

*mgr inż. Jerzy MAŁECKI*  
*Przemysłowy Instytut Automatyki*  
*i Pomiarów MERA-PIAP*  
*Warszawa*

## WYZNACZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH DLA TRZECH STOPNI SWOBODY ROBOTA W RUCHU CHWYTAKA PO ZADANEJ TRAJEKTORII PRZESTRZENNEJ

*Do badania kinematyki robota o ruchu programowym chwytaka wykorzystano metodę przekształcania i całkowania równań więzów stosowaną do symulacji ruchu programowego samolotów [3].*

### 1. Wstęp

Położenie przestrzenne chwytaka zdefiniowane jest wystarczająco przez określenie:

- współrzędnych kartezjańskich początku układu własnego chwytaka względem nieruchomego układu odniesienia związanego ze środowiskiem pracy robota,
- orientacji kątowej układu chwytaka względem wspomnianego układu odniesienia.

W przypadku większości konstrukcji stopnie swobody robota wygodnie jest rozpatrywać dzieląc je na dwie grupy. Stopnie swobody należące do pierwszej, służą do uzyskania zadanego przestrzennego usytuowania charakterystycznego punktu chwytaka (nazywanego dalej punktem C), natomiast pozostałe wykorzystuje się do uzyskania żądanej orientacji kątowej chwytaka.

W procesie analizy własności kinematycznych robota interesującym jest znalezienie odpowiedzi na pytanie, jak zmieniają się w czasie współrzędne uogólnione decydujące o usytuowaniu przestrzennym punktu C, podczas gdy chwytak realizuje ruch po z góry zadanej trajektorii przestrzennej.

W wyniku przeprowadzenia tego typu obliczeń można uzyskać szereg informacji istotnych z praktycznego punktu widzenia, spośród których wymieniść można choćby:

ocenę możliwości realizacji przez robota zaplanowanych trajektorii w aspekcie osiągalnych przez silniki prędkości i przyspieszeń kątowych, oraz zakresów ruchliwości poszczególnych par kinematycznych,

przebiegi w czasie zmian poszczególnych współrzędnych, prędkości i przyspieszeń uogólnionych robota zapewniających realizację zaplanowanego ruchu programowego,

a w przypadku dodatkowego wykorzystania modelu dynamiki – możliwość wyznaczenia przebiegów momentów sterujących silnikami napędzających poszczególne stopnie swobody.

### 2. Budowa układu równań więzów programowych

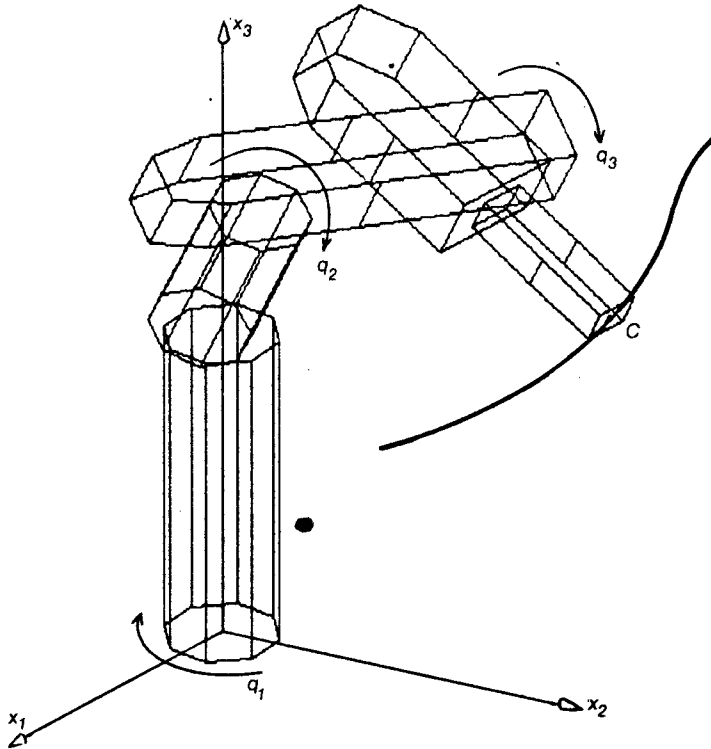
Trzy pierwsze stopnie swobody robota realizujące i określające przestrzenne położenie punktu C chwytaka oznaczone są zgodnie z rys. 1 jako:

$$\tilde{q} = \text{col} [ q_1, q_2, q_3 ] \quad /1/$$

W nieruchomym układzie odniesienia  $(x_1, x_2, x_3)$  położenie punktu C chwytaka określone jest przez trzy współrzędne kartezjańskie

$$\begin{cases} x_1^C = F_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2^C = F_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3^C = F_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad /2/$$

Zbiór punktów przestrzeni  $(x_1, x_2, x_3)$  wyznaczony przez kolejne położenia punktu C w trakcie realizacji ruchu programowego tworzy trajektorię ruchu. Trajektoria jest więc krzywą przestrzenną, która może być zapisana w postaci trzech równań parametrycznych postaci:



Rys. 1

$$\begin{cases} x_1^C = x_1^C(t), \\ x_2^C = x_2^C(t), \\ x_3^C = x_3^C(t) \end{cases} \quad /3/$$

lub też w sposób równoważny, w postaci układu dwóch równań skalarnych:

$$\begin{cases} P_1(x_1^C, x_2^C, x_3^C) = 0 \\ P_2(x_1^C, x_2^C, x_3^C) = 0 \end{cases} \quad /4/$$

Trajektoria ruchu zapisana w postaci powyższego związku może być interpretowana jako krzywa będąca miejscem geometrycznym przecięcia się powierzchni  $P_1$  i  $P_2$ .

Wraz z zadaniem trajektorii ruchu należy określić funkcję zmiany prędkości punktu C. Buduje się w tym celu równanie, które w formie ogólnej może być zapisane w postaci:

$$V(t, \dot{x}_1^C, \dot{x}_2^C, \dot{x}_3^C) = 0 \quad /5/$$

Obecnie sformułowany zostanie układ równań więzów programowych poprzez wyrażenie we współrzędnych uogólnionych związków /4/ i /5/.

Na podstawie /2/ równania trajektorii można zapisać jako:

$$\begin{cases} P_1(x_1^C(\tilde{q}), x_2^C(\tilde{q}), x_3^C(\tilde{q})) = 0 \\ P_2(x_1^C(\tilde{q}), x_2^C(\tilde{q}), x_3^C(\tilde{q})) = 0 \end{cases} \quad /6/$$

Podobnie równanie /5/ może być zapisane jako:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0. \quad /7/$$

Ostatecznie więc otrzymuje się układ równań ruchu programowego w postaci:

$$\begin{cases} \tilde{P}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} P_1(\tilde{q}) \\ P_2(\tilde{q}) \end{bmatrix} = \tilde{0} \\ V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0 \end{cases} \quad /8/$$

Pierwsze z równań układu /8/ stanowi zapis więzów geometrycznych a drugie odpowiednio więzów kinematycznych.

### 3. Metodyka rozwiązywania układu równań więzów programowych

W celu wyznaczenia z układu /8/ przebiegów w czasie współrzędnych uogólnionych  $\tilde{q}$  i prędkości uogólnionych  $\dot{\tilde{q}}$  należy najpierw dokonać pewnych przekształceń równań więzów geometrycznych i kinematycznych. Dokonać można tego w sposób następujący.

Najpierw dwukrotnie różniczkuje się równanie więzów geometrycznych

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{q}} \dot{\tilde{q}} = \tilde{0} \quad /9/$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \dot{\tilde{q}}} \right] \dot{\tilde{q}} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{q}} \ddot{\tilde{q}} = \tilde{0} \quad /10/$$

Z kolei jednokrotnie różniczkuje się równanie więzu kinematycznego

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{\tilde{q}}} \dot{\tilde{q}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{q}} \ddot{\tilde{q}} + \frac{dV}{dt} = 0 \quad /11/$$

Otrzymuje się w wyniku tego układ trzech równań różniczkowych rzędu drugiego, który można scałkować po sprowadzeniu go do postaci normalnej

$$\ddot{\tilde{q}} = \tilde{W}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \quad /12/$$

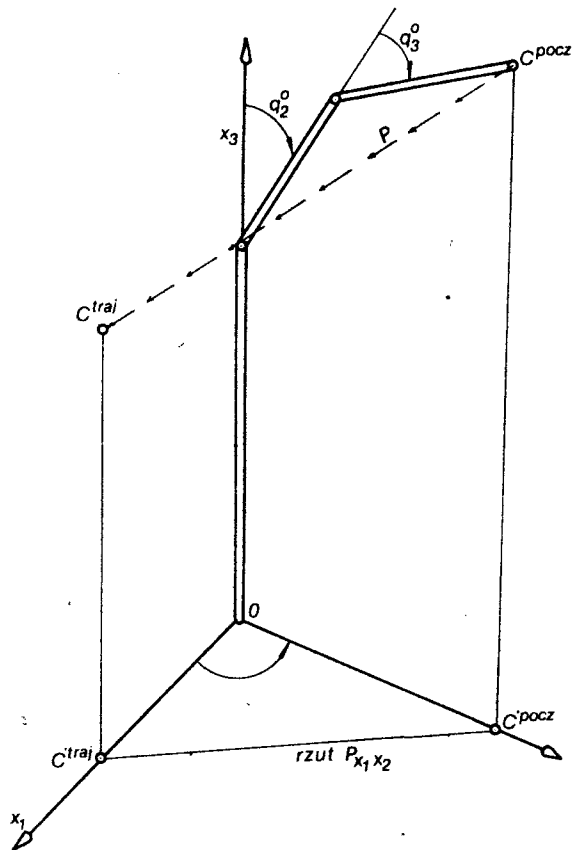
Postępowanie to zostanie zilustrowane poniżej w przykładzie liczbowym.

#### 4. Przykład liczbowy

##### 4.1. Równania więzów – sformułowania i przekształcenia

Dla ilustracji powyższych wyprowadzeń rozwiązano następujący przykład liczbowy.

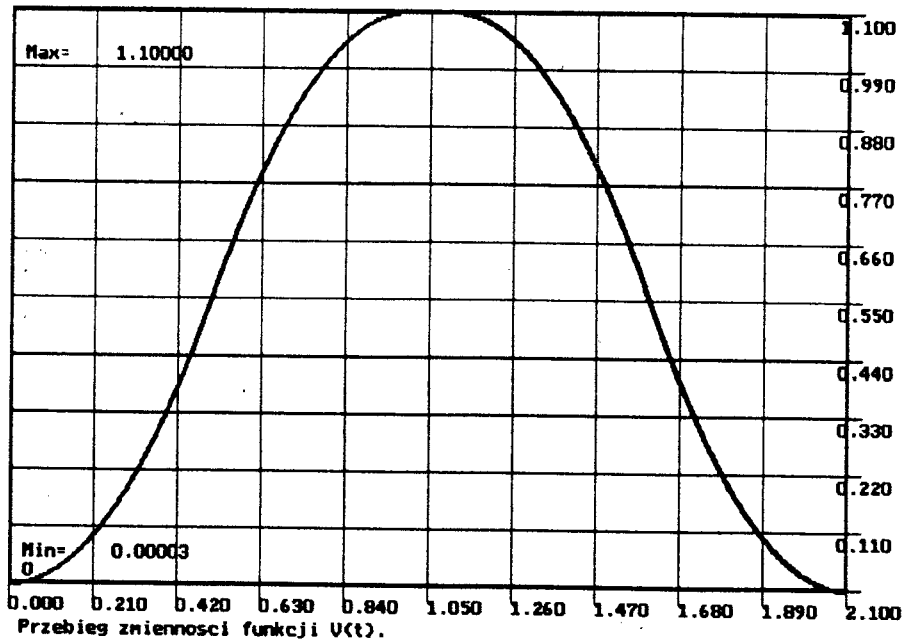
Dla konstrukcji, jak na rys. 2, należy znaleźć przebiegi współrzędnych i prędkości uogólnionych zapewniających realizację ruchu chwytaka po prostej łączącej punkt początkowego położenia chwytaka zdefiniowanego przez komplet współrzędnych uogólnionych



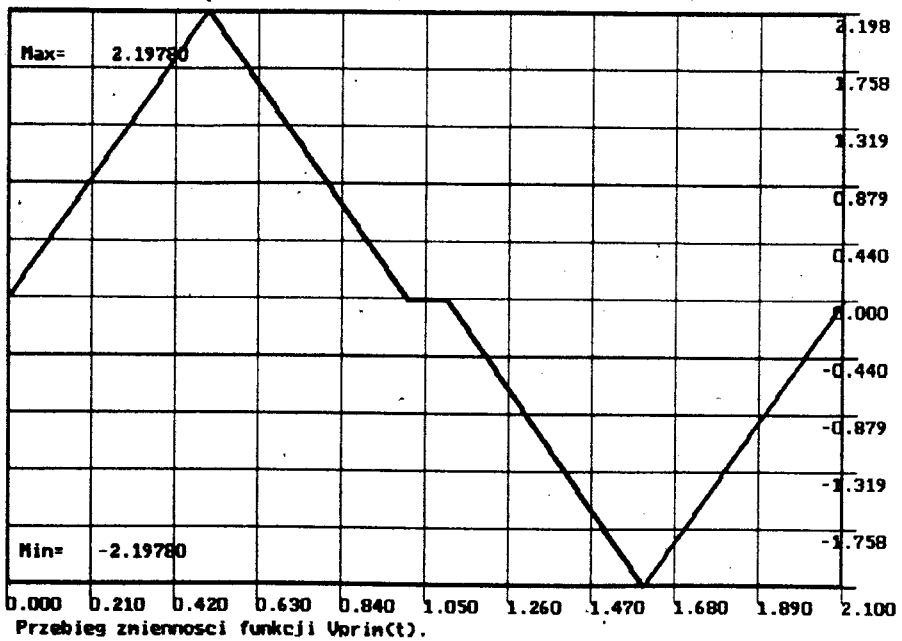
Rys. 2.

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ \\ 30^\circ \\ 30^\circ \end{bmatrix}$$

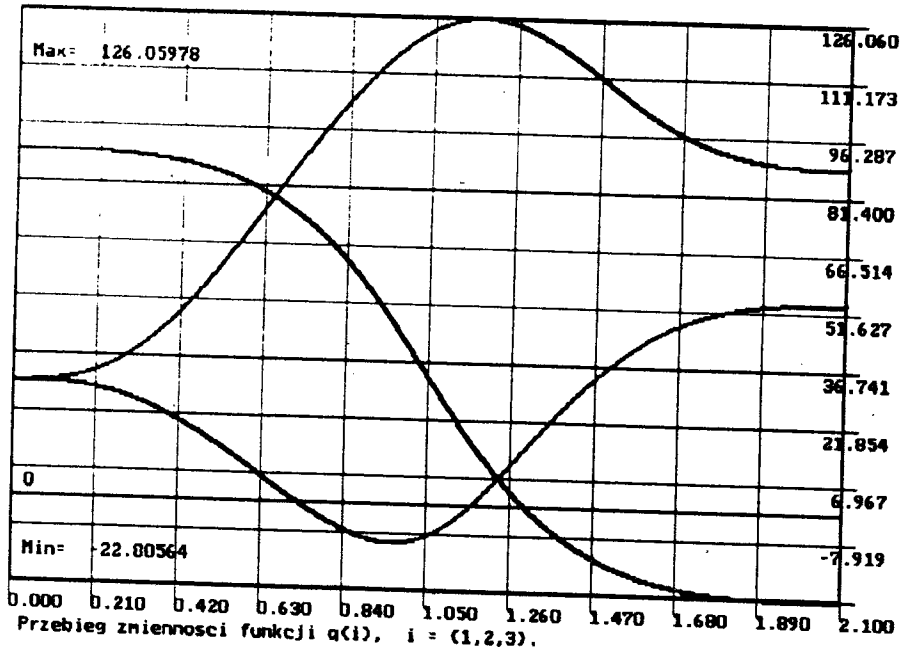
czyli punkt  $C^{pocz}$  o współrzędnych



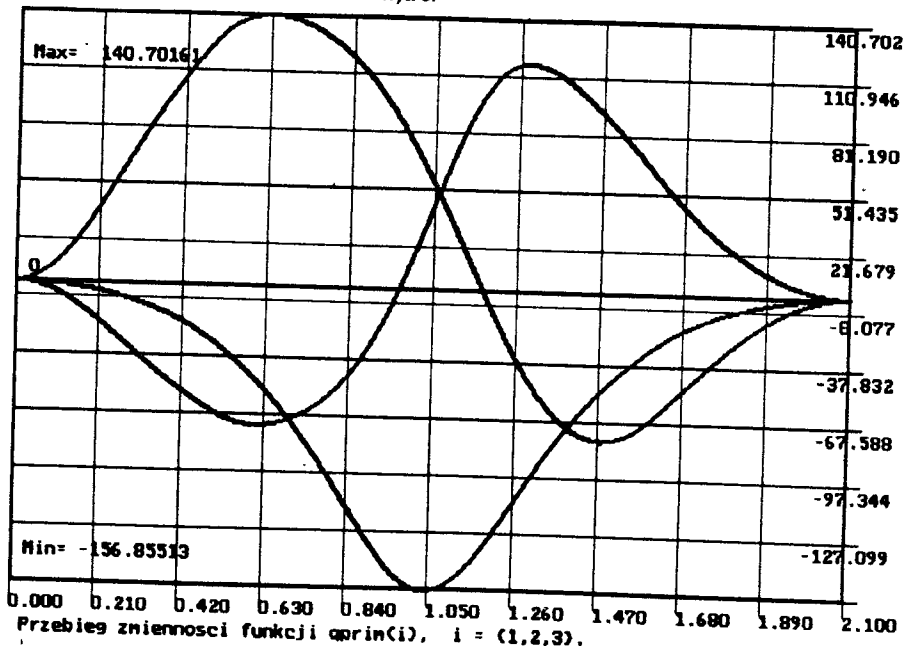
Rys. 3



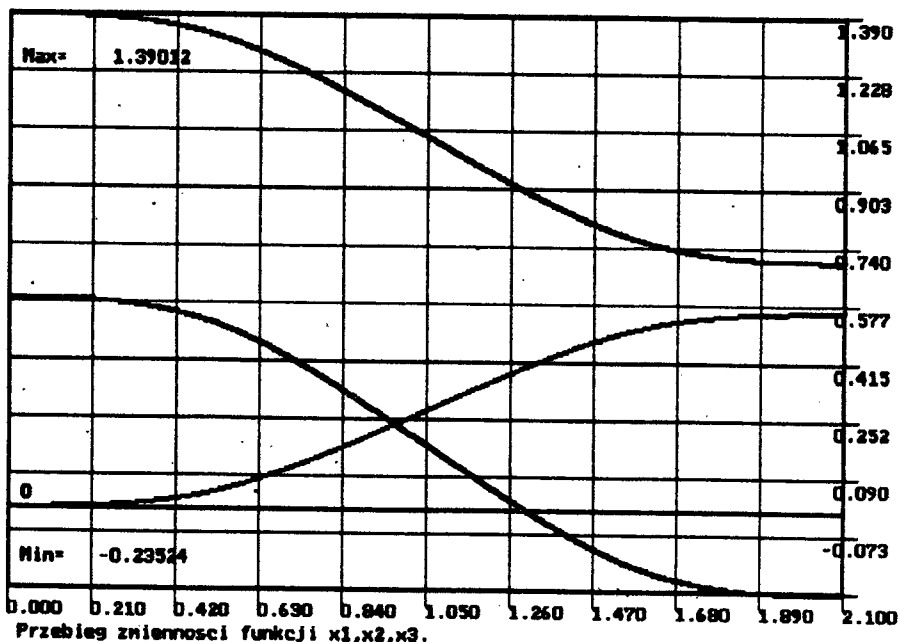
Rys. 4



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7

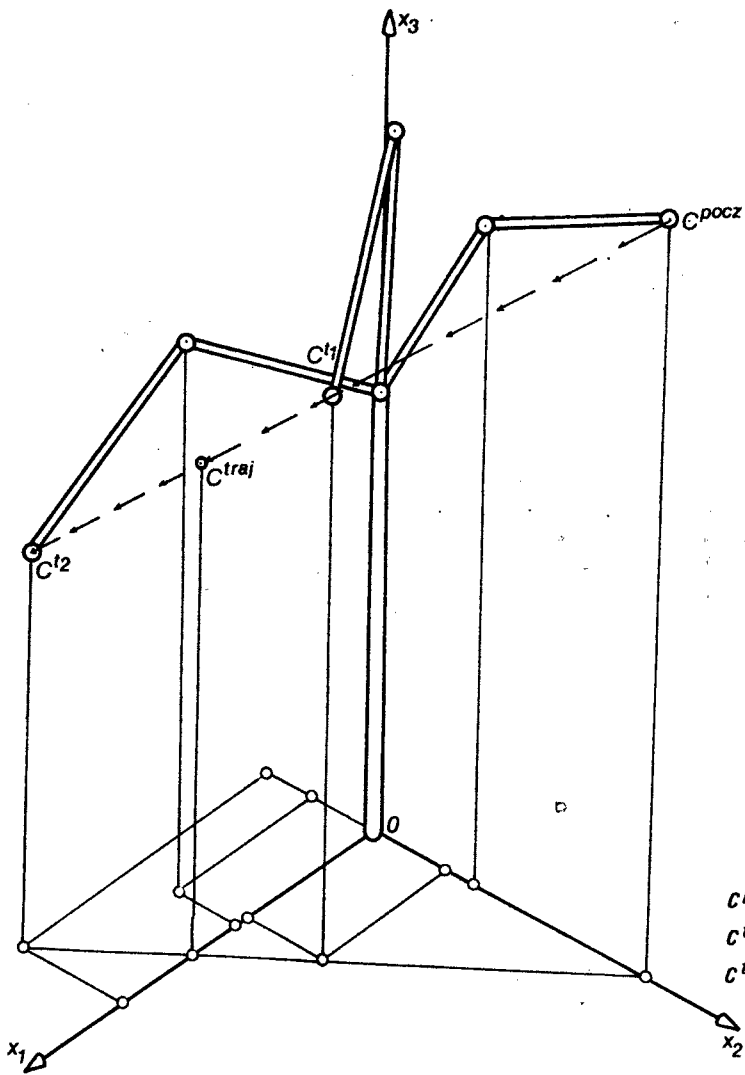
$$\tilde{x}_c^{\text{pocz}} = \begin{bmatrix} 0.00 \text{ [m]} \\ 0.59 \text{ [m]} \\ 1.39 \text{ [m]} \end{bmatrix} \quad /13/$$

z punktem  $C^{\text{traj}}$  o współrzędnych

$$\tilde{x}_c^{\text{traj}} = \begin{bmatrix} 0.40 \text{ [m]} \\ 0.00 \text{ [m]} \\ 0.90 \text{ [m]} \end{bmatrix} \quad /14/$$

przy czym funkcje zmian prędkości i przyspieszenia należy przyjąć jak na rys. 3 i rys. 4. Analityczne związki opisujące prędkość i przyspieszenie punktu C są następujące:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < t < t_1 : V(t) = at^2; \quad V_{\text{prim}}(t) = 2at; \\ t_1 < t < t_2 : V(t) = -a(t-t_2)^2 + V_{\text{max}}; \quad V_{\text{prim}}(t) = -2a(t-t_2); \\ t_2 < t < t_3 : V(t) = V_{\text{max}}; \quad V_{\text{prim}}(t) = 0; \\ t_3 < t < t_4 : V(t) = -a(t-t_3)^2 + V_{\text{max}}; \quad V_{\text{prim}}(t) = -2a(t-t_3); \\ t_4 < t < t_5 : V(t) = a(t-t_5)^2; \quad V_{\text{prim}}(t) = 2a(t-t_5); \\ t_5 < t : V(t) = V_{\text{prim}}(t) = 0 \end{array} \right. \quad /15/$$



Rys. 8.

Gdy, zgodnie z założeniem, trajektorią jest prosta przestrzenna, równanie /4/ przybiera postać

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0 \end{cases} \quad /16/$$

W wyniku pierwszego różniczkowania otrzymuje się

$$\begin{cases} A_1\dot{x}_1 + B_1\dot{x}_2 + C_1\dot{x}_3 = 0 \\ A_2\dot{x}_1 + B_2\dot{x}_2 + C_2\dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad /17/$$

Wprowadzając oznaczenia



$$\tilde{P}_i = [A_i, B_i, C_i] ; \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad /18/$$

można zapisać /17/ jako

$$\tilde{P}_i \tilde{x} = 0, \quad i = 1, 2. \quad /19/$$

Wektor  $\tilde{x}$  związany jest ze współzrędnymi uogólnionymi przez poniższe związki:

$$\begin{cases} x_1 = c_1(L_2 s_2 + L_3 s_2 s_3) \\ x_2 = s_1(L_2 s_2 + L_3 s_2 s_3) \\ x_3 = L_1 + L_2 c_2 + L_3 c_2 s_3 \end{cases} \quad /20/$$

Przy czym stosowano następujące oznaczenia

$$\begin{cases} s_k = \sin(q_k), & c_k = \cos(q_k), \\ s_{nm} = \sin(q_n + q_m), & c_{nm} = \cos(q_n + q_m). \end{cases} \quad /21/$$

Następnie obliczając pochodną wektora  $\tilde{x}$  otrzymano

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{Q} \dot{q}. \quad /22/$$

przy czym składowe macierzy  $\tilde{Q}$  są następujące

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -s_1(L_2 s_2 + L_3 s_2 s_3) & c_1(L_2 c_2 + L_3 c_2 s_3) & L_3 c_1 c_2 s_3 \\ c_1(L_2 s_2 + L_3 s_2 s_3) & s_1(L_2 c_2 + L_3 c_2 s_3) & L_3 s_1 c_2 s_3 \\ 0 & -L_2 s_2 - L_3 s_2 s_3 & -L_3 s_2 s_3 \end{bmatrix} \quad /23/$$

Różniczkując dalej /19/ otrzymuje się

$$\frac{d}{dt} |\tilde{P}_i| \tilde{x} + \tilde{P}_i \dot{\tilde{x}} = 0 \quad /24/$$

Zgodnie z /22/ jest

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{Q}} \dot{q} + \tilde{Q} \ddot{q}. \quad /25/$$

a więc /24/ przyjmuje postać

$$\tilde{P}_i (\dot{\tilde{Q}} \dot{q} + \tilde{Q} \ddot{q}) = 0 \quad i = 1, 2. \quad /26/$$

Oznaczając

$$\tilde{L} = \tilde{Q} \dot{q} \quad /27/$$

otrzymuje się /26/ w postaci

$$(\dot{\tilde{Q}} \dot{q} + \tilde{L})^T \tilde{P}_i^T = 0, \quad i = 1, 2. \quad /28/$$

lub

$$\begin{cases} \dot{q}_1^T \dot{\tilde{Q}}^T \tilde{P}_1^T + \tilde{L}^T \tilde{P}_1^T = 0 \\ \dot{q}_2^T \dot{\tilde{Q}}^T \tilde{P}_2^T + \tilde{L}^T \tilde{P}_2^T = 0 \end{cases} \quad /29/$$

Z kolei równanie więzu kinematycznego (warunek na kwadrat prędkości) można zapisać jako

$$\dot{V}_c^2(t) - (\dot{\tilde{x}})^T \dot{\tilde{x}} = 0 \quad /30/$$

Dokonując jednokrotnego różniczkowania otrzymuje się

$$(\dot{\tilde{x}})^T \dot{\tilde{Q}} \dot{q} + (\dot{\tilde{x}})^T \tilde{L} - V_c(t) \dot{V}_c(t) = 0 \quad /31/$$

Korzystając z /29/ i /31/ można zapisać przekształcony układ więzów programowych w postaci

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T \\ (\dot{\tilde{x}})^T \tilde{Q} \end{bmatrix} \ddot{\tilde{q}} + \begin{bmatrix} (\tilde{L})^T (\tilde{P})_1^T \\ (\tilde{L})^T (\tilde{P})_2^T \\ (\dot{\tilde{x}})^T \tilde{L} - V_c \dot{V}_c \end{bmatrix} = \tilde{0} \quad /32/$$

gdzie

$$\tilde{F}_i = (\tilde{Q})^T (\tilde{P})_i^T \quad /33/$$

W tym wypadku wektor  $\tilde{W}$  określony przez /12/ ma postać

$$\tilde{W} = - \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T \\ (\dot{\tilde{x}})^T \tilde{Q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{L})^T (\tilde{P})_1^T \\ (\tilde{L})^T (\tilde{P})_2^T \\ (\dot{\tilde{x}})^T \tilde{L} - V_c \dot{V}_c \end{bmatrix} \quad /34/$$

#### 4.2. Przedstawienie wyników obliczeń

Całkowania układu /32/ dokonano przy użyciu metody Rungego-Kutty, po sprowadzeniu go do układu sześciu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego przedstawionych w postaci normalnej.

Wykresy przedstawiające przebiegi  $\tilde{q}$  (rys. 5),  $\dot{\tilde{q}}$  (rys. 6),  $\tilde{x}$  (rys. 7),  $V_c(t)$  (rys. 3) i  $\dot{V}_c(t)$  (rys. 4) wykonano zapisując wyniki obliczeń w postaci zbiorów dyskowych i następnie korzystając z własnego programu WYKRES.

Zbiory dyskowe wyników zakładano dla każdej ze zmiennych tak, aby zawierały one po 600 punktów dyskretyzacji wybranych równomiernie na skali czasu przedziału całkowania. W ten sposób wykorzystano rozdzielczość monitora i uniknięto konieczności łączenia punktów poszczególnych krzywych wykresów.

Na rys. 8 przedstawiono wybrane konfiguracje robota dla wybranych czasów: 0,0, 1,05, 1,75 [sek]. Geometria robota określona jest przez  $L_1 = 0,8$  [m],  $L_2 = 0,432$  [m],  $L_3 = 0,432$  [m].

#### 5. Uwagi końcowe

I. Współrzędne punktu  $C^{pocz}$  wyznaczono na podstawie zadanego wektora współrzędnych uogólnionych. Gdyby zadanie sformułowano tak, że podane są jedynie współrzędne kartezjańskie tego punktu, należałoby wyznaczyć współrzędne uogólnione przez rozwiązanie zadania kinematycznego odwrotnego. Można to uczynić znanymi metodami opartymi choćby na analizie związków trygonometrycznych, łatwiej jednak wykorzystać metodę zaproponowaną w tej pracy. Wystarczy bowiem:

- obrać dowolny zestaw współrzędnych uogólnionych,
- na tej podstawie znaleźć położenie „wyjściowe” punktu C,
- napisać równanie trajektorii łączącej ten punkt z punktem  $C^{pocz}$ , dla którego konfiguracja robota jest poszukiwana.
- założyć dowolny niezerowy przebieg prędkości i scałkować układ więzów programowych, przy czym rozwiązanie otrzymuje się w momencie pokrycia się punktu  $C^{chwil}$  z punktem  $C^{pocz}$ .

II. Odnośnie związków analitycznych /6/, /7/ opisujących równania więzów należy założyć dla równania /6/ spełnienie warunku przynależności do klasy  $C^2$ , a dla równania /7/ odpowiednio klasy  $C^1$ .

## Literatura

- [1] Galilullin A. S.: Metody rešenja obratnykh zadač dinamiki. Moskwa, Nauka, 1986.
- [2] Gutowski R.: Mechanika analityczna. Warszawa, PWN, 1971.
- [3] Ogólny model symulacji samolotu. Etap III/1: Model matematyczny lotu samolotu w stanach nieustalonych, figury akrobatyczne – ruch programowy: Część I – Ruch samolotu z więzami programowymi. Część II – Programowy przestrzenny krzywoliniowy ruch samolotu. [opracowanie W. Blajer, J. Parczewski], Politechnika Warszawska, Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, Zespół Naukowo-Badawczy Dynamiki Obiektów Ruchomych. Sprawozdanie nr 147/86.