

mgr inż. JERZY MAŁECKI

Przemysłowy Instytut Automatyki
i Pomiarów MERA-PIAP

Warszawa

ANALIZA ALGORYTMU NUMERYCZNEGO DLA PROSTEGO ZAGADNIENIA KINEMATYKI ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH O OTWARTYCH ŁAŃCUCHACH KINEMATYCZNYCH

Korzystając z formalizmu współrzędnych jednorodnych i notacji Denavita-Hartenberga zaproponowano algorytm rozwiązywania prostego zagadnienia kinematyki dla robotów o otwartych łańcuchach kinematycznych złożonych z ogniw sztywnych.

1. Wstęp

W procesie konstruowania robotów i manipulatorów wygodnym narzędziem wspomagającym proces projektowania może być program komputerowy umożliwiający szybką analizę kinematyki rozważanych kolejnych rozwiązań konstrukcyjnych.

Program taki powinien obliczać położenia, prędkości i przyspieszenia dowolnych punktów konstrukcji, względem nieruchomego układu odniesienia.

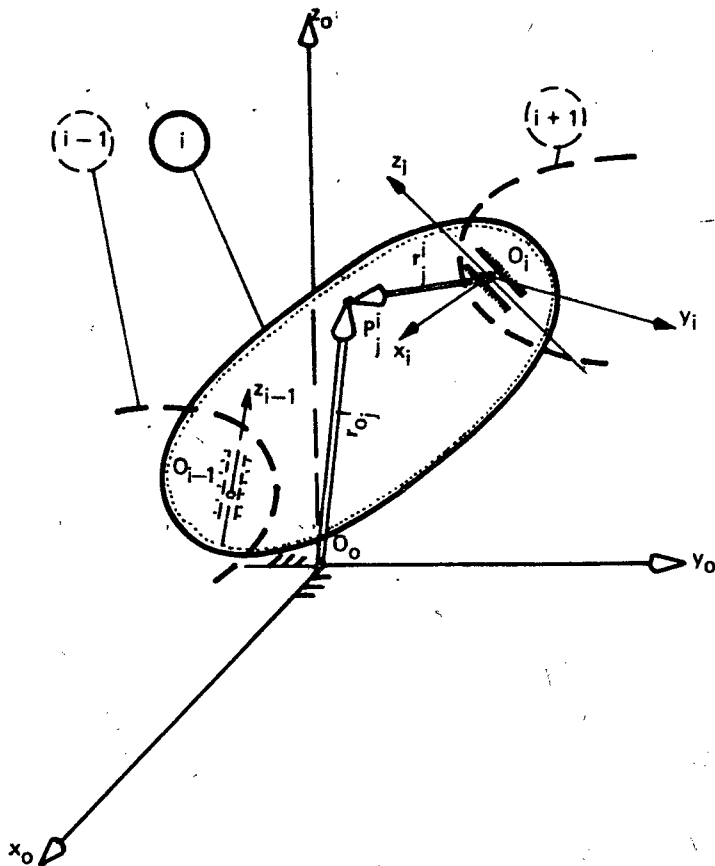
W dalszej części artykułu przyjęto następujące oznaczenia:

- q – wektor współrzędnych uogólnionych,
- \dot{q} – wektor prędkości uogólnionych,
- \ddot{q} – wektor przyspieszeń uogólnionych,
- h – wektor parametrów geometrycznych konstrukcji,
- p – wektor informujący o rodzajach par kinematycznych,
- r^j – wektor wodzący j -tego punktu w i -tym ogniwie P_i^j .

Wymienione wektory stanowią zbiór kompletnych danych do programu obliczeniowego.

W układach mechanicznych o wielu stopniach swobody korzystne jest stosowanie numerycznego generowania związków kinematycznych. Przemawiają za tym, co sygnalizuje [12], takie czynniki jak: nakłady pracy na wyliczenia wykonywane ręcznie, kłopoty w lokalizowaniu łatwych do popełnienia błędów rachunkowych i wreszcie czynnik czasu. Dodatkowo formalizm współrzędnych jednorodnych, dzięki zebraniu w macierzach transformacji kompletu informacji o obrotach i przesunięciach przy przejściu z układu do układu, czyni zapis związków kinematycznych bardzo przejrzystym i wygodnym do ujmowania w postaci algorytmów numerycznych [11].

2. Analiza związków kinematycznych



Hys. 1

P_j – punkt j -ty należący do i -tego ogniwa,

r_j^i – wektor wodzący punktu P_j we własnym układzie współrzędnych $O_i x_i y_i z_i$,

r_{oj}^i – wektor wodzący punktu P_j w układzie inercjalnym $O_o x_o y_o z_o$.

Korzystając z rachunku współrzędnych jednorodnych otrzymamy [10]:

$$r_{oj}^i = T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{i-1} r_j^i \quad /1/$$

gdzie macierze $T_{k-1, k}$ są macierzami Hartenberga o postaci

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos\Theta_i & -\sin\Theta_i \cos\alpha_i & \sin\Theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\Theta_i \\ \sin\Theta_i & \cos\Theta_i \cos\alpha_i & -\cos\Theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\Theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad /2/$$

a parametry Θ_i , s_i , a_i , α_i są parametrami Hartenberga. [6, 8].

Dalej przyjmiemy oznaczenie

$$q_i = \begin{cases} \Theta_i & \text{dla pary obrotowej} \\ s_i & \text{dla pary translacyjnej} \end{cases} \quad /3/$$

2.1. Obliczenie prędkości punktu P_j:

Przy oznaczeniu

$$W_i = T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{i-1,i} \quad \text{mamy} \quad /4/$$

$$\dot{r}_{0j}^i = \frac{d}{dt} (W_i r_j^i). \quad /5/$$

Ponieważ wektor r_j^i jest stały we własnym układzie współrzędnych i-tego ogniwa, więc

$$\dot{r}_{0j}^i = \dot{W}_i r_j^i, \quad /6/$$

$$\dot{W}_i = \sum_{s=1}^i \frac{\partial W_i}{\partial q_s} \dot{q}_s = \sum_{s=1}^i U_{is} \dot{q}_s, \quad /7/$$

gdzie oznaczyliśmy $U_{is} = \frac{\partial W_i}{\partial q_s}$.

Ostatecznie więc mamy

$$\dot{r}_{0j}^i = \sum_{s=1}^i U_{is} r_j^i \dot{q}_s. \quad /8/$$

Macierz U_{is} daje się łatwo obliczać numerycznie poprzez wykorzystanie własności różniczkowania macierzy transformacji [10], a mianowicie:

$$\dot{T}_{i-1,i} = \Theta T_{i-1,i} \dot{q}_i, \quad \text{przy czym} \quad /9/$$

$$\Theta = \begin{cases} \Theta_s & \text{gdy } q_i = s_i \\ \Theta_\theta & \text{gdy } q_i = \theta_i \end{cases} \quad /10/$$

Macierze Θ_s i Θ_θ to macierze stałe o postaci

$$\Theta_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad /11/$$

Korzystając z zależności /7/ i /9/ mamy

$$U_{is} = \frac{\partial W_i}{\partial q_s} = T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{s-2, s-1} \Theta T_{s-1, s} \dots T_{i-1, i} \quad /12/$$

co pozwala na zastąpienie procesu rachunkowego różniczkowania przez mnożenie macierzy, dogodne do ujęcia w postaci algorytmu komputerowego.

2.2. Obliczenie przyspieszenia punktu P_j^i

W celu obliczenia przyspieszenia punktu P_j^i zróżniczkujemy obliczony już /8/ wektor prędkości \dot{r}_{oj}^i .
Otrzymujemy

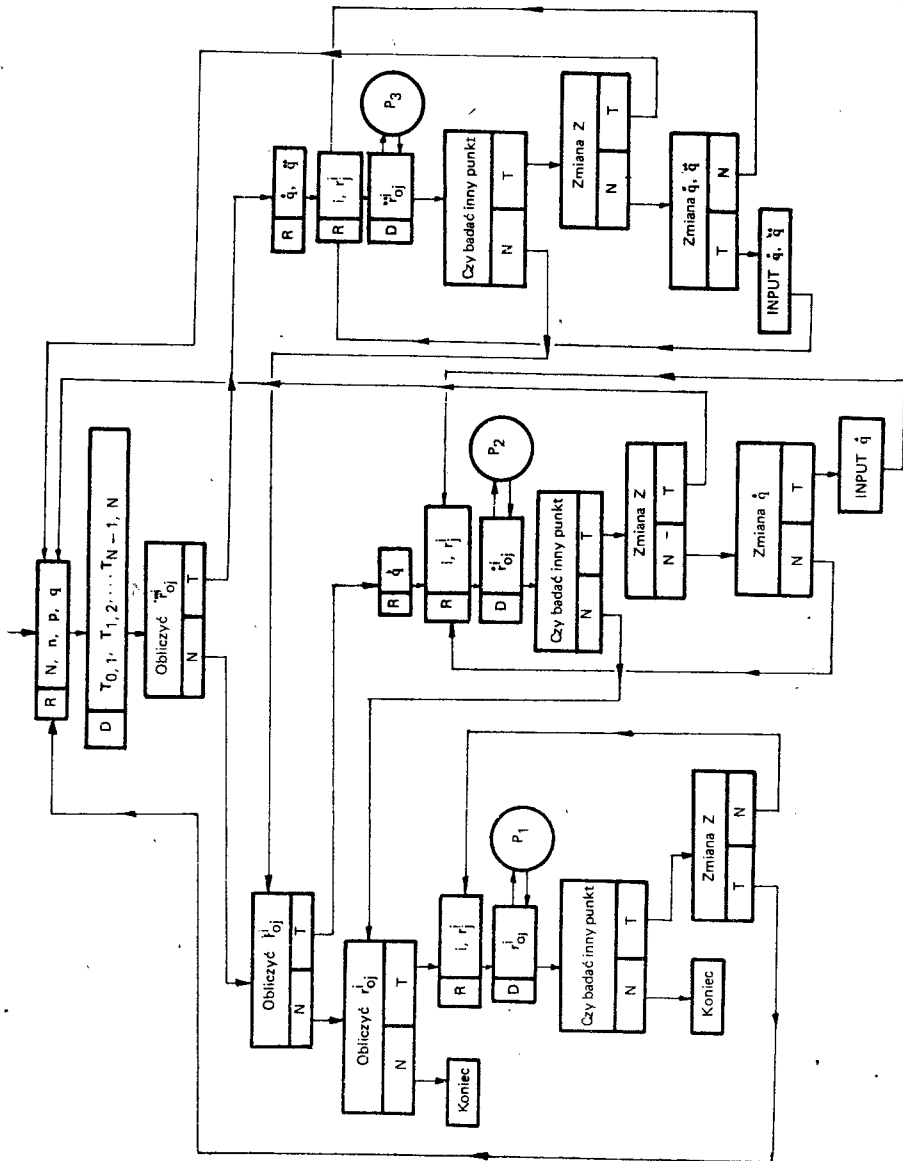
$$\ddot{r}_{oj}^i = \frac{d}{dt} (\dot{r}_{oj}^i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{s=1}^i U_{is} r_j^s \dot{q}_s \right) \quad /13/$$

$$\ddot{r}_{oj}^i = \sum_{s=1}^i \left((U_{is})' r_j^s \dot{q}_s + U_{is} r_j^s (\dot{q}_s)' \right), \text{ czyli} \quad /14/$$

$$\ddot{r}_{oj}^i = \left(\sum_{n=1}^i \sum_{m=1}^i U_{inm} \dot{q}_n \dot{q}_m + \sum_{n=1}^i U_{in} \dot{q}_n' \right) r_j^i \quad /15/$$

Występujące we wzorze /15/ oznaczenie U_{inm} ma następujący sens:

$$\begin{aligned} U_{inm} &= \frac{\partial^2 W_i}{\partial q_n \partial q_m} = \\ &= T_{0,1} T_{1,2} \dots T_{n-2, n-1} \Theta T_{n-1, n} \dots \\ &\dots T_{m-2, m-1} \Theta T_{m-1, m} \dots T_{i-1, i} \end{aligned} \quad /16/$$



Rys. 2

i powstaje w wyniku operacji:

$$\frac{d}{dt} U_{is} = \sum_{n=1}^i \frac{\partial U_{is}}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n = \sum_{n=1}^i \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial W_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_n = \sum_{n=1}^i \frac{\partial^2 W_i}{\partial q_s \partial q_n} \dot{q}_n \quad /17/$$

3. Budowa algorytmu obliczeniowego

Na rysunku 2 przedstawiono ogólny schemat budowy algorytmu obliczeniowego. Dla uproszczenia użyto następujących oznaczeń:

\textcircled{P}_i – przeniesienie obliczeń do segmentu P_i ,

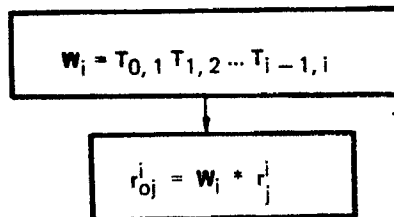
\boxed{R} – czytaj wymienione wielkości,

\boxed{D} – oblicz wartość zmiennej

Z oznacza zbiór $\{N, h, p, q\}$ 0 jest macierzą zerową.

3.1. Obliczanie położenia punktów P_i

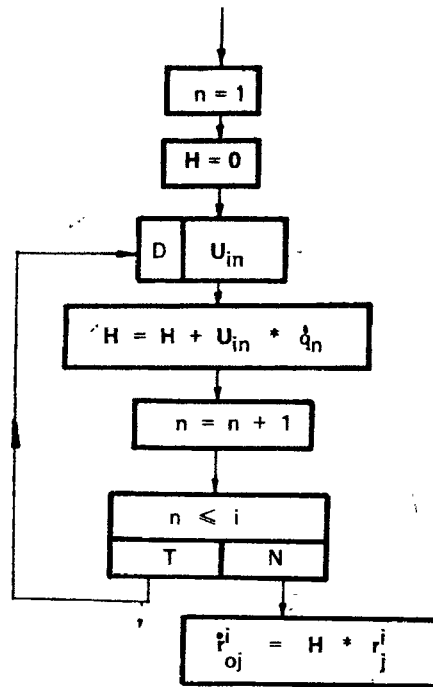
Ta najprostsza operacja, sygnalizowana na schemacie ogólnym jako P_1 , obejmuje czynności przedstawione na rys. 3.



Rys. 3

3.2. Obliczanie prędkości punktów P_i

Składowe wektora prędkości punktu P_i wyznaczone są w wyniku działania podprogramu oznaczonego na schemacie ogólnym (rys. 2) jako P_2 , obejmującego wykonanie czynności według schematu przedstawionego na rys. 4.



Rys. 4

3.3. Obliczanie przyspieszeń punktów P_j^i

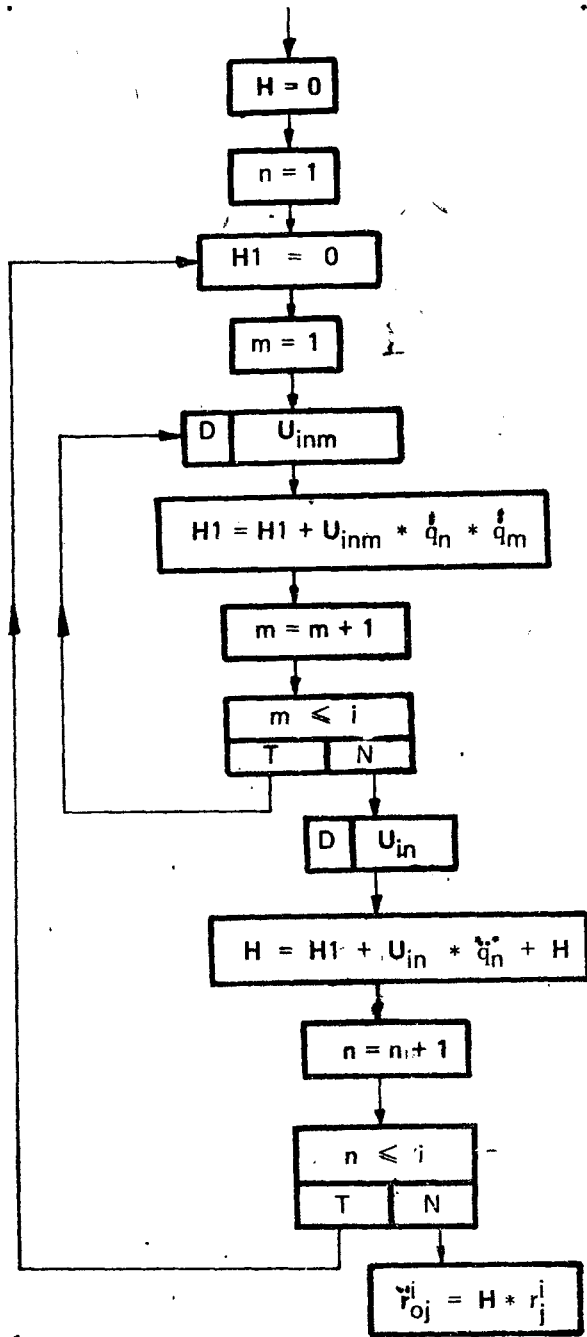
Składowe wektora przyspieszenia punktu P_j^i obliczane są według podprogramu P_3 (rys. 5), przy czym korzystamy ze wzorów /15/ i /16/ przekształconych do postaci:

$$\ddot{r}_{oj}^i = \sum_{n=1}^i \left(\sum_{m=1}^i U_{inm} \dot{q}_n \dot{q}_m + U_{in} \ddot{q}_n \right) r_j^i \quad /18/$$

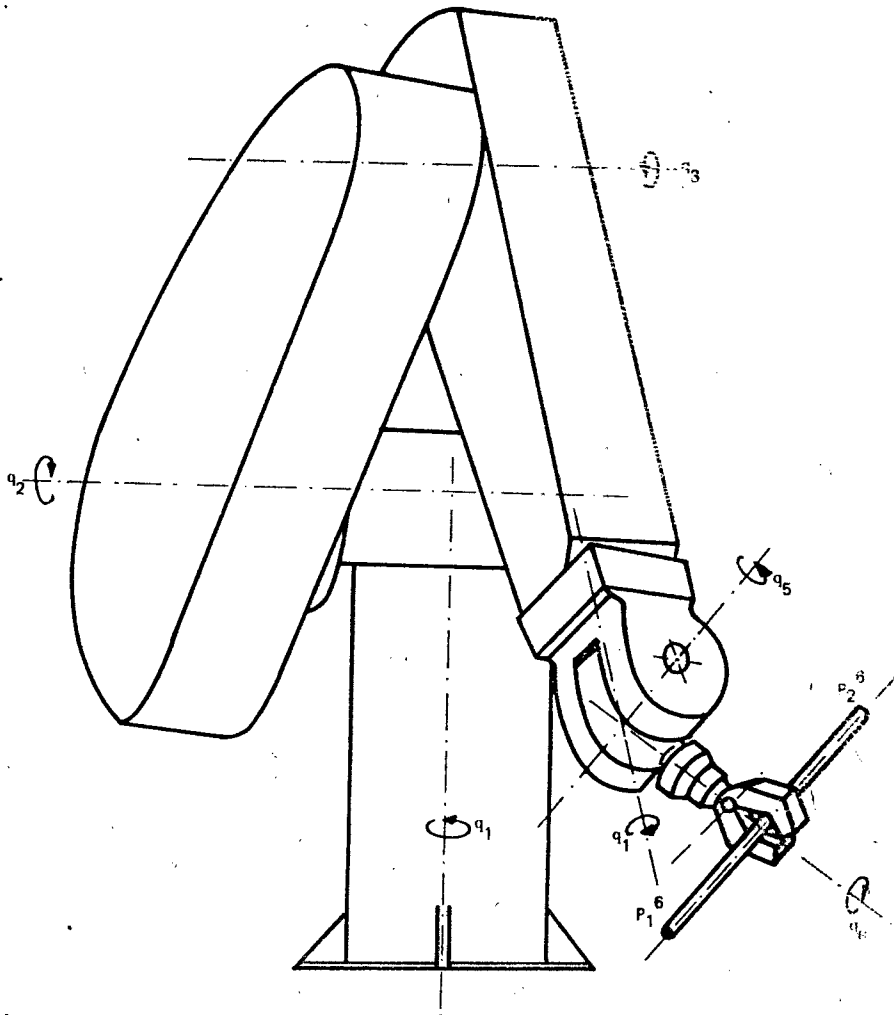
4. Przykład obliczeniowy

Jako ilustracja zastosowania opracowanego algorytmu przedstawione zostało rozwiązanie następującego praktycznego zadania:

Robot typu PUMA przenosi pręt metalowy zamocowany w chwytaku (jak na rys. 6). Należy wyznaczyć położenie prędkości i przyspieszenia punktów krańcowych pręta P_1^6 i P_2^6 , względem nieruchomego układu współrzędnych, związanego z podłożem, mając daną charakterystykę geometrii robota (h, p) , komplet danych kinematycznych (q, \dot{q}, \ddot{q}) , oraz znając położenie pręta względem chwytaka.



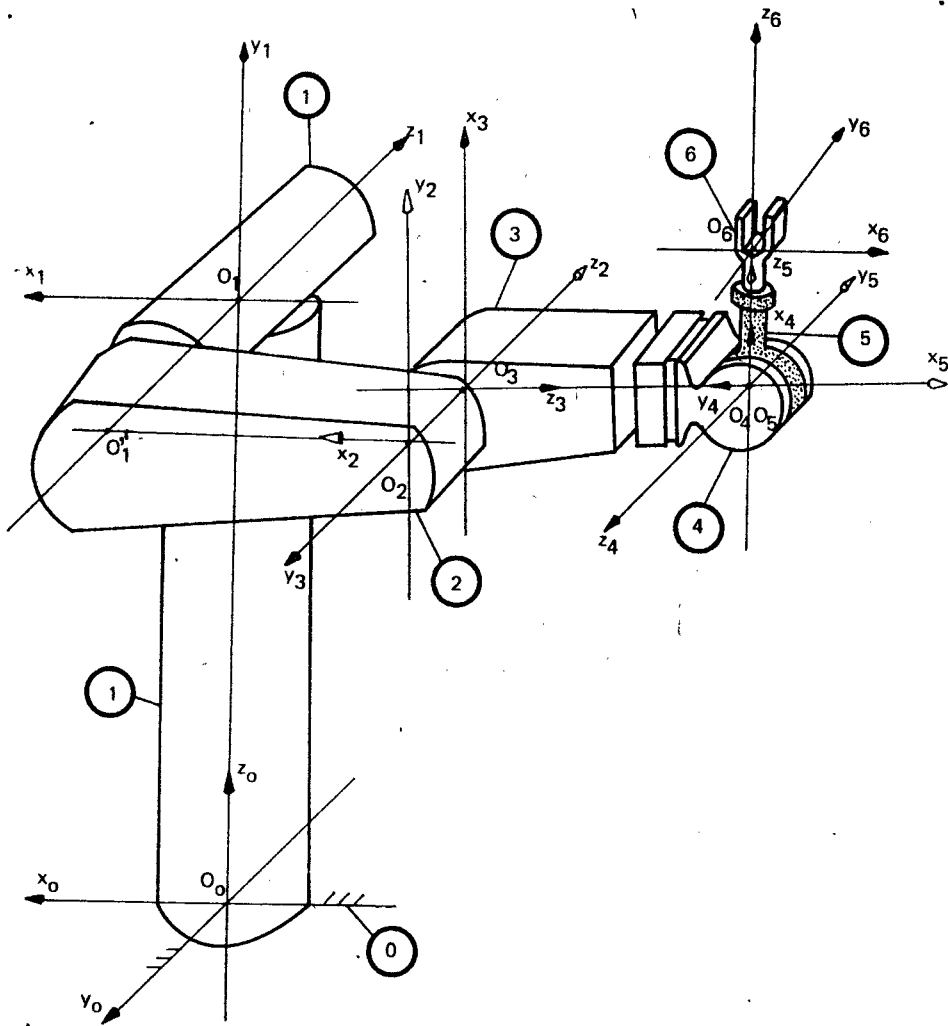
Rys. 5



Rys. 6

4.1. Analiza danych

- A) Robot ma sześć stopni swobody, wszystkie pary są obrotowe, więc $N = 6$, $P/l/ = 0$ dla $l = 1, \dots, 6$.
- B) Parametry będące składowymi wektora $h = [a_1, s_1, \alpha_1, \dots, a_6, s_6, \alpha_6]^T$ wyznaczymy w oparciu o rysunek 7a. Otrzymujemy poniższą tabelkę współczynników Hartenberga:



Rys. 7a

Tabela 1

i	θ_i (var)	s_i	a_i	α_i
1	0°	$0_0 0_1$	0	90°
2	0°	$-0_1 0_1'$	$-0_1' 0_2$	0°
3	90°	$0_2 0_3$	0	-90°
4	0°	$0_3 0_4$	0	-90°
5	-90°	0	0	-90°
6	0°	$0_5 0_6$	0	0°

Dalej przyjęto:

Tabela 2

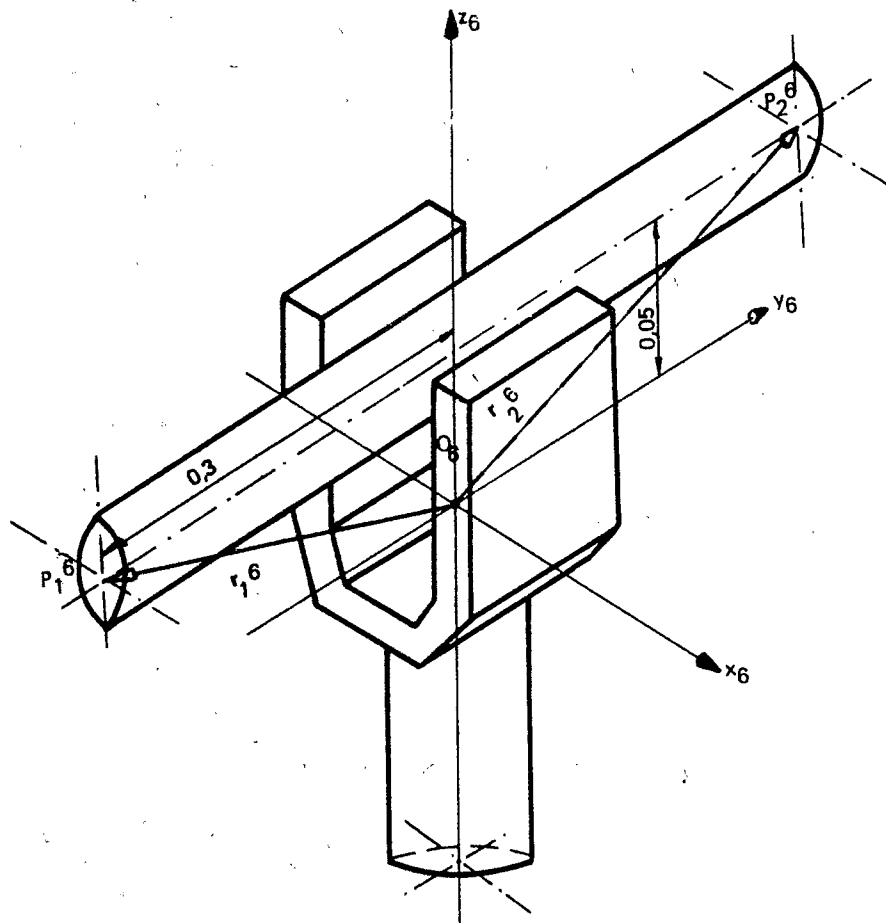
$0_0 0_1$	$0_1 0_1'$	$0_1' 0_2$	$0_2 0_3$	$0_3 0_4$	$0_5 0_6$
1 m	0,1 m	0,5 m	0,1 m	0,5 m	0,15 m

oraz komplet następujących parametrów kinematycznych

Tabela 3

i	θ_i	$\dot{\theta}_i$	$\ddot{\theta}_i$
1	0°	$10^\circ/s$	$0^\circ/s^2$
2	0°	$0^\circ/s$	$0^\circ/s^2$
3	120°	$-10^\circ/s$	$0^\circ/s^2$
4	-10°	$10^\circ/s$	$0^\circ/s^2$
5	-30°	$0^\circ/s$	$0^\circ/s^2$
6	0°	$-10^\circ/s$	$0^\circ/s^2$

Wektory wodzące punktów krańcowych pręta w układzie własnym chwytaka są następujące (rys. 7b):



Rys. 7b

$$r_1^6 = [0; -0,3; 0,05; 1]^T$$

$$r_2^6 = [0; 0,3; 0,05; 1]^T$$

przy czym przyjęto długość pręta $l_p = 0,6$ m i zamocowano go tak, że płaszczyzna $x_6 z_6$ jest płaszczyzną symetrii.

4.2. Wyniki obliczeń

Program obliczeniowy zapisany w języku TURBO-BASIC XL i uruchomiony na minikomputerze ATARI 130XE przyniósł następujące wyniki:

Tabela 4

Wielkość	Punkt P_1^6	Punkt P_2^6
x_0	-0.858226202 m	-0.806289393 m
y_0	0.27815773 m	-0.3127823684 m
z_0	0.9668768662 m	0.876919239 m
V_{x_0}	-0.0149019193 m/sek	0.0390690437 m/sek
V_{y_0}	0.115330766 m/sek	0.1400204484 m/sek
V_{z_0}	5.0927959E-03 m/sek	-0.1259360477 m/sek
a_{x_0}	5.9586471E-03 m/sek ²	0.0574251495 m/sek ²
a_{y_0}	-0.0192541095 m/sek ²	0.0108439503 m/sek ²
a_{z_0}	-0.0306963264 m/sek ²	0.0319090071 m/sek ²

4.3. Analiza wyników

Dysponując obliczeniami położenia i prędkości punktów P_1^6 i P_2^6 przeprowadzono następującą analizę. Z mechaniki ciała sztywnego wiadomo, że rzuty prędkości dowolnych punktów na kierunek łączącej je prostej muszą być sobie równe. Warunek ten, zapewniając brak względnych przemieszczeń tych punktów, świadczy o spełnieniu założeń ciała sztywnego [2].

Na rys. 8 układ współrzędnych $Ax y z$ został przyjęty tak, aby punkt A pokrywał się z punktem P_1^6 , natomiast jego osie były równoległe do odpowiednich osi układu nieruchomego $Oxyz$. Punkt C dobrany jest tak, aby leżał na osi x i aby kąt $B CA$ był kątem prostym. Uwzględniając wynikające z rysunku zależności geometryczne napisano krótki program obliczeniowy wyznaczający wartości sumy rzutów składowych wektorów prędkości dowolnej pary punktów na kierunek łączącej ich prostej.

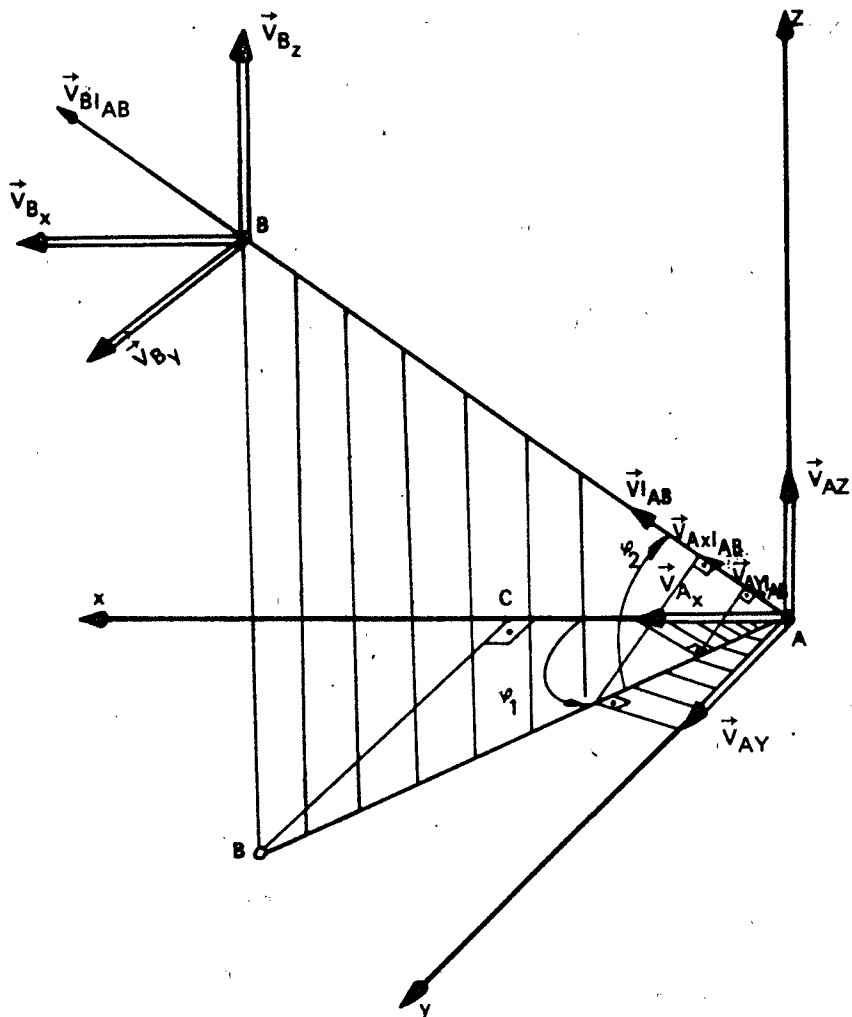
Dla badanej pary punktów P_1^6 i P_2^6 uzyskano odpowiednio:

$$V_{AB,P_1^6} = -0.1156427799 \text{ m/sek,}$$

$$V_{AB,P_2^6} = -0.1156427793 \text{ m/sek.}$$

co, uwzględniając nieuniknione błędy rachunkowe, jest oczywiście wynikiem zupełnie zadowalającym.

Przykładowo również dla ogniwa nr 3, dla punktów P_1^3 i P_2^3 zadanych przez określone poniżej wektory w układzie własnym ogniwa nr 3:



Rys. 8

$$r_1^3 = [0; 0; 0; 1]^T$$

$$r_2^3 = [0; 0; 0,2; 1]^T$$

otrzymano:

Wielkość	Punkt P ₁ ³	Punkt P ₂ ³
x_0	-0,5 m	-0.6732052904 m
y_0	0 m	0 m
z_0	1 m	0.90000037 m
v_{x_0}	0 m/sek	0.0173999368 m/sek
v_{y_0}	0.087 m/sek	0.1171377205 m/sek
v_{z_0}	0 m/sek	-0.0301377205 m/sek
v_{AB}	0 m/sek	1.E-09 m/sek

czyli również wynik zadowalający.

5. Wnioski

Zaproponowany algorytm jako uniwersalne i szybkie narzędzie analizy kinematyki robota może wchodzić w skład zestawu oprogramowania komputerowego wspomaganie procesu projektowania inżynierskiego. Może być używany do bezpośredniej analizy kinematyki robota, jak też. mieć zastosowanie do budowy innych algorytmów, w których potrzebna jest dokładna znajomość zależności kinematycznych.

Przykładowo może to być algorytm wizualizacji robota na stanowisku roboczym przy użyciu grafiki komputerowej, jak też algorytm badania dynamiki robota.

Literatura

- [1] Maryniak J.: Dynamiczna teoria obiektów ruchomych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr 32.
- [2] Pars L.A.: Analitičeskaja dinamika. Moskwa, Nauka 1971.
- [3] Szmelter J.: Metody komputerowe w mechanice, Warszawa, PWN 1980.
- [4] Andre P., Kofman J-P.: Konstruirovanie robotov. Moskwa Mir 1986.
- [5] Aristova M.V., Ignatiev M.B., Prokhorov V.M.: Algorithmic system for robot s motion simulation. [w]: Morecki A., Kędzior K.: Theory and practice of robots and manipulators, Warszawa, PWN 1977.
- [6] Denavit J., Hartenberg R.S.: A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices, Trans. ASME, vol 77.
- [7] Gorla B.: Influence of the control on the structure of a manipulator from a kinematic point of view. [w]: Morecki A., Bianchi B., Kędzior K.: 4 th Symposium on theory and practice of robots and manipulators. Warszawa, PWN 1983.

- [8] Liegeois A.: Performance and Computer-aided Design. [w monografii]: Robot Technology, Vol.7. London 1985 Kogan Page.
- [9] Liegeois A., Khalil W., Dumas J.M., Renaud M.: Mathematical and computer models of interconnected mechanical systems. [w]: Morecki A., Kędzior K.: Theory and practice of robots and manipulators. Warszawa, PWN 1977.
- [10] Paul R.P.: Robot manipulators: mathematics, programming, and control, The MIT Press Cambridge, Massachusetts and London.
- [11] Popov E.P., Vereščagin A.F., Zenkevič S.L.: Manipulacionnyje roboty. Dinamika i algoritmy. Moskwa, Nauka 1978.
- [12] Rzymkowski C.: Automatyczne modelowanie pewnej klasy manipulatorów, I Krajowa Konferencja Robotyki, Tom 2, Wrocław 1985.
- [13] Shimano B.E., Roth B.: Dimension synthesis of manipulators. [w]: Morecki A., Bianchi B., Kędzior K.: 3 rd Symposium on theory and practice of robots and manipulators. Warszawa, PWN 1977.