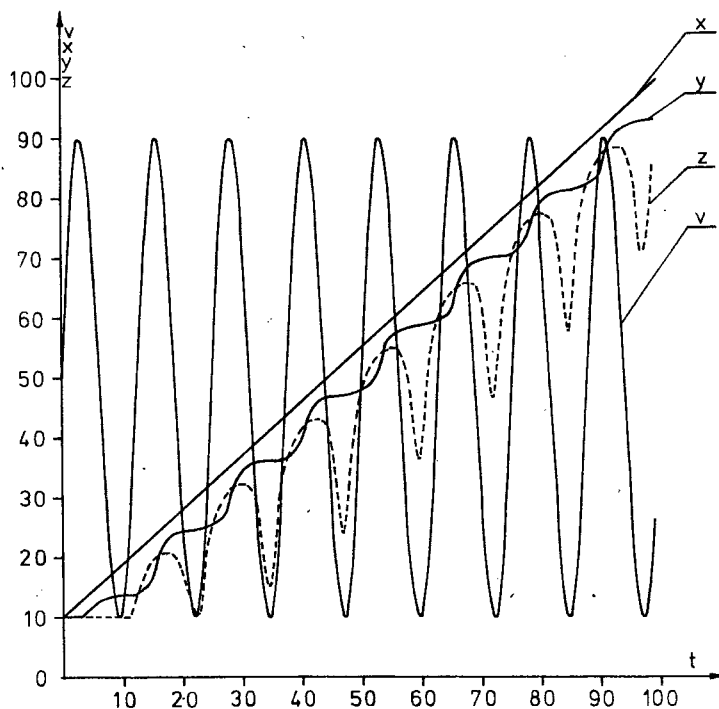
Przy wywoływaniu podprogramu DELAY w miejsce parametrów formalnych P i KL wygodnie jest podstawiać liczby. Sygnał wyjściowy YW jest liczony w procedurze przy użyciu metody interpolacji liniowej.

Procedura ta może być używana do symulacji procesów ciągłych w języku Fortran, natomiast nie jest przyjmowana przez pakiet CSMP (język nieproceduralny na bazie Fortranu, przeznaczony specjalnie

do symulacji procesów ciągłych). Przyczyna prawdopodobnie tkwi w tym, że pakiet CSMP jest zaprojektowany w sposób umożliwiający zapamiętywanie danych tylko z poprzedniego kroku symulacji, podczas gdy w omawianej procedurze zapamiętuje się dane od początku procesu. Natomiast w CSMP jest możliwe symulowanie przybliżonego modelu opóźnienia ze zmienną prędkością transportową, który sprowadza się do podstawienia w równaniu /1/ wyrażenia:

$$\tau(t) = \frac{1}{v(t)} \quad /3/$$

Model taki jest błędny w sensie zgodności zjawiska, z prawami fizyki tym niemniej uwzględnia ogólną prawidłowość, że opóźnienie transportowe jest tym większe, im mniejsza prędkość nośnika. W celu określenia błędów popełnionych przy stosowaniu modelu przybliżonego przeprowadzono cykl porównawczych badań symulacyjnych, gdzie założono liniowo narastającą w czasie wartość $x(t)$ i sinusoidalnie zmienną wartość prędkości $v(t)$. Przykładowe wyniki symulacji pokazano na rys.1, gdzie zmienna v oznacza przebieg opóźniony liczony według zdefiniowanej w tym artykule procedury,



Rys. 1.

a zmienna z przebieg opóźniony liczony z modelu przybliżonego (równanie /3/). Jak wynika z rysunku, w konkretnym przypadku błędy są zasadnicze. Dochodzi do karykaturalnego efektu "cofania się w czasie", tzn. pomieszania kolejności występowania na wyjściu sygnałów wejściowych. Tym niemniej, na podstawie pełnych wyników obliczeń porównawczych, można stwierdzić, że stosowanie modelu

przybliżonego jest dopuszczalne w warunkach, gdy amplituda zmian prędkości i gradienty przyrostów prędkości (a więc przyspieszenia) są nieduże. Charakterystyczne jest przy tym, że błędy w przypadku prędkości narastającej są zawsze mniejsze niż w przypadku prędkości malejącej. Należy przestrzec, że model przybliżony jest zupełnie nieprzydatny, gdy prędkość spada poniżej dopuszczalnej (zanik przepływu nośnika).

Typowym przykładem zastosowania zdefiniowanego tutaj opóźnienia transportowego w przypadku nieustalonej prędkości nośnika jest model matematyczny transportu ciepła rurociągiem wodnym, będący podstawowym elementem modułowego systemu symulacji dynamiki sieci ciepłowniczych [1].

W tym przypadku, jako zmienne stanu i parametry w równaniach /1/ i /2/ występują następujące wielkości:

$v(t) \Rightarrow Q_p(t)$ – strumień objętości wody płynącej rurociągiem;

$x(t) \Rightarrow T_u(t)$ – temperatura wody przy wlocie rurociągu;

$y(t) \Rightarrow T_d(t)$ – temperatura wody przy wylocie rurociągu (bez strat ciepłowniczych);

$l \Rightarrow V$ – objętość wody w rurociągu (iloczyn długości i powierzchni przekroju poprzecznego).

Pełny model matematyczny transportu ciepła rurociągiem, oprócz opóźnienia transportowego, powinien uwzględniać straty ciepła przez ścianki. Wychodząc z teorii grzejników, można przyjąć, że straty te są proporcjonalne do średniej logarytmicznej różnicy temperatur do potęgi $4/3$. Wówczas temperatura na końcu rurociągu, uwzględniająca straty w odniesieniu do temperatury bez strat, jest opisana równaniem:

$$T_{dl} = T_d - \frac{l k_1}{\rho c_p Q_p} \left\{ \frac{(T_d - T_a) - (T_{dl} - T_a)}{\ln \frac{T_d - T_a}{T_{dl} - T_a}} \right\}^{\frac{4}{3}} \quad \text{dla } Q_p > 0 \quad /4/$$

$$T_{dl} = T_a \quad \text{dla } Q_p = 0$$

gdzie:

c_p – ciepło właściwe wody

k_1 – współczynnik strat ciepła na jednostkę długości rurociągu

T_{dl} – temperatura na końcu rurociągu z uwzględnieniem strat ciepła

T_a – temperatura zewnętrzna

ρ – gęstość wody

W celu zachowania zgodności z prawami fizyki, w przypadku wody trzeba zastrzec, że model jest słuszny dla $T_d, T_{dl} > 0^\circ\text{C}$.

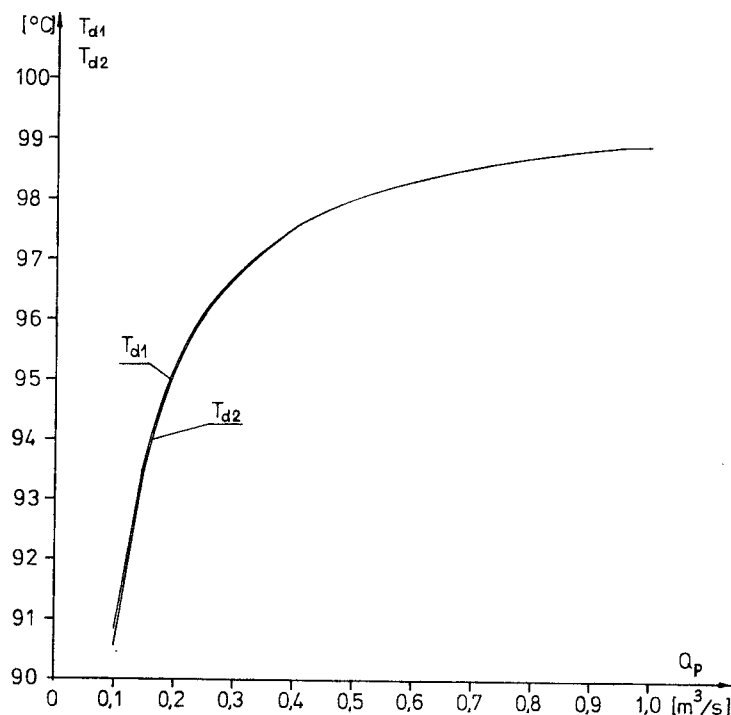
Powyższy model ma postać uwikłaną i dlatego przy symulacji wymaga stosowania procedury iteracyjnej, kłopotliwej, choćby z uwagi na wydłużanie czasu liczenia. Dlatego zaproponowano model uproszczony, gdzie założono, że straty ciepła są proporcjonalne do różnicy między temperaturą na końcu rurociągu i temperaturą zewnętrzną. Wówczas zamiast równania /4/ otrzymuje się równanie:

$$T_{dl} = \frac{\frac{\rho c_p Q_p}{l k_2} (T_d + T_a)}{1 + \frac{\rho c_p Q_p}{l k_2}} \quad /5/$$

gdzie: k_2 – współczynnik strat ciepła na jednostkę długości dla modelu uproszczonego.

Przebiegi temperatury T_{dl} w funkcji Q_p dla typowych warunków w sieci pokazano na rys.2. Symbo-

lem T_{d1} oznaczono temperaturę liczoną według równania /5/, a symbolem T_{d2} temperaturę liczoną według równania /4/. Porównanie wykazuje, że w typowych warunkach różnice między modelem ścisłym /4/ i uproszczonym /5/ są pomijalne. Wobec tego, ze względów praktycznych należy zalecać stosowanie modelu uproszczonego.



Rys. 2.

W razie potrzeby, w pełnym modelu matematycznym rurociągu można uwzględnić efekt akumulacji ciepła w ściankach przewodów, dodając do równań już omówionych (opóźnienie transportowe i straty ciepła) równanie różniczkowe członu inercyjnego pierwszego rzędu, o stałej czasowej akumulacji odwrotnie proporcjonalnej do strumienia objętości. Tutaj ten efekt pominięto, bowiem jak wykazały badania eksperymentalne [2], stałe czasowe akumulacji są kilkadziesiąt razy mniejsze od opóźnień transportowych.

Literatura

- [1] Serwach A.: Symulacja transportu ciepła w sieciach. Biuletyn MERA PIAP, nr 2/88, 1981.
- [2] Czystowicz S.A.: Awtomaticzeskoje regulirovanije raschoda tiepla w sistiemach tieplosnabženja i otoplenija. Strojzdat, 1975.