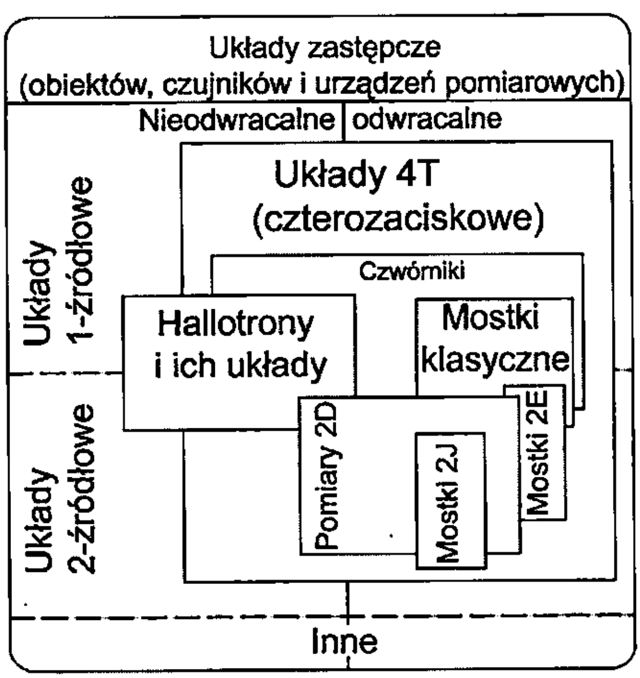
Wstęp

W pracy przedstawiono jednolite podstawy teoretyczne oraz opis właściwości metrologicznych niekonwencjonalnych rozwiązań immitancyjnych układów wstępnego kondycjonowania sygnałów w pomiarach pośrednich dwu i większej liczby parametrów ze sobą skojarzonych. Sygnały takie występują zarówno na wyjściach wieloparametrowych obiektów badanych, jak i w układach wejściowych inteligentnych przyrządów i systemów pomiarowych zawierających czujniki immitancyjne. Dla większości z nich jako modele można stosować schematy zastępcze w postaci układów SLS (skupionych, liniowych, stacjonarnych) odwracalnych i nieodwracalnych o zmiennych immitancjach wewnętrznych, ogólnie z n końcówkami, czyli n-biegunników (nT). Układy modeluje się schematem zastępczym o znanej lub zakładanej strukturze wewnętrznej. Zmiany ich parametrów wewnętrznych mogą być całkowicie niezależne, jak i ze sobą skojarzone poprzez wpływy jednej lub kilku wielkości zewnętrznych oddziałujących na nie równocześnie oraz różnie w czasie i w przestrzeni oraz wskutek odwracalnych i nieodwracalnych procesów wewnętrznych, np. grzania własnego, pól magnetycznych od prądów, zmian starzeniowych itp. Jeśli ponadto układy te są nierozłączalne i o niedostępnym wnętrzu, to zmiany składowych ich immitancji wewnętrznych można wyznaczyć tylko pośrednio - poprzez pomiary związanych z nimi prawami Kirchoffa parametrów na zewnętrznie dostępnych końcówkach (zaciskach). Zadania pomiarowe mogą obejmować identyfikację ilościowych zmian kilku parametrów wewnętrznych układu elektrycznego (badania i monitoring obiektów, diagnostyka parametryczna), sprawdzenie funkcji wiążących poszczególne parametry z oddziałującymi na nie wielkościami elektrycznymi bądź nieelektrycznymi oraz wyznaczenie tych wielkości na podstawie przekształceń odwrotnych. W wielu układach mostkowych trzeba mierzyć zmiany parametrów na zaciskach spowodowane równoczesnymi przyrostami kilku immitancji wewnętrznych, np. przy stosowaniu czujników nieselektywnych o parametrach zależnych od jednej lub kilku wielkości równocześnie oraz przy badaniu lub diagnostyce wnętrza układów z czterech zacisków (4T), bądź ośrodków ciągłych, obiektów technicznych i próbek materiału odpowiednio rozmieszczonymi czteroma elektrodami.

Jednolite i uogólnione ujęcie powyższych problemów z metrologicznego punktu widzenia nie występowało dotąd w literaturze. Celem niniejszej pracy, obok stworzenia takiego ujęcia, było opracowanie nowych możliwości równoczesnych pomiarów dwu (2D) i więcej skojarzonych ze sobą parametrów poprzez przystosowanie do tego celu klasycznych mostkowych układów pomiarowych i zaproponowanie nowych ich rozwiązań.

Niniejsza monografia w dużym stopniu jest syntezą krajowych i międzynarodowych publikacji autora, opracowanych w większości w ostatnich kilku latach [27-48]. Jedynie rozdział 6 - o schematach zastępczych hallotronów, stanowi uaktualnioną wersję wcześniej opracowanego przez autora rozdziału 6 z monografii Technika hallotronowa [26], w kilku rozdziałach której podsumował on badania własne i wspólne (w tym z wypromowanym przez niego doktorem) dotyczące zastosowań hallotronów w pomiarach i konstrukcji unikalnej aparatury hallotronowej.

Szczegółowe rozważania przeprowadza się w pracy na reprezentatywnym przykładzie układu o dowolnie zmiennych parametrach wewnętrznych, którego cztery końcówki są wyodrębnione jako zaciski zewnętrzne, czyli jako 4-biegunnika nazywanego tu akronimem: układ 4T (skrót ang. Four Terminals). Omawia się jego zastosowania do równoczesnych pomiarów dwu (2D) i większej liczby parametrów. Prądy płynące z zewnątrz przez trzy zaciski takiego układu mogą być dowolne, czwarty zaś wynika już z prądowego prawa Kirchoffa. Wzajemne relacje układów omawianych w monografii i pomiarów dwuparametrowych (2D) przedstawia rysunek.



Poniżej zostanie zarysowana treść poszczególnych rozdziałów.

Rozdział 1 wprowadza w istotę problematyki i jej zakres oraz przedstawia metody wybrane do rozwiązywania dalszych zagadnień. Aby rozważaniami opisowymi zbytnio nie obciążać zasadniczej treści, kontynuację wprowadzających punktów 1.1- 1.3 przeniesiono do Dodatku 1. Omawia się w nim współczesne zadania pomiarów impedancyjnych, specyfikę układów wstępnego kondycjonowania sygnałów oraz podaje zarys wcześniejszych polskich prac w dziedzinie mostkowych układów pomiarowych i ich modyfikacji stosowanych w teslomierzach i przetwornikach hallotronowych.

Jako podstawę opisu pośrednich pomiarów parametrów skojarzonych układu nT i wielkości na nie wpływających, zaproponowano podział macierzy admitancyjnej Y lub impedancyjnej Z dowolnego bezźródłowego liniowego układu nieodwracalnego na dwie macierze, które ujmują część odwracalną - pasywną i część antyodwracalną tego układu. Podstawowym schematem zastępczym odwracalnego układu 4T jest czworobok zupełny, czyli czteroramienny mostek z przekątnymi. Nieodwracalny układ 4T zawiera ponadto 1-3 żyratorów. Jego przykładem jest schemat zastępczy hallotronu 4T zawierający jeden żyrator. Podano też równania dla różnych rodzajów współpracy układu 4T z dołączanymi doń obwodami, w szczególności jako czwórnika oraz układu pomiarowego o dwuprądowym zasilaniu i dwu wyjściach napięciowych. Zestawiono możliwe kombinacje zmian rezystancji mostka czteroramiennego (4R), które mogą występować w pomiarach dwuparametrowych (2D). Jako wprowadzenie w zagadnienie tych pomiarów porównano wstępnie podstawowe właściwości niezrównoważonych mostków klasycznych i zaproponowanych przez autora mostków dwuwyjściowych, które zasila się niekonwencjonalnie - z dwu źródeł prądowych dołączanych równolegle do ramion przeciwległych.

W następnych czterech rozdziałach szczegółowo analizuje się właściwości metrologiczne odwracalnego układu 4T przy różnie zmieniających się parametrach wewnętrznych i różnym zasilaniu ze źródeł prądu stałego oraz omawia się ich zastosowania w równoczesnych pomiarach dwu (2D) i więcej parametrów. W szczególności, w rozdziale 2 opisano pracę odwracalnego rezystancyjnego układu 4T jako czwórnika. Jego schematem zastępczym jest czwórnik typu X, czyli czteroramienny mostek niezrównoważony oznaczany tu symbolem 4R. Podano wzory dla parametrów roboczych na zaciskach jego wrót wejściowych i wyjściowych w funkcji bezwzględnych i względnych zmian rezystancji ramion od stanu równowagi. Przedstawiono też kilka nieznanych dotąd zależności w mostkach klasycznych, w tym ogólny opis zmian parametrów dowolnego mostka jako czwórnika w funkcji względnych wartości i przyrostów elementów jego macierzy impedancyjnej od stanu równowagi, rozszerzenie warunku równowagi o iloczyn rezystancji wejściowej i wyjściowej oraz ogólne warunki linearyzacji przebiegu zmian parametrów zewnętrznych układu. Podano też schemat zastępczy mostka niezrównoważonego w postaci czwórnika 2T, który zachowuje potencjały jego zacisków [1]. Te nowe ujęcia wykorzystano następnie w rozdziale 4 do omówienia niekonwencjonalnych zastosowań mostków klasycznych w pomiarach dwuparametrowych (2D), w tym w układzie dwu mostków połączonych kaskadowo (mostek w mostku). Zaś w rozdziale 8 (punkty 8.1 – 8.8) podano szczegółowe opisy miar dokładności tych mostków w pomiarach kilkuparametrowych.

Rozdziały 3, 5, 7 i punkty 8.9 - 8.10 zawierają omówienie podstawowych zależności i właściwości metrologicznych nowej rodziny układów pomiarowych 4T, nazwanych mostkami dwuprądowymi i analizę możliwości ich zastosowań w równoczesnych pomiarach dwu (2D) i więcej parametrów. Układy te zasila się niekonwencjonalnie z jednego przełączanego lub z dwu jednakowych źródeł prądowych dołączanych równolegle do ramion przeciwległych mostka. Są to układy o dwu wyjściach – z obu przekątnych i o dwu warunkach równowagi, odmiennych niż dla mostków klasycznych – w postaci równości iloczynu impedancji ramion przyległych do zacisków danego wyjścia. Te niestosowane dotąd w praktyce układy pomiarowe stwarzają wiele zupełnie nowych możliwości przy ich wykorzystaniu na wejściach torów immitancyjnych wieloparametrowych inteligentnych systemów, przetworników i przyrządów pomiarowych, zarówno przy prądzie stałym, jak i przemiennym. W szczególności rozdział 3 poświęcono szczegółowemu opisowi zależności parametrów zewnętrznych dwuprądowych mostków rezystancyjnych 4R przy dowolnie zmiennych rezystancjach ramion i dwu wyjściach. Podano też ich dualne odpowiedniki, zasilane z dwu źródeł napięciowych. Zaś w rozdziale 5 omówiono zastosowania mostków dwuprądowych w pomiarach dwu, trzech i czterech parametrów przy prądzie stałym.

Przykłady kilku innych rozwiązań układów dwuprądowych przedstawiono w rozdziale 7, w tym układ aktywny z samorównoważącym się mostkiem (DC) o wyjściu prądowym z przesuniętym początkiem zakresu oraz dwuprądowe mostki RC i RC-R prądu przemiennego (AC). Przedstawiono je na tle mostków de Sautego, zazwyczaj zwanych szeregowymi mostkami Wiena. Przy dwu równoważeniach umożliwiają one pomiary trzech spośród składowych impedancji ramion pojedynczego układu mostkowego.

W rozdziale 6 rozpatruje się bardzo gruntownie, wraz ze zjawiskami pasożytniczymi, układ nieodwracalnego czujnika 4T na przykładzie schematów zastępczych hallotronów.

---

[1] Uogólnione ujęcie właściwości mostków niezrównoważonych podane w tym rozdziale, jako oryginalne, zostało w całości zaakceptowane do najnowszego, przewidywanego też do udostępnienia w Internecie, anglojęzycznego międzynarodowego poradnika budowy systemów pomiarowych wydawnictwa J. Wiley & Sons [46, 47].

W rozdziale 8 wyznaczono miary niedokładności dla obu rodzajów mostkowych układów rezystancyjnych 4T o zmiennych parametrach wewnętrznych i dla kilku przykładów ich zastosowania w pomiarach dwuparametrowych.

W rozdziale 9 dokonuje się krótkiego podsumowania pracy i wytycza się kierunki dalszych działań. Opisano też badania z zakresu mostków dwuprądowych prowadzone przez inne osoby, a zainspirowane publikacjami autora oraz scharakteryzowano szczegółowo najważniejsze wnioski.

Bibliografia obejmuje 84 pozycje i składa się z dwu części. Część B1 - *Literatura podstawowa*, jest bezpośrednio związana z tematyką monografii i obok literatury podstawowej o mostkach podanej według kolejności opublikowania, zawiera też 21 oryginalnych prac autora o właściwościach mostków klasycznych jako czwórników i o mostkach dwuprądowych oraz ich zastosowaniach w pomiarach kilkuparametrowych. Część B2 – *Literatura uzupełniająca*, dzieli się na: B2.1 – *Zestawienie wybranych wcześniejszych polskich prac o mostkach* oraz B2.2 – *Podstawowe pozycje książkowe z teorii obwodów* związane z tematyką pracy.

Pracę uzupełnia omówiony już Dodatek 1. Na końcu zamieszczono spis treści w języku angielskim i abstract.

Zagadnienia zawarte w pracy dotyczą pozyskiwania i wstępnego kształtowania sygnałów pomiarowych w układach immitancyjnych 4T oraz stanowią podstawę do rozwiązywania problemów odwrotnych – rekonstrukcji wielkości mierzonych (lub ogólniej – mesurandów) na podstawie tych sygnałów. Obejmuje to w równej mierze autonomiczne pomiary parametrów wewnętrznych schematu zastępczego układów elektrycznych z ich zacisków, jak i czujnikowe układy wejściowe przetworników i systemów pomiarowych. Są to w większości zagadnienia z obszaru modelowania matematycznego czujników, układów i urządzeń pomiarowych, służące etapowi pierwszemu tworzenia modelu, nazywanemu „identyfikacją strukturalną modelu"[2] z trudną w praktyce koniecznością uwzględnienia jego właściwości metrologicznych, w tym miar niedokładności. Niniejsze opracowanie opiera się na długoletnim doświadczeniu piszącego te słowa w identyfikacji i metodach doskonalenia takich właściwości, zdobytym przy opracowywaniu i stosowaniu wielu nowych urządzeń pomiarowych i diagnostycznych, w tym zawierających też układy mostkowe i hallotrony.

Tematyka pracy nie była dotąd ujmowana w literaturze w taki syntetyczny i uogólniony sposób. Jest ona szczególnie aktualna ze względu na

[2] Warto tu zacytować opinię polskiego przedstawiciela w IMEKO prof. Romana Morawskiego podaną w pracy [83] *„etap ten ... jest o tyle trudny, gdyż jego realizacja w większym stopniu opiera się na intuicji, doświadczeniu i innych umiejętnościach typu heurystycznego..."*.

ogromne możliwości aplikacyjne, jakie dla realizacji coraz powszechniejszych pośrednich pomiarów wieloparametrowych stwarza współcześnie technologia elektroniczna, umożliwiając stosowanie wielobitowych przetworników analogowo-cyfrowych AD, źródeł zasilających o dużej stabilności, przetworników cyfrowego przetwarzania sygnałów DSP, układów mikroprocesorowych MEMS wyposażonych w pamięci i inteligencję (odpowiednie oprogramowanie) oraz wielu opracowanych algorytmów przetwarzania sygnałów zarówno deterministycznych, jak i losowych, w tym opartych na sieciach neuronowych i zbiorach rozmytych. Aby jednak można było w pełni te możliwości wykorzystywać do tworzenia sprzętowej i wirtualnej aparatury pomiarowej, trzeba dysponować odpowiednio wiarogodnymi sygnałami, otrzymywanymi z układów wstępnego kondycjonowania występujących na początku torów pomiarowych. Wymaga to zarówno dysponowania szczegółowym jednolitym opisem modeli matematycznych i właściwości metrologicznych wieloparametrowych obiektów pomiarowych, jak i opracowania układów odpowiednich do kondycjonowania sygnałów pochodzących od skojarzonych ze sobą parametrów wielokońcówkowych immitancyjnych czujników i ich zespołów, coraz bardziej rozpowszechnionych w zastosowaniach. Próbę odpowiedzi na dużą część tego zapotrzebowania, w zamyśle autora, ma zawierać niniejsza praca.

1. GENEZA TEMATYKI PRACY I ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

1.1. Wprowadzenie

W dotychczasowych, prostych oraz inteligentnych przetwornikach, przyrządach i systemach do pomiarów wieloparametrowych dominują rozwiązania zawierające tory przetwarzające selektywną informację pomiarową o pojedynczych wielkościach. Wpływy innych wielkości minimalizuje się na drodze konstrukcyjnej i układowej. Przy pomiarach pośrednich często występują mesurandy w postaci parametrów ze sobą sprzężonych zarówno w obiekcie badanym, jak i w układzie pomiarowym wskutek oddziaływania wielkości wpływających równocześnie na te parametry i związków wynikających z praw Kirchoffa. Rzeczywiste obiekty, czujniki i układy pomiarowe są rozciągłe przestrzennie oraz zazwyczaj dostępne z zewnątrz tylko w określonych punktach pomiarowych lub na zaciskach. Dla wielu wielkości oddziałujących w postaci pól o różnych rozkładach przestrzennych oraz dla niejednorodnych rozkładów właściwości obiektów i czujników pomiarowych, na ich zaciskach wyjściowych można otrzymać ten sam zbiór parametrów wyjściowych niosących informację użyteczną, a więc i te same sygnały wyjściowe. Zazwyczaj nie ma możliwości, aby w sposób wystarczający dla celów metrologicznych opisać lub wytworzyć eksperymentalnie różne warianty takich rozkładów, które mogą wystąpić w praktyce, nawet tylko dla zagadnień statycznych, tak aby było możliwe odtworzenie ich po stronie cyfrowej z wymaganą dokładnością. Dla pól równomiernych oraz liniowych obiektów i czujników o liniowej charakterystyce, jednorodnych lub punktowych, zależności stają się jednoznaczne. W innych wypadkach określa się parametry i oddziaływania uśrednione oraz ich niepewności. Do opisu stosuje się zwykle modele uproszczone – o parametrach skupionych zarówno deterministyczne o znanej lub zastępczej strukturze, jak i uzyskiwane poprzez uczenie sieci neuronowych. Ponadto, w niektórych zadaniach pomiarowych np. w diagnostyce, sygnały wielkości mierzonych bywają znacznie mniejsze od niepożądanych wpływów innych wielkości. Istotną więc rolę mają tu nadal te wejściowe układy analogowe kondycjonowania sygnałów, które nie przekazują dalej niepożądanej lub nadmiarowej informacji. Taką rolę pełnią też impedancyjne układy 4T, omawiane w tekście szczegółowo wraz z propozycjami nowych rozwiązań i zastosowań.

Istotę tych kilku ogólnych stwierdzeń rozwinięto w następnych punktach tego rozdziału i ponadto w dwu pierwszych punktach Dodatku 1 poświęconych omówieniu współczesnych zadań pomiarów impedancji i układów kondycjonowania sygnałów.

1.2. Rys historyczny, geneza tematu i charakterystyka stanu wiedzy o pomiarowych układach 4T

Stosowanie układów 4T w pomiarach ma już przeszło 170-letnią bogatą historię. Dotyczy to przede wszystkim podstawowego ich rodzaju – mostków klasycznych. Ideę czteroramiennego symetrycznego mostka rezystancyjnego prądu stałego podał Christi już w 1833 roku. Wiąże się go jednak z nazwiskiem Wheatstone'a (wynalazcy telegrafu elektromagnetycznego na pięć lat przed Morsem), który w 1844 r. zastosował ten mostek do porównywania rezystorów o zbliżonych wartościach. Następnie, w 1848 r. jeden z braci W. W. Siemensów przystosował ten układ do pomiarów rezystancji o znacznie różniących się wartościach. Później kolejno powstawały następne układy, w tym: mostek Thompsona (1862) do pomiarów małych czterozaciskowych rezystancji, mostek Maxwella (1865) i inne mostki do pomiarów indukcyjności i pojemności z galwanometrem balistycznym jako detektorem stanu równowagi oraz mostek Wiena (1891) do pomiarów pojemności, pracujący po raz pierwszy przy prądzie przemiennym o jednej częstotliwości. W dwudziestym wieku pojawiło się wiele różnych rozwiązań mostków pasywnych, w tym transformatorowe, a następnie układy mostkowe aktywne o źródłach przełączanych, lub sterowanych i z przetwarzaniem. Początkowo układy te równoważono ręcznie, a następnie automatycznie, analogowo i cyfrowo. Więcej informacji o historii rozwoju mostków pomiarowych zawierają m.in. publikacje [1, 6, 7, 33/I, 46, 58]. Wybrane wcześniejsze polskie prace z tej dziedziny zestawiono w części B2.1 Bibliografii, a ich krótkie omówienie zawiera punkt D1.3 Dodatku 1.

Zrównoważone układy pasywne i aktywne o strukturze mostka stosuje się powszechnie w pomiarach statycznych składowych immitancji oraz w pomiarach pośrednich różnych pojedynczych wielkości, najczęściej przy prądzie stałym za pomocą czujników rezystancyjnych i konduktancyjnych. Natomiast przy rejestracji zmian i przede wszystkim w pomiarach dynamicznych od lat używa się głównie mostków niewymagających procedury równoważenia, nazywanych niezrównoważonymi lub odchyłowymi. Zyskały one istotnie na znaczeniu po opracowaniu produkcji scalonych półprzewodnikowych wzmacniaczy pomiarowych prądu stałego oraz obciążalnych, wysokostabilnych źródeł napięcia i prądu. Nośnikiem informacji pomiarowej, zależnej od kombinacji przyrostów immitancji ramion mostka względem stanu równowagi, jest bądź jego sygnał wyjściowy w postaci napięcia lub prądu przy stabilizowanym zasilaniu, bądź stosunek tego sygnału do wartości prądu lub napięcia niestabilizowanego źródła zasilania (pomiary ilorazu sygnałów). Mostki te są obecnie niewiele mniej dokładne niż zrównoważone.

Na temat mostków i ich zastosowań powstała bardzo bogata, w praktyce niepoliczalna literatura, w tym monografie [1, 2, 5, 6, 59]. Ta ogromna wiedza jest nadal jeszcze rozwijana i dostosowywana do ciągle pojawiających nowych możliwości technologicznych, gdyż układy mostkowe są niezastępowalne w wielu różnych dziedzinach techniki pomiarowej. Nowe rozwiązania pojawiają się dość rzadko, częściej są to różne kolejne, wąsko specjalizowane zastosowania. Pomimo to autor wpadł na trop i wyodrębnił szeroką klasę nierozwiązywanych dotąd zagadnień dotyczących zastosowania układów 4T w równoczesnych pomiarach zmian kilku parametrów ze sobą sprzężonych. Odkrył też nadające się do tego celu mostki niekonwencjonalnie dwuprądowo zasilane o dwu różnych wyjściach. Zagadnienia te wymagały opracowania jednolitych podstaw teoretycznych układów dotychczasowych i nowo odkrytych dla ich zastosowań w pomiarach wieloparametrowych. Stanowi to trzon problematyki tej monografii.

Stosunkowo niedawno pojawiły się w technice pomiarowej nierozłączalne czujniki czterozaciskowe, na przykład mostkowe przetworniki tensometryczne, mostki magnetorezystorowe, hallotrony i inne czujniki galwanomagnetyczne. Są one dostępne samodzielne i również jako scalone z różnymi układami kondycjonowania sygnałów, pasywnymi, aktywnymi i z przetwarzaniem analogowo-cyfrowym. Ich schemat zastępczy, poza wielobokiem zupełnym o immitancjach wewnętrznych zależnych od kilku wielkości może zawierać sterowane i nieodwracalne elementy, obwodu. Dotychczas rozwiązywano szczegółowo w praktyce zagadnienia dotyczące ich zastosowań w selektywnych pomiarach jednej wielkości. Ostatnio pojawiły się też wstępne informacje o rozwiązaniach technologicznych czujników umożliwiających w jednej strukturze fizycznej wykorzystywać różne zjawiska do pomiarów kilku wielkości. Wiele problemów układowych kondycjonowania sygnałów w immitancyjnych pomiarach wieloparametrowych nie jest jeszcze wystarczająco opanowanych. Na inne trzeba spojrzeć syntetycznie w sposób uogólniający i z nowego punktu widzenia - równoczesnych pomiarów kilku wielkości ze sobą skojarzonych. Temu celowi ma służyć poniższe opracowanie.

Do rozwiązywania zagadnień analizy i syntezy układów elektrycznych, w tym pomiarowych, powszechnie stosuje się schematy zastępcze. Ich zaletą jest to, że nie wymagają każdorazowego wnikania w szczegóły wewnętrzne i niedoskonałości budowy elementów, opisując je poprzez zbiór charakterystyk i parametrów na zaciskach zewnętrznych. Analiza właściwości metrologicznych czujników i ich układów prowadzona na potrzeby konstruowania i użytkowania przetworników, przyrządów i systemów pomiarowych, w szczególności tzw. inteligentnych (smart), wymaga z zasady znacznie głębszego, niż przy innych aplikacjach teorii obwodów, wniknięcia w zależności podstawowe i zjawiska pasożytnicze.

We współczesnej technice pomiarowej układy 4T, a w tym mostki 4R i układy hallotronowe zdobyły obszary o pozycji utrwalonej i niezastępowalnej w dającej się przewidywać przyszłości. Ich rola stała się obecnie inna i znacznie szersza niż poprzednio. Poza zastosowaniami w autonomicznych przyrządach pomiarowych, pasywne i aktywne układy 4T zawierające strukturę w postaci mostka występują też w:

- schematach zastępczych mierzonych obiektów przestrzennie ciągłych lub dyskretnych, w tym rozbudowanych układów elektrycznych, o wnętrzu dostępnym pośrednio tylko z kilku końcówek, a podlegających testowaniu, monitoringowi i diagnostyce
- schematach zastępczych cztero- i wielokońcówkowych czujników i ich nierozłączalnych zestawów, w tym półprzewodnikowych i scalonych
- członach wejściowych układów do kondycjonowania sygnałów różnych czujników impedancyjnych stosowanych w autonomicznych przyrządach i przetwornikach pomiarowych oraz w kartach pomiarowych systemów komputerowych. (Zazwyczaj są one bezpośrednio scalone z przetwornikami analogowo-cyfrowymi.)
- innych samodzielnych modułach pomiarowych.

Zastosowania te są więc bardzo zróżnicowane. Ich opisy dotyczą w większości pomiarów jednej wielkości (akronim angielski 1D – one Dimension) lub badań jej wpływu na immitancje układu. Równoczesne pomiary lub badania wpływu kilku wielkości (ogólnie – nD) oddziałujących równocześnie na parametry układu i powodujących duże przyrosty, są dość słabo rozwinięte. Tymczasem, ze względu na powszechny związek zjawisk, w zasadzie wszystkie pomiary powinny być traktowane jako wieloparametrowe. To ogromne utrudnienie omija się w praktyce, minimalizując wpływy wielkości w danych pomiarach niepożądanych poprzez odpowiednią konstrukcję przyrządów (np. pomiary różnicowe, ekranowanie, filtrację, detekcję fazoczułą) i stabilizację warunków pomiaru. Oddziaływania szczątkowe szacuje się poprzez dodatkowe błędy systematyczne i niepewności pomiarowe. Większe wpływy kompensuje się lub koryguje na różne sposoby. Pojawia się jednak coraz więcej takich zadań pomiarowych, w których sygnały pochodzą od kilku wielkości mierzonych i są ze sobą porównywalne, a nawet bywają znacznie mniejsze niż wpływy wielkości niepożądanych, np. w diagnostyce. Właściwym wyjściem są wówczas odpowiednio poprowadzone pośrednie pomiary wieloparametrowe.

W sposób naturalny wyłania się pytanie: czy pomiarów tych nie można już rozwiązywać na łatwiejszej w realizacji drodze tylko czysto cyfrowej? Czy więc ma jeszcze uzasadnienie praktyczne, aby nadal doskonalić i rozwijać też układy analogowe? Odpowiedź jest jednoznaczna: tak, gdyż układy te są nadal w olbrzymiej większości wypadków nie do zastąpienia. Wynika to stąd, że nie tylko badane obiekty i ich wielkości mierzone (mesurandy), ale i czujniki są analogowe i na ogół nieselektywne. Również równoczesne oddziaływania kilku wielkości na parametry układu są niejednakowe, nie w pełni przewidywalne zarówno w czasie, jak i co do ich rozkładu przestrzennego w obszarze obiektu objętego pomiarami oraz we wnętrzu i otoczeniu czujników, ze względu na skończone ich wymiary. Ponadto wiele z tych oddziaływań może mieć nieznany lub zbyt skomplikowany opis. W takiej sytuacji brak jest danych do opracowania odpowiednich procedur korekcyjnych po stronie cyfrowej. Duże uproszczenia wprowadza tu stosowanie różnych analogowych układów różnicowych i mostkowych oraz układów do kompensacji zjawisk pasożytniczych, korekcji charakterystyk, symetryzacji i stabilizacji warunków pracy, często umieszczanych tuż przy czujnikach, lub z nimi zintegrowanych. Do takich celów można wykorzystywać zarówno mostki klasyczne, jak i zaproponowane przez autora nowe mostki o niekonwencjonalnym dwuprądowym zasilaniu i wyjściach z obu przekątnych.

Zasady działania i właściwości mostków klasycznych i dwuprądowych z punktu widzenia zastosowania ich do pomiarów kilku parametrów skojarzonych w układzie autor omówił w kilkunastu publikacjach [27 – 47] w oryginalnym i jednolitym „układowym" ujęciu. Przedstawiał i zanalizował w nich możliwości pomiarów dwu (2D) i więcej parametrów mostkami każdego rodzaju z osobna oraz mostkami obu rodzajów łącznie.

W każdym z zastosowań układów 4T wyznaczenie zmian wartości jego parametrów lub na ich podstawie wielkości mierzonych, wymaga znajomości równań całego układu zarówno w postaci szczegółowej, jak i odpowiednio uogólnionych, które wskazywałyby, jak uzyskać najlepsze właściwości metrologiczne. Z bardzo obszernej literatury traktującej o mostkach i ich zastosowaniach zestawiono w bibliografii tylko wybrane pozycje [1 – 21, 58 – 72], w tym podstawowe monografie i podręczniki [1 – 13, 15, 17, 20]. Omawiano w nich zazwyczaj różne szczególne rodzaje pracy mostków, w tym też takie, które mają już małe znaczenie praktyczne. Na przykład, dużo uwagi poświęcano takiemu doborowi rezystancji mostków zasilanych napięciowo, aby uzyskać maksymalną czułość lub moc dostarczaną do odbiornika w postaci przyrządu analogowego, przy dopuszczalnym błędzie temperaturowym, tłumieniu galwanometru, lub aby zapewnić przebieg charakterystyki mostków niezrównoważonych przez określone dwie lub trzy wartości przyrostów jednej z rezystancji mostka, np. dla termistorów [71, 72].

Zarówno nowe, jak i dotychczasowe zadania pomiarowych układów mostkowych realizuje się obecnie zazwyczaj inaczej niż poprzednio. Dzięki scalonym wzmacniaczom pomiarowym bez trudu uzyskuje się na wejściu i wyjściu niemal idealnie prądową lub napięciową współpracę mostka z dołączonymi do niego układami oraz pożądane wartości zastępczych rezystancji wejściowych i wyjściowych. Niezbędne dostrojenia układu związane z wymianą czujników, zmianą zakresu lub używanych jednostek oraz kształtowaniem przebiegu jego charakterystyki w funkcji pojedynczej wielkości mierzonej przeprowadza się już po przetworzeniu sygnałów wyjściowych w postać cyfrową, uwzględniając parametry czujnika i mostka łącznie. W takie funkcje są wyposażone bardziej zaawansowane technicznie, głównie tzw. inteligentne przyrządy i przetworniki pomiarowe z konwencjonalnym układem mostkowym na wejściu. Dostrajanie przeprowadza się zarówno z lokalnej klawiatury, jak i zdalnie z przenośnego, lub stacjonarnego komputera, czy też specjalnego komunikatora. Wpływ różnic w wartościach parametrów czujników eliminuje się poprzez cyfrowe wprowadzanie danych dostarczonych przez producenta lub otrzymanych z pomiarów kalibracyjnych.

Z wcześniejszych prac nadal obecnie użyteczny może być jedynie dość ogólny opis mostków niezrównoważonych o przyrostach impedancji w jednym lub dwu ich ramionach zawarty w podręczniku M. I. Levina [3], a oparty na impedancjach skrośnych łączących dwie gałęzie układu. To podejście stosowane częściowo już we wcześniejszej literaturze rosyjskojęzycznej, np. w [60], nie ma odbicia w literaturze zachodniej.

Opisano też w literaturze bardzo rozbudowane układy do pomiaru elementów macierzy admitancyjnej sieci wielokońcówkowych, ale oparte na dość trudnych w realizacji zrównoważonych mostkach transformatorowych [8]. W tomografii impedancyjnej metodą techniczną dokonuje się pomiarów kolejnych napięć na wielu elektrodach przy przełączaniu wymuszonego prądu i na ich podstawie odtwarza się cyfrowo zmiany impedancji lub przewodności w siatce modelującej rozkład pola. Są to pomiary niezbyt precyzyjne, służące zazwyczaj celom diagnostycznym, a nie zaś precyzyjnemu wyznaczaniu małych zmian parametrów układu i wartości kilku wielkości wpływających.

Równoczesne pomiary wielu wielkości, np. w badaniach i w przemyśle, wykonuje się dotąd niemal wyłącznie wtedy, gdy można zastosować osobne czujniki selektywne z rozdzielnymi lub multipleksowanymi torami pomiarowymi. Pomiary pośrednie wieloparametrowe wielkości wspólnie oddziałujących na obiekt badany lub na czujniki, ze względu na różnorodność możliwości, nie są jeszcze wystarczająco opanowane.

Tymczasem można też pośrednio mierzyć równocześnie w układzie tyle zmian parametrów lub wielkości na niego wpływających, ile uzyska się sygnałów różnie zależnych od tych zmian. Równania opisujące te powiązane ze sobą sygnały powinny mieć jednak rozwiązania jednoznaczne lub możliwe do wyselekcjonowania ze względu na ich realizację fizyczną [54 – 56]. Pomiary równoczesnych zmian kilku rezystancji w jednym układzie mostkowym, lub kilku wielkości jednym mostkiem z kilkuparametrowymi czujnikami, są istotnym rozszerzeniem możliwości metrologicznych, ale wymagają odpowiedniego opisu teoretycznego. Do szczegółowej analizy zagadnień występujących współcześnie przy zastosowaniach różnych układów mostka niezrównoważonego niezbędne jest stosowanie jego pełnego opisu teoretycznego bez uproszczeń zakładających wstępną regulację zera lub idealne spełnienie stanu równowagi.

Przy istniejących możliwościach techniki pomiarowej dotychczasowe opisy mostka w niektórych sytuacjach są niewystarczające. Między innymi nie obejmują one w syntetycznej formie opisu pełnych charakterystyk wszystkich parametrów roboczych na zaciskach mostka niezrównoważonego o dowolnym zasilaniu, obciążeniu i przy dużych przyrostach rezystancji lub konduktancji kilku jego ramion. Również i analizę dokładności pomiarów mostkami niezrównoważonymi przeprowadzano dotąd bądź tylko dla napięcia wyjściowego przy małych przyrostach, bądź dla pomiarów tylko jednej wielkości w sposób uproszczony [18, 19]. Autor nie spotkał też w literaturze szczegółowego omówienia zasad wymienności czujników, w tym bez konieczności regulacji elementów samego mostka. Wykracza to poza zakres pracy, gdyż wymaga znajomości rozrzutu poszczególnych parametrów czujników od określonego producenta, ale podane tu opisy umożliwiają rozwiązanie i tego zagadnienia.

1.3. Zadania i istota pomiarów wieloparametrowych (nD)

Pomiary wieloparametrowe (*multivariable measurements*) są stosowane coraz częściej i służą do równoczesnego wyznaczania wartości lub składowych kilku, ogólnie n wielkości, zarówno w jednym, jak i w różnych miejscach obiektu badanego. Oznacza się je symbolem nD (n-Dimensional). Przy ich realizacji występują następujące rodzaje zadań:

- przetwarzanie wielkości mierzonych w odzwierciedlające je zmiany parametrów jednego czujnika lub układu kilku czujników włączonych na wejściu przetworników pomiarowych
- wyznaczanie wartości elementów wewnętrznych schematu zastępczego układu badanego lub układu wejściowego zawierającego czujniki, na podstawie pomiarów parametrów tego układu na dostępnych zewnętrznie jego zaciskach
- odtworzenie wielkości mierzonych poprzez przekształcenia odwrotne oparte na wyznaczonych wartościach tych elementów
- oszacowanie miar dokładności pomiarów i przetworzeń sygnałów.

W przetwornikach i komputerowych systemach pomiarowych zadania te często występują razem, np. w pomiarach pośrednich za pomocą czujników. Drugie zadanie występuje również samodzielnie – przy identyfikacji i diagnostyce zmian parametrów schematu zastępczego różnych układów i urządzeń elektrycznych. Zadania powyższe wynikają stąd, że jedynie dla nielicznych wielkości istnieją czujniki selektywne, którymi można bezpośrednio zmierzyć poszczególne wielkości. Trzeba wówczas wykorzystać taki zespół czujników, którego parametry zależą w różny sposób od kilku wielkości. Ponadto, wiele z badanych lub diagnozowanych układów, czujniki zintegrowane oraz podzespoły wejściowe toru pomiarowego nie dają się rozłączać, a nawet nie ma bezpośredniego dostępu do elementów wewnętrznej struktury ich schematu zastępczego. Wówczas, na zewnętrznych zaciskach trzeba wykonać pomiary kilku takich parametrów, które są różnymi funkcjami parametrów wewnętrznych i umożliwiają znalezienie ich wartości. Takie zadania występują na przykład w diagnostyce parametrycznej układów analogowych, przy badaniu zmian właściwości kierunkowych materiałów różnymi układami elektrod oraz przy pomiarze składowych rozkładów pól zespołem kilku czujników, w tym również sprzężonych ze sobą konstrukcyjnie. W obu wypadkach z układu wejściowego trzeba uzyskać i zmierzyć tyle sygnałów, ile jest wielkości niezależnych, które wpływają na jego parametry w różny sposób, a następnie dokonać na ich zbiorze przekształcenia odwrotnego, to jest rozwiązać, w urządzeniu pomiarowym lub poza nim, układ równań opisujących istniejące zależności. Tak więc pomiary wieloparametrowe są zazwyczaj pomiarami pośrednimi. Można to opisać w sposób ogólny dla stanu statycznego następującym wzorem:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}[\,\mathbf{r}(\mathbf{X}), \mathbf{Z}\,] \qquad (1.1)^{1}$$

gdzie: $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots \mathbf{R}_i, \ldots \mathbf{R}_n]^T$ – macierz kolumnowa parametrów mierzonych bezpośrednio w układzie na jego zaciskach i sprzężonych z jego parametrami wewnętrznymi **r**

$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_k, \ldots \mathbf{r}_o]^T$ – macierz kolumnowa parametrów wewnętrznych układu zależnych od zbioru mierzonych wielkości **X**

F – macierz operatorów, ogólnie nieliniowych, na parametrach **r** zależnych od wielkości mierzonych **X** i zakłóceń **Z**

$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots \mathbf{X}_i, \ldots \mathbf{X}_m]^T$ – macierz kolumnowa niezależnych wielkości $\mathbf{X}_i$. mierzonych pośrednio

$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots \mathbf{Z}_1, \ldots \mathbf{Z}_p]^T$ – inne wielkości oddziałujące na parametry czujników i innych elementów układu, traktowane jako zakłócające, znane lub nieznane.

Warunkiem koniecznym przy pomiarach nD (n wielkości) jest, aby co najmniej n zależności $R_i(X)$ różniło się od siebie, a ponadto liczby elementów m i o zbiorów **R** i **r** muszą być co najmniej równe liczbie n mierzonych wielkości X_i; tj. spełniać warunki: $m \geq n$ oraz $o \geq n$. Wartości wielkości **X** mierzonych pośrednio otrzymuje się z przekształceń odwrotnych wielkości **R** zmierzonych na końcówkach układu:

[1] Wzory, rysunki i tabele są poprzedzone numerem każdego rozdziału i numerowane kolejno od jego początku.

$$X = r^{-1}\left[F^{-1}(R), Z \right]\Big|_{Z = Z_T} \qquad (1.1a)$$

gdzie Z_T – wartości wielkości zakłócających w trakcie pomiarów. Dla warunków odniesienia $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0$

Gdy z zacisków mierzy się tylko zbiór wewnętrznych parametrów układu **r**, np. w celu identyfikacji elementów schematu zastępczego lub zmian ich wartości do celów testowania, diagnostyki czy też wymiany, to wówczas **r(X)** = **1** i otrzymuje się

$$X = r = F^{-1}(R)\Big|_{Z = Z_T} \qquad (1.1b)$$

Rozwiązania równań (1.1a,b) muszą być jednoznaczne lub dające się wyselekcjonować ze względu na możliwość ich fizycznej realizacji. Jeśli funkcja wielowymiarowa **F** jest liniowa, to

$$R(X_i) = K\,X \qquad (1.1c)$$

Zaś przekształcenie odwrotne jest następujące:

$$X = K^{-1}R \qquad (1.1d)$$

gdzie: **K** – macierz (nieosobliwa) składająca się ze współczynników, które są funkcjami wartości elementów układu.

Obok wartości X_j, otrzymanych z uwzględnieniem poprawek, wyniki pomiarów muszą też zawierać oszacowania ich miar niedokładności bądź w postaci granic przedziałów błędów systematycznych i błędów przypadkowych, bądź niepewności pomiarowych o założonym prawdopodobieństwie. Z zależności (1.1), na podstawie rachunku błędów, wynika związek pomiędzy macierzami miar dokładności zbiorów wielkości **R**, **X**, **Z** oznaczonymi przez δ_R, δ_X i δ_Z, zapisany ogólnie jako

$$\delta_R = F_1(\delta_X, \delta_Z) \qquad (1.2)$$

Przy małych wartościach przyrostów, za pomocą różniczki zupełnej otrzymuje się dla przyrostów bezwzględnych liniowe funkcje F_1 o postaciach

$$\Delta_{Ri} = \sum_{j=1}^{m} W_{ij}\Delta X_j + \sum_{j=1}^{p} W_{il}\Delta Z_l$$

gdzie

$$W_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial X_j},\; W_{il} = \frac{\partial R_i}{\partial Z_l}$$

oraz dla przyrostów względnych

$$\delta_{Ri} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}\,\delta_{X_j} + \sum_{j=1}^{p} w_{il}\,\delta_{Z_l}$$

ze współczynnikami wynoszącymi odpowiednio:

$$w_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial X_j}\frac{X_j}{R_i},\; w_{il} = \frac{\partial R_i}{\partial Z_l}\frac{Z_l}{R_i}$$

Związki pomiędzy przyrostami są podstawą do określenia różnych miar dokładności wielkości mierzonych. Na podstawie teorii błędów można je podać bądź w postaci błędów granicznych systematycznych i przypadkowych bądź jako rozszerzone niepewności pomiarowe.

Jako wyniki bezpośrednich pomiarów otrzymuje się elementy macierzy **R** wraz z oszacowaniami ich niedokładności $\delta_{\mathbf{R}}$. Macierz miar dokładności $\delta_{\mathbf{X}}$ uzyskuje się z przekształcenia odwrotnego wzoru (1.2):

$$\delta_{\mathbf{X}} = \mathbf{F_1}^{-1}\left(\delta_{\mathbf{R}}, \delta_{\mathbf{Z}}\right) \tag{1.2a}$$

gdzie: $\mathbf{F_1}^{-1}$.- zbiór funkcji odwrotnych względem operatorów $\mathbf{F_1}$ wiążących błędy $\delta_{\mathbf{R}}$ i $\delta_{\mathbf{X}}$, $\delta_{\mathbf{Z}}$.

Zależności te można też uzyskać za pomocą różniczki zupełnej bezpośrednio z zależności (1.1a). W warunkach odniesienia wielkości zakłócające $\mathbf{Z} = \mathbf{Z_0}$ oraz $\delta_{\mathbf{Z}} = 0$. Wówczas otrzymuje się błędy podstawowe pomiarów wieloparametrowych jako

$$\delta_X = F_1^{-1}(\delta_R)\Big|_{Z=Z_0} \tag{1.2b}$$

Gdy operatory $\mathbf{F}_1$ są liniowe, wówczas:

$$\delta_X = K_1^{-1}\delta_R \tag{1.2c}$$

gdzie: $\mathbf{K}_1$ – macierz współczynników (nieosobliwa).

Dla błędów bezwzględnych elementami macierzy $\mathbf{K}_1$ są współczynniki $k_{ij} = \dfrac{\partial R_i}{\partial X_j}$.

Zarówno równoczesne pomiary kilku parametrów, jak i przetwarzanie sygnałów są obarczone niedokładnościami i wymagają wnikliwej analizy metrologicznej oraz wyznaczenia błędów i niepewności pomiarowych. Elementy równań macierzowych (1.2a,b) dla różnych ocen niedokładności mostkowych pomiarów wieloparametrowych otrzymuje się bezpośrednio ze wzorów (1.2) lub (1.2a), stosując rachunek błędów. Zagadnienia te omawia się w rozdziale 8.

1.4. Pomiary pośrednie dwu wielkości (2D) czujnikami rezystancyjnymi

Zasady pomiarów wieloparametrowych prześledzimy na przykładzie pomiarów pośrednich dwu wielkości X_1, X_2 czujnikami immitancyjnymi, których parametry są sprzężone, gdyż zmieniają się pod wpływem obu tych wielkości. Przeprowadza się je wówczas, gdy wielkości te w znany sposób wpływają równocześnie co najmniej na dwa parametry jednego czujnika bądź na jeden z parametrów dwu lub więcej czujników. Parametry te można zmierzyć bezpośrednio lub pośrednio w układzie pomiarowym. Aby z pomiarów parametrów wyznaczyć wartości wielkości pierwotnych, jak już wspomniano, układ równań powinien mieć rozwiązania bądź jednoznaczne, bądź oczywiste przy ich wyborze ze względu na realizację fizyczną, np. dodatnie rezystancje. Tak więc jedna z wielkości wpływających X_1, X_2 musi oddziaływać inaczej niż druga przynajmniej na jeden ze zmieniających się parametrów. Zmiany każdego z mierzonych w układzie parametrów bardziej ogólnie określają ich przyrosty względne ε_1, ε_2 (niż bezwzględne Δ_1, Δ_2), wyznaczane względem wartości początkowych tych parametrów. Dotyczy to zarówno przyrostów dwu rezystancji R_1, R_2 (lub konduktancji) czujników immitancyjnych, jak i przyrostów wartości parametrów na zewnętrznych końcówkach układu o określonym schemacie zastępczym. Zmiany wielkości X_1, X_2 opisuje się również przez ich przyrosty x_1, x_2 od wartości stanu początkowego. Wpływy mogą być opisywane różnymi funkcjami. Analiza wszystkich, w tym nieliniowych zależności, które występują w praktyce pomiarowej, nie jest możliwa do wykonania.

Aby przybliżyć zagadnienie, rozpatrzymy zasadę pomiarów w dość częstej sytuacji, gdy każdy z przyrostów ε_1, ε_2 ma takie dwie składowe, z których każda zależy już tylko od jednej wielkości wpływającej. Wówczas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_1,x_2) &= \varepsilon'_1(x_1) + \varepsilon''_1(x_2) \\ \varepsilon_2(x_1,x_2) &= \varepsilon'_2(x_1) + \varepsilon''_2(x_2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Po prawej stronie układu równań (1.3) występują aż cztery różne składowe. Znalezienie x_1, x_2 będzie więc wtedy możliwe, gdy składowe te będą powiązane jeszcze dwoma innymi znanymi zależnościami. Założymy na przykład, że zależności te są liniowe, czyli że:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}, & k_{12} \\ k_{21}, & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'(x_1) \\ \varepsilon''(x_2) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

lub w postaci rozwiniętej dla składowych obu przyrostów:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1(x_1) &= k_{11}\,\varepsilon'(x_1); \qquad & \varepsilon''_1(x_2) &= k_{12}\,\varepsilon''(x_2) \\ \varepsilon'_2(x_1) &= k_{21}\,\varepsilon'(x_1); \qquad & \varepsilon''_2(x_2) &= k_{22}\,\varepsilon''(x_2) \end{aligned} \tag{1.4a}$$

Przekształcenie odwrotne jest następujące:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'(x_1) \\ \varepsilon''(x_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \begin{bmatrix} k_{22}, & -k_{21} \\ -k_{12}, & k_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{1.4b}$$

Przyrosty cząstkowe $\varepsilon'(x_1)$ oraz $\varepsilon''(x_2)$ składowych mogą być zarówno liniowymi, jak i nieliniowymi funkcjami przyrostów x_1 oraz x_2 wielkości mierzonych. Przy różnych wartościach współczynników k_{ij} układ równań (1.4) dla przyrostów względnych opisuje zarówno liniowe zależności zmian parametrów układu od wielkości wpływających (dodawanie, odejmowanie z różnymi współczynnikami), jak i niektóre nieliniowe, gdyż suma niezbyt dużych przyrostów względnych kilku wielkości odzwierciedla mnożenie tych wielkości, a różnica – ich dzielenie.

Rozpatrzymy trzy szczególne rodzaje pary czujników:

1°. Oba czujniki są selektywne: $\varepsilon_1 = f_1(x_1)$, $\varepsilon_2 = f_2(x_2)$, wówczas $k_{12} = 0$, $k_{21} = 0$, a z otrzymanych wartości ε_1, ε_2 wyznacza się bezpośrednio:

$$x_1 = f_1^{-1}(\varepsilon_1) \quad \text{oraz} \quad x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon_2).$$

2°. Tylko jeden z czujników jest selektywny, np. $\varepsilon_1 = F(x_1, x_2)$, $\varepsilon_2 = f_2(x_2)$, wówczas

$$x_1 = F^{-1}[\varepsilon_1, f_2^{-1}(\varepsilon_2)] \text{ oraz } x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon_2).$$

Niech np.: $k_{11} = k_{22} = 1$, $k_{12} = \pm 1$, $k_{21} = 0$, czyli:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'(x_1) \pm \varepsilon''(x_2) \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon''(x_2),$$

a stąd:

$$\varepsilon' = \varepsilon_1(x_1) \pm \varepsilon''(x_2), \quad \text{oraz} \quad \varepsilon'' = \varepsilon_2(x_2)$$

3°. Wielkość x_1 jednakowo wpływa na oba przyrosty ε_1, ε_2, zaś wpływy wielkości x_2 są tej samej wartości, lecz przeciwnego znaku, czyli: $k_{11} = k_{21} = k_{22} = +1$, $k_{12} = -1$ oraz

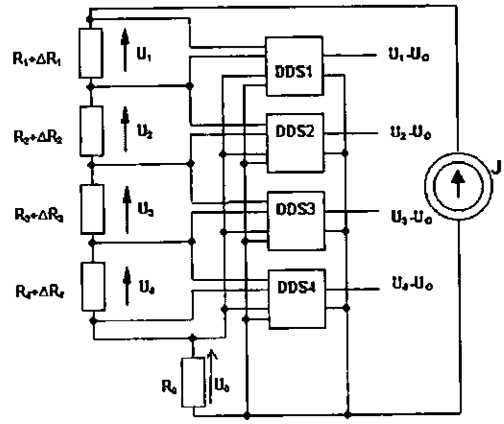
$$\varepsilon'_1(x_1) = \varepsilon'_2(x_1) \equiv \varepsilon', \quad \varepsilon''_2(x_2) = -\varepsilon''_1(x_2) \equiv \varepsilon''$$

wówczas

$$\varepsilon' = 0{,}5\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2); \quad \text{oraz} \quad \varepsilon'' = 0{,}5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Dla wszystkich powyższych rodzajów pracy czujników, po znalezieniu przyrostów ε_1, ε_2 można wyznaczyć ich składowe $\varepsilon'(x_1)$, $\varepsilon''(x_2)$, a z nich przyrosty x_1, x_2 wielkości mierzonych.

Pomiary przyrostów dwu lub więcej parametrów i odtwarzanie wielkości mierzonych na podstawie powyżej omówionych zależności można przeprowadzać w różnych układach pomiarowych, różnicowych i sumujących. Istnieje kilka możliwości pomiarów przyrostów rezystancji. Rezystancje podlegające zmianom można na przykład wraz ze stałą rezystancją odniesienia połączyć szeregowo, zasilić stabilizowanym prądem oraz bardzo precyzyjnie mierzyć cyfrowo, zapamiętywać i odpowiednio dalej przetwarzać wszystkie kolejne spadki napięć. Przy dwu tylko rezystancjach zmiennych, dla uzyskania pojedynczego wyniku trzeba wykorzystać co najmniej sześć pomiarów w tym trzy dla stanu początkowego. Liczba pomiarów i przetworzeń przyrasta wraz z każdą dodatkową zmienną rezystancją. Nie jest to wygodna metoda nawet przy jej automatyzacji, szczególnie w pomiarach dynamicznych przy szybko zmieniających się wielkościach, i nadaje się do stosowania raczej tylko w warunkach laboratoryjnych.



Rys. 1.1. Prądowa pętla Andersona (NASA) [16]
DDSi – dwuwejściowe układy różnicowe mierzące przyrosty napięć czujników
Fig. 1.1. Current Anderson loop [16]
DDS_i - double inputs differential circuits measuring voltage increments of sensors

Można też stosować wyspecjalizowany układ – tzw. prądową pętlę Andersona [16] – rys. 1.1. Mierzy ona i przetwarza dalej analogowo wszystkie przyrosty napięć, ale muszą być spełnione pewne dodatkowe wymagania, w tym: rezystancje początkowe czujników takie jak rezystancja odniesienia i zasilane tym samym prądem ograniczonym przez najmniejszą wartość dopuszczalnej mocy, rozłączanie czujników połączonych np. w mostek przynajmniej w jednym punkcie, konieczność użycia aż 6-7 przewodów doprowadzających oraz wielu dokładnych wzmacniaczy różnicowych o tzw. „pływających" wejściach.

Przyrosty względne składowych immitancji wielu czujników, np. rezystancji tensometrów mogą być bardzo małe. Jeśli wynik zależy od bardzo małej różnicy mierzonych dwu dużych napięć, to może on być bardzo niedokładny, a błędów nie ma jak wyeliminować na bieżąco i w prosty sposób. Wówczas przy pomiarach jednoparametrowych mostki klasyczne mają nadal szereg znanych zalet w stosunku do bezpośrednich pomiarów obu napięć, w tym bardzo dużą stabilność zera opartą na stabilności elementów pasywnych. Dla małych względnych przyrostów rezystancji realizują one też na bieżąco sygnał zależny liniowo od sumy i różnicy tych przyrostów. Są więc powszechnie stosowane na wejściach przemysłowych przetworników i komputerowych systemów pomiarowych. Przy większych przyrostach immitancji pojawiają się nieliniowości sygnału wyjściowego, ale ich wpływ można eliminować przez odpowiedni dobór elementów w mostku, sprzężenie zwrotne [21] lub korekcję w przetwarzaniu sygnału po stronie cyfrowej. Dlatego autor uznał, że należy gruntownie przeanalizować możliwości pomiarów wieloparametrowych w nierozłączalnych układach czterogałęziowych mostków rezystancyjnych zarówno klasycznych o jednoprądowym zasilaniu, jak i zasilanych niekonwencjonalnie – dwuprądowo. Wyniki pracy można też wykorzystywać przy określaniu zmian parametrów obiektu badanego o schemacie zastępczym w postaci pełnego mostka (czworobok zupełny), jeśli zależą one równocześnie od kilku wielkości.

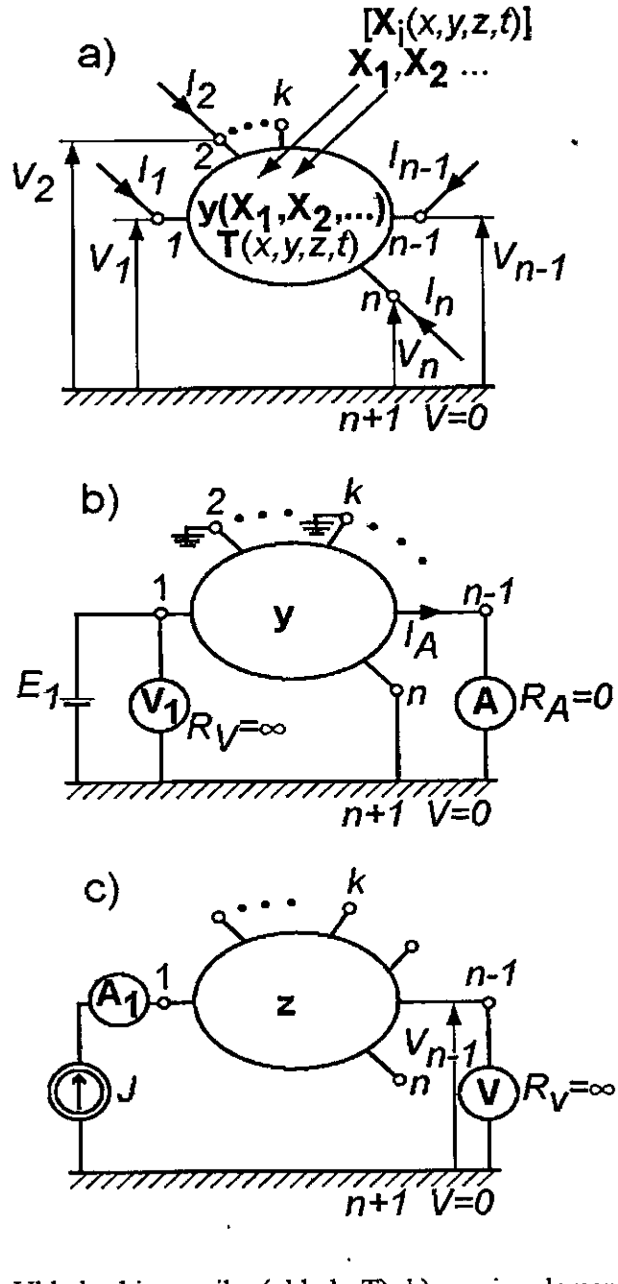
1.5. Podstawowe równania układu 4T

Do dalszych rozważań konieczne jest przytoczenie kilku pojęć podstawowych i przystosowanie zależności wynikających z teorii obwodów elektrycznych do potrzeb tematyki pracy. I tak, dowolny układ o dostępnych na zewnątrz n końcówkach, zwanych też zaciskami, określa się tu akronimem: układ nT (n-Terminal). W literaturze używa się też terminu układ n-biegunowy lub n-biegunnik. Układ taki przedstawiono na rys. 1.2a.

Wszystkie prądy i napięcia całego układu, jak i jego części, w każdej chwili muszą spełniać prądowe i napięciowe prawa Kirchoffa. Jego współpracę z dołączonymi obwodami zewnętrznymi opisuje się poprzez zależności pomiędzy prądami i napięciami łączących końcówek. W szczególnym wypadku prądy zacisków mogą być parami przeciwne, a niektóre z zacisków - nawet wspólne, tj. ze sobą zwarte. Skojarzoną ze sobą parę zacisków o przeciwnych prądach nazywa się wrotami, bramą lub portem i wówczas układ nT staje się wielowrotnikiem lub układem wielobramowym, oznaczanym ogólnie jako układ nP. Można go opisywać na różne sposoby mniejszą niż poprzednio liczbą równań zależną od liczby wrót. Wiążą one ze sobą napięcia i prądy wrót. Przy wyodrębnionych w układzie tylko dwu wrotach otrzymuje się czwórnik.

Elementy schematów zastępczych opisujących mierzone obiekty, układy do pomiarów immitancji oraz układy z czujnikami pomiarowymi mogą zależeć w różny sposób od wielkości wpływających, z których jedna, lub kilka, jest pośrednio mierzona poprzez pomiary parametrów układu, a wpływy innych są eliminowane lub minimalizowane.

Jeśli dla pewnej kombinacji wartości elementów wewnętrznych dowolnego układu, potencjały jego dwu niezwartych węzłów są jednakowe lub prądy dwu gałęzi dołączonych do wspólnego węzła są przeciwne, to stany takie nazywa się stanami równowagi tego układu. Dwa takie węzły można wówczas ze sobą zwierać, zaś obie połączone ze sobą gałęzie odłączać od węzła i w obu wypadkach prądy i napięcia w całym układzie nie ulegną zmianom.



Rys. 1.2. a) - Układ n-biegunnika (układ nT); b) pomiar elementu y_{31} jego macierzy **Y**, c) pomiar elementu z_{31} macierzy **Z**

Fig. 1.2. a) n-Terminal (nT) circuit; b) measurement of y_{31} element of matrix **Y**, c) measurement of z_{31} element of matrix **Z**.

Stany równowagi wykorzystuje się powszechnie w technice pomiarowej zarówno w układach wymagających równoważenia poprzez zmianę elementów lub prądów, czy napięć, jak i w układach niezrównoważonych – jako ich początkowy stan odniesienia.

W analizie, syntezie i optymalizacji elektrycznych układów pomiarowych korzysta się z teorii obwodów. Otrzymane zależności wykorzystuje się następnie w analizie dokładności pomiarów. Omówimy krótko podstawowe metody opisu układów liniowych. Ogólny schemat takiego układu o dwu wielkościach wpływających przedstawiono na rys. 1.2.

Układ odosobniony, który nie propaguje energii elektromagnetycznej, o parametrach skupionych (gdy długość fali przebiegu elektrycznego o największej częstotliwości jest znacznie większa niż wymiary geometryczne elementów układu) i liniowych lub linearyzowanych wokół punktów pracy, opisują następujące równania macierzowe o postaci admitancyjnej lub impedancyjnej.

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V} - \mathbf{J} \tag{1.5a}$$

lub

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}'\mathbf{I}' + \mathbf{E} \tag{1.5b}$$

gdzie: **I** – macierz kolumnowa prądów wpływających do układu przez jego końcówki;

V – macierz kolumnowa potencjałów końcówek względem punktu odizolowanego od układu o potencjale przyjętym umownie za 0;

U – macierz kolumnowa napięć między kolejnymi końcówkami układu;

I' – macierz kolumnowa prądów oczkowych;

Y, Z' – macierze nieoznaczone: admitancyjna i impedancyjna układu o sumie elementów w każdej kolumnie i w każdym wierszu równej zeru.(wynika to z praw Kirchoffa dla układu jako całości);

J, E – macierze kolumnowe zastępczych stacjonarnych źródeł prądowych lub napięciowych układu na jego zaciskach.

Macierz **Y** ma wymiary n x n, a jej elementy oznacza się następująco:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \cdots & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.5c}$$

Z praw Kirchoffa wynika, że jest to macierz nieoznaczona, gdyż suma elementów w każdym jej wierszu i w każdej kolumnie jest równa zeru. Układ opisywany tą macierzą może zawierać gałęzie składające się z immitancji oraz ze sterowanych źródeł prądowych i napięciowych. Elementy głównej przekątnej macierzy **Y** są dodatnie. Wśród pozostałych elementów można wyróżnić dwa podstawowe przypadki:

$y_{jk} = y_{kj}$ – układ pasywny odwracalny, elementy ujemne

$y_{jk} \neq y_{kj}$ – układ nieodwracalny pasywny, np. hallotron [26][2] oraz układy ze źródłami sterowanymi, np. ze wzmacniaczami operacyjnymi [21, 24, 75, 76, 78, 80],

gdzie: $j \in \langle 1, n \rangle$; $k \in \langle 1, n \rangle$ oraz $j \neq k$

Na rys. 1.2b, c podano dla przykładu sposoby pomiaru elementów y_{31} macierzy Y oraz elementu z_{31} macierzy **Z**. Pierwszy z nich wyznacza się ze wzoru:

$$y_{31}(X_1, X_2) = \frac{-I_3}{E_1}\Bigg|_{\substack{V_2=0\\ V_3=0\\ V_4=0}} \tag{1.5d}$$

Przy pomiarze y_{13} końcówki 1 i 3 należy zamienić miejscami. Taką parę pomiarów należy wykonać dla stanu początkowego i każdego wybranego zbioru wartości wielkości oddziałujących na układ.

Przy uziemieniu i-tej końcówki układu, tj. nadaniu jej potencjału równego zeru, w macierzy nieoznaczonej **Y** skreśla się i-ty wiersz oraz i-tą kolumnę. Otrzymuje się macierz oznaczaną tu jako $\mathbf{Y}_i^i$. Jej wyznacznik jest już różny od zera i macierz ta jest odwracalna. Umożliwia to wyznaczenie zależności pomiędzy napięciami zacisków (czyli różnicą potencjału każdego z zacisków i zacisku uziemionego) oraz ich prądami dopływającymi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_i^i (\mathbf{I} + \mathbf{J}) \tag{1.6}$$

gdzie: - $\mathbf{Z}_i^i \equiv (\mathbf{Y}_i^i)^{-1}$, a w pozostałych macierzach kolumnowych tego wzoru nie występuje i-ty element.

Dla układu autonomicznego (odosobnionego) **I** = 0 i równanie (1.6) upraszcza się do postaci:

[2] Z dziedziny techniki hallotronowej autor nie będzie cytował wcześniejszych prac niż ta monografia, gdyż można je znaleźć w obszernej bibliografii w niej zawartej.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}\,\mathbf{J} \tag{1.6a}$$

Uzupełniając każdą z kolumn i wszystkie wiersze macierzy $\mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}$ o elementy tworzące wraz z dotychczasowymi sumy zero, otrzymuje się impedancyjną macierz nieoznaczoną **Z**.

Posługując się macierzową metodą analizy układów i korzystając z pełnych schematów zastępczych układu i czujników otrzymuje się następujący ogólny wzór napięcia U_{mn} na dowolnych zaciskach m, n układu liniowego [75]

$$U_{\mathrm{mn}} = \frac{sgn(k-l)\,sgn(m-n)\,det\,\mathbf{y}_{\mathrm{mn}}^{\mathrm{kl}}}{det\,\mathbf{y}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}}\,I_{\mathrm{kl}} \equiv Z_{mn\,kl}\,I_{\mathrm{kl}} \tag{1.6b}$$

w którym:

k, l – końcówki prądu zasilającego I_{kl};

m, n – końcówki wyjściowe;

i – dowolnie przyjęty węzeł układu jako węzeł odniesienia ($V_{\mathrm{i}} = 0$);

y – macierz nieoznaczona układu – wzór (1.5c);

$\det \mathbf{y}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}$, – wyznacznik macierzy otrzymanej po skreśleniu w macierzy **y** i-tego wiersza oraz i-tej kolumny;

$\det \mathbf{y}_{\mathrm{kl}}^{\mathrm{mn}}$ – wyznacznik macierzy otrzymanej po skreśleniu w macierzy **y** wierszy m, n oraz kolumn k, l;

funkcja sign $(x) = 1$ dla $x > 0$, sign $(x) = -1$ dla $x < 0$.

$Z_{\mathrm{mn\,kl}}$ – transmitancja prądowo-napięciowa lub impedancja skrośna.

Podobny wzór można podać dla dowolnej admitancji skrośnej. Przy kilku źródłach w układzie stosuje się zasadę superpozycji. Stosując kilkakrotnie wzór (1.6b), można też zredukować macierz dowolnego układu n-końcówkowego do macierzy układu o mniejszej liczbie wyodrębnionych końcówek, np. do układu czterozaciskowego 4T.

Dowolną z macierzy opisujących układ można rozłożyć na sumę dwu macierzy: symetryczną $\mathbf{Y}_{\mathrm{A}}$ i antysymetryczną $\mathbf{Y}_{\mathrm{B}}$ względem głównej przekątnej. Na przykład:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y_A} + \mathbf{Y_B} \tag{1.7}$$

Elementy głównych przekątnych tych dwu macierzy to:

$$a_{ii} = y_{ii} \qquad \text{oraz} \qquad b_{ii} = 0$$

a elementy pozostałe:

$$a_{jk} = a_{kj} = \frac{1}{2}\left(y_{jk} + y_{kj}\right); \tag{1.7a}$$

$$b_{jk} = -b_{kj} = \frac{1}{2}\left(y_{jk} - y_{kj}\right); \tag{1.7b}$$

Elementy a_{jk} (dla k $\neq$ j) są ujemne.

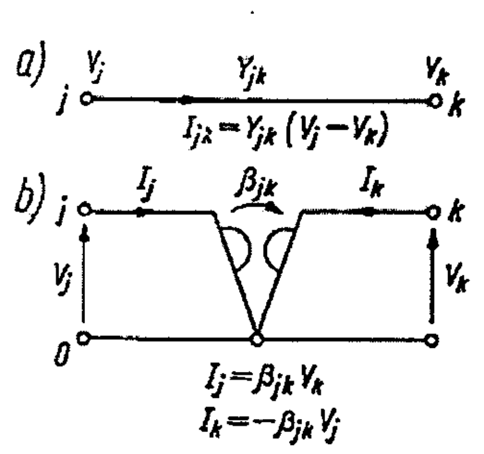
Macierzy symetrycznej $\mathbf{Y_A}$ odpowiada układ elektryczny odwracalny. Jego schematem zastępczym jest układ o n wierzchołkach, składający się z n(n–l)/2 gałęzi o admitancjach $Y_{jk} = Y_{kj} = -a_{jk}$ (dla k $\neq$ j) połączonych w wielobok zupełny. W sposób uproszczony admitancje te oznacza się na schematach tylko liniami pogrubionymi – jak na rys. 1.3a. Dla prądu sinusoidalnie przemiennego, ze względu na pojemności i indukcyjności układu, są to admitancje zespolone zawierające zarówno składowe rzeczywiste jak i składowe urojone. Dla dowolnych przebiegów czasowych prądów i napięć używa się admitancji operatorowych Laplace'a. Przy prądzie stałym są to konduktancje.

Macierz antysymetryczna $\mathbf{Y_B}$ składa się tylko z elementów β_{jk} rozmieszczonych parami symetrycznie względem głównej przekątnej. Pary te są co do modułu jednakowe, lecz mają przeciwne znaki. Każdej takiej parze można przyporządkować liniowy elementu obwodu stanowiący bezstratny nieodwracalny czwórnik – zwany żyratorem; opisuje go równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} I_j \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_{jk} \\ -\beta_{jk} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_j \\ V_k \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Zachodzący w nim proces nazwany jest „żyracją", a współczynnik β_{jk} o wartości rzeczywistej (np. przy prądzie stałym) nazywa się konduktancją żyracji.

Na rys. 1.3b podano schemat 3-końcówkowego żyratora. Do zbudowania schematu zastępczego układu nieodwracalnego z n końcówkami potrzeba ogólnie co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ żyratorów.



Rys. 1.3. Schematy elementów obwodu: a) - dwójnika odwracalnego o admitancji Y_{jk}, b) - żyratora 3-końcówkowego o admitancji żyracji β_{jk}

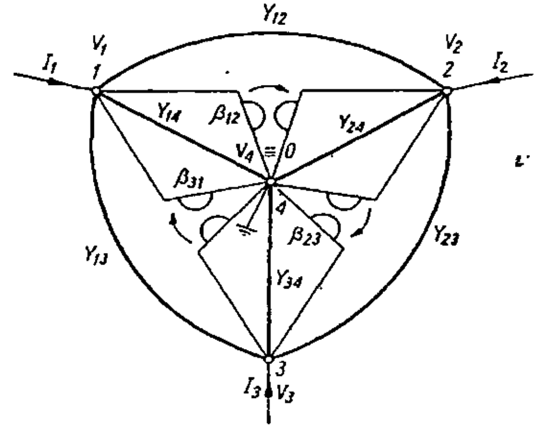
Fig. 1.3. Schemes of circuit elements: a) two terminal reciprocal admitance Y_{jk}, b) 3-Terminal girator of β_{jk} admitance.

Rozpatrzymy układ liniowy nieodwracalny o 4 końcówkach (4T), przy czwartej końcówce uziemionej. Uwzględniając odpowiednie przyporządkowanie admitancji Y_{jk} jego dwójników elementom macierzy $\mathbf{Y_A}$ i współczynników żyracji β_{jk} elementom macierzy $\mathbf{Y_B}$, otrzymuje się następujące równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{12}+Y_{13}+Y_{14} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{12} & Y_{12}+Y_{23}+Y_{24} & -Y_{23} \\ -Y_{13} & -Y_{23} & Y_{13}+Y_{23}+Y_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ -\beta_{12} & 0 & \beta_{23} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Zależność tę spełnia układ przedstawiony na rys. 1.4. Składa się on z 6 dwójników admitancyjnych (oznaczonych liniami pogrubionymi) połączonych w czworobok zupełny i z 3 żyratorów. Należy dodać, że do opisu dowolnego układu liniowego z n końcówkami można też stosować postać impedancyjną jego równań, lecz wówczas zależności między elementami macierzy impedancyjnej a parametrami elementów schematu zastępczego nie są tak proste jak wyżej.

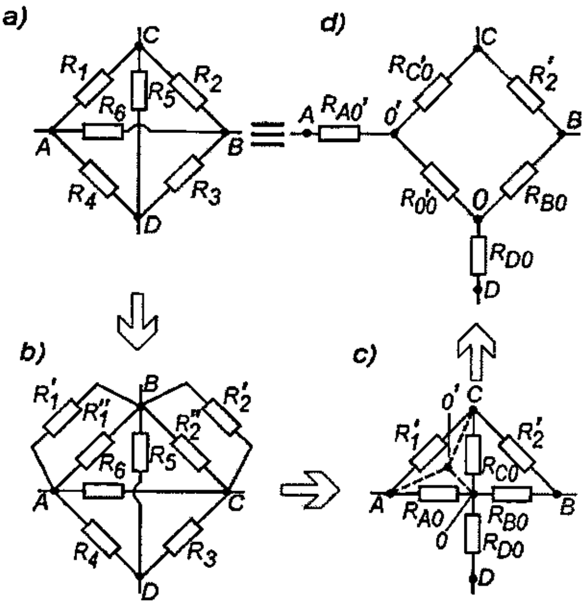
Przykładem elementu nieodwracalnego pasywnego 4T jest hallotron. Opisująca go macierz **Y** lub **Z** zawiera obie macierze składowe, gdyż hallotron jest elementem stratnym (pobiera moc). Elementy obu macierzy zależą różnie od głównych wielkości wpływających na hallotron – pola magnetycznego **B** i pola temperatury T. Elementy macierzy symetrycznej $\mathbf{Y_A}$ zależą od parzystych potęg indukcji magnetycznej B^{2n} i od temperatury T, zaś macierzy antysymetrycznej $\mathbf{Y_B}$ – tylko od potęg nieparzystych tej indukcji B^{2n-1}, (gdzie: $n \in (1, \infty)$) i mogą być opisane tylko jednym żyratorem [26] o niepołączonych galwanicznie obwodach. Schematy zastępcże hallotronów omawia się szczegółowo w rozdziale 6.



Rys. 1.4. Schemat zastępczy admitancyjno-żyratorowy 4-końcówkowego nieodwracalnego układu liniowego o uziemionej końcówce 4.
Fig. 1.4. Equivalent scheme of the 4-Terminal non-reciprocal circuit of the grounded terminal 4.

1.6. Układy 4T pasywne odwracalne: czworobok zupełny, mostek4R, gwiazda czteroramienna, czwórnik

Rozpatrzymy teraz bliżej układ pasywny odwracalny. Opisuje go tylko macierz $\mathbf{Y_A}$, gdyż $b_{jk} = 0$. Ze wzoru (1.7a) wynika, że elementy tej macierzy rozmieszczone symetrycznie względem głównej przekątnej są jednakowe. Macierzy tej odpowiada jednoznacznie schemat zastępczy w postaci układu o n wierzchołkach, połączonych każdy z każdym, a więc składający się z n(n – 1)/2 gałęzi o admitancjach $Y_{jk} = Y_{kj} = -a_{jk}$ (dla $k \neq j$), czyli o strukturze wieloboku ze wszystkimi przekątnymi, zwanego wielobokiem zupełnym. Elementy głównej przekątnej równają się sumie admitancji dołączonych do kolejnych wierzchołków układu i wynoszą: $a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Y_{ij}$. Przy prądzie stałym admitancje Y_{ij} gałęzi układu stają się konduktancjami, tj. $Y_{jk} = G_{ik}$. Szczególnym rodzajem wieloboku zupełnego jest układ pasywny 4T, a więc o czterech tylko końcówkach i strukturze czworoboku zupełnego przedstawionej na rys.1.5a. Występuje on często zarówno w schematach zastępczych wielu urządzeń elektrycznych i innych badanych obiektów, jak i jako człon funkcjonalny różnych urządzeń pomiarowych. Będzie też szczegółowo rozważany w tej pracy z punktu widzenia pomiarów wieloparametrowych.



Rys. 1.5. Układy 4T równoważne strukturze czworoboku zupełnego (mostka 4R z przekątnymi)

Fig. 1.5. Some transformations of the resistance quadrilateral 4T circuit (4R bridge with diagonals)

Wartości rezystancji gałęzi R_i z rys. 1.5a są odwrotnościami sześciu konduktancji $G_i \equiv G_{jk}$ jego macierzy $\mathbf{Y_A}$.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że dowolny układ 4T liniowy lub linearyzowany opisują w pełni na jego zaciskach trzy równania liniowe. Można w nich uwzględnić też wewnętrzne źródła stacjonarne stałe lub zmieniające się np. cyklicznie. Równania te otrzymuje się metodą prądów oczkowych lub potencjałów węzłowych i zapisuje się w sposób jednorodny w postaci impedancyjnej lub admitancyjnej, w tym macierzowo. Aktywny układ 4T wymaga aż dziewięciu różnych współczynników. Pasywny układ 4T wymaga już tylko ośmiu współczynników, a gdy ponadto układ ten jest odwracalny - tylko sześciu. Przy prądzie stałym lub prądzie przemiennym w takim zakresie częstotliwości, w którym składowe reaktancyjne są pomijalne, współczynniki te mają wymiar rezystancji lub konduktancji. Opis macierzowy układów elektrycznych jest bardzo eleganckim narzędziem opisującym ogólnie i kompletnie wszystkie podstawowe ich parametry. Opis ten jest wykorzystywany również z powodzeniem w komputerowych obliczeniach numerycznych parametrów tych układów. Wyznaczanie zależności poszczególnych parametrów w postaci ogólnej wymaga zazwyczaj żmudnych przekształceń wieloelementowych wielomianów. Nawet gdy jest wymagana znajomość tylko nielicznych parametrów zewnętrznych na zaciskach układów, trzeba przekształcać całe równanie macierzowe. Dlatego do takich celów opracowano prostsze i szybsze metody, w tym algebrę schematów blokowych, teorię grafów drzew i grafów przepływu sygnałów, teorię liczb strukturalnych rozwiniętą głównie przez S. Bellerta z Politechniki Warszawskiej w latach 1965-70 i inne. Dla prostszych układów wystarczy zazwyczaj zastosowanie kilku równań wynikających bezpośrednio z praw Kirchoffa. Dotyczy to też wielu rozważań zawartych w pracy.

Rozbudowane układy liniowe o czterech wyodrębnionych końcówkach dają się w ogólnym wypadku przekształcić w układ 4T lub w jego postacie szczególne, bądź poprzez działania na ich układach równań, bądź poprzez kolejne transfiguracje sieci. Struktura układu musi jednak zawierać co najmniej tyle jednoparametrowych i identyfikowalnych elementów obwodów, takich jak: dwójniki, źródła sterowane, żyratory, ile jest różniących się współczynników w tych równaniach. Układy aktywne przy prądzie stałym modeluje się przez autonomiczne stacjonarne źródła zasilające oraz rezystancje lub konduktancje i źródła nieautonomiczne, czyli sterowane, tylko o rzeczywistych współczynnikach. Układ nieautonomiczny 4T odwzorowuje się ogólnie sześcioma impedancjami i trzema żyratorami [75, 26]. Dla każdego układu, który jest pasywny i odwracalny na zaciskach istnieje schemat zastępczy składający się z elementów o takich samych właściwościach. Dla takiego układu 4T podstawową strukturą jest czworobok zupełny, czyli mostek z przekątnymi, nazywany też mostkiem pełnym, który podano na rys. 1.5a. Ma on węzły tylko w czterech końcówkach.

Dowolny układ bez stacjonarnych źródeł wewnętrznych, z wieloma końcówkami i o nieznanej strukturze (tzw. czarna skrzynka), zawiera nieusuwalny mostek wtedy, gdy są co najmniej takie dwie pary niezwartych pomiędzy sobą zacisków, że po dołączeniu stacjonarnego źródła zasilającego do jednej z nich, napięcie drugiej pary może zmieniać znak na przeciwny dla pewnego zbioru wartości parametrów wewnętrznych tego układu.

Wyjaśnimy teraz bliżej podane na rys. 1.5b, c, d kolejne fazy procesu transfiguracji układu a) o strukturze czworoboku zupełnego. Ponieważ składa się on z sześciu rezystancji, to można go tylko wówczas przekształcić w układ o czterech rezystancjach i strukturze czteroramiennej gwiazdy, gdy spełnia dwa dodatkowe warunki w postaci podwójnej równości trzech iloczynów par rezystancji przeciwległych. Dla dowolnego układu a) iloczyny tych rezystancji mogą różnić się od siebie. Należy więc wówczas w każdym z dwu mniejszych iloczynów jedną z rezystancji zastąpić dwoma równoległymi – patrz układ b), tak dobranymi, by ten warunek był spełniony, tj. aby:

$$R_1''R_3 = R_2''R_4 = R_5 R_6 \tag{1.10}$$

Czworobok składający się z tych rezystancji daje się już przekształcić w gwiazdę czteroramienną R_{A0}, R_{B0}, R_{C0}, R_{D0}; i otrzymuje się układ c), zaś po kolejnym przekształceniu: trójkąta rezystancji R_1', R_{A0}, R_{B0} w gwiazdę trójramienną powstaje wspomniany układ o strukturze d). Z tych rysunków wynika, że te same równania wiążące prądy i napięcia zacisków mogą opisywać układy o różnej strukturze wewnętrznej.

To, że układ czworoboku zupełnego ma też inne sześciogałęziowe odpowiedniki o większej niż on liczbie węzłów, w tym daje się zastąpić mostkiem czteroramiennym z dodatkowymi rezystancjami szeregowymi do dwu kolejnych jego wierzchołków, np. takim układem jak na rys. 1.5d, autor wykazał po raz pierwszy i opisał w monografii o hallotronach [26]. Istnieją aż cztery różne układy o rezystancjach szeregowych z dwoma kolejnymi wierzchołkami: A i C, C i B, B i D oraz A i D mostka. Są one całkowicie równoważne sobie i układowi a) oraz innym, otrzymywanym z niego, wskutek transfiguracji, np. układowi c). Równowaga wszystkich mostków z rys. 1.5 zachodzi równocześnie. Układ pasywny, odwracalny 4T może więc mieć różną strukturę wewnętrzną: z dwoma, jednym lub bez węzłów w środku. Szczególne jej postacie o czterech tylko gałęziach, to mostek bez przekątnych oraz gwiazda czteroramienna. Rozbudowane liniowe układy pasywne i odwracalne o czterech wyodrębnionych końcówkach dają się w ogólnym wypadku przekształcić w układy z rys. 1.5 lub ich postacie szczególne.

Dowolny układ nT może też współpracować z innymi przy zaciskach skojarzonych parami, tak że prądy zacisków z każdej pary są przeciwne. Układ, który ma n takich par, zwanych też wrotami lub bramami, jest n-wrotnikiem [74 – 81] lub układem n-bramowym o akronimie nP (n Port). Pracę n–wrotnika opisuje się poprzez zależności pomiędzy prądami i napięciami wszystkich jego par zacisków. Układ 4T o dwu wyodrębnionych parach zacisków, zwanych tu stronami, jest więc układem 2P, czyli dwuwrotnikiem. W polskiej terminologii wcześniej utrwaliła się dla niego nazwa: czwórnik. Przynajmniej jedną z jego par zacisków zasila się z zewnątrz. Wymaga on do opisu układu tylko dwu równań o czterech współczynnikach – gdy jest aktywny lub o trzech współczynnikach – gdy jest pasywny i odwracalny. Może istnieć wiele układów 4T, które jako czwórniki mają te same parametry stron. Dotychczas stosowane mostki pomiarowe zazwyczaj współpracują z resztą układu jako czwórniki. Ponadto w wielu wypadkach rezystancje zastępcze obwodów dołączonych do ich przekątnych można w praktyce traktować w stosunku do rezystancji widzianych z zacisków bądź jako nieskończenie duże (zasilanie prądowe, wyjście napięciowe), bądź jako równe zeru (zasilanie z idealnego źródła napięcia, wyjście w postaci prądu zwarcia).

Pod wpływem wielkości wpływających X_i w schemacie zastępczym układu mogą zmieniać się jego immitancje (przy prądzie stałym rezystancje lub konduktancje) i zależne od nich parametry na zaciskach zewnętrznych tego układu. Pełny czteroramienny mostek z przekątnymi ma sześć gałęzi, a więc mierząc np. wartości ich rezystancji można by teoretycznie odtwarzać aż sześć różnie wpływających na nie niezależnych wielkości. Jeśli zaś zmieniają się tylko rezystancje ramion mostka, to maksymalnie udaje się zmierzyć pośrednio cztery wielkości. Zmiany poszczególnych immitancji można wyznaczyć ze stosunkowo prostych pomiarów rezystancji wejściowych pomiędzy zaciskami lub nieobciążających układ pomiarów napięć i prądów przy dołączaniu źródła prądowego lub napięciowego kolejno do końcówek układu nT i różnego łączenia tych końcówek ze sobą [8]. Opracowane są też różne algorytmy i programy przetwarzania otrzymywanych sygnałów prowadzące do wyznaczania poszczególnych elementów macierzy admitancyjnej lub impedancyjnej tego układu oraz wartości immitancji poszczególnych gałęzi. Metody te stosuje się m.in. w diagnostyce i w tomografii impedancyjnej. Autor wykorzystywał je przy badaniu elementów schematu zastępczego hallotronu jako elementu 4T i do optymalizacji układów samokompensacji jego zera [26]. Metody te nie zapewnią jednak wystarczającej dokładności w pomiarach wieloparametrowych, szczególnie wtedy, gdy przyrosty rezystancji są niewielkie oraz niektóre z wielkości oddziałują na nie różnicowo, jak to ma zwykle miejsce w mostkowych układach pomiarowych. Lepsze wyniki w tym wypadku otrzyma się, mierząc zmiany parametrów mostka jako całości odniesione do ich wartości początkowych w stanie równowagi mostka i dokonując za jego pomocą wstępnego przetwarzania sygnałów zależnych od wielkości wpływających.

Uzyskanie sygnałów z pasywnych układów pomiarowych i obiektów mierzonych wymaga dołączania do nich źródeł stałych i ewentualnie sterowanych. Układy te mogą być zasilane z jednego lub kilku źródeł tego samego rodzaju, np. prądowych, i o tej samej zależności w czasie lub ze źródeł różnych. Nawet w układzie 4T czyni to wiele możliwych kombinacji. Np. dla rezystancyjnych układów prądu stałego, niezależnie od sposobu dołączenia źródeł zasilających do zacisków i ich rodzaju, istnieją następujące dwie podstawowe postacie mostka jako układu o zmiennych rezystancjach:

- zmianom podlegają tylko parametry ramion mostka (przy prądzie stałym – rezystancje lub konduktancje), zaś parametry przekątnych są określone, tj. mają np. wartości krańcowe (∞, 0) lub inne, ale stałe

- rezystancje przekątnych również zmieniają się i zależą od wielkości wpływających.

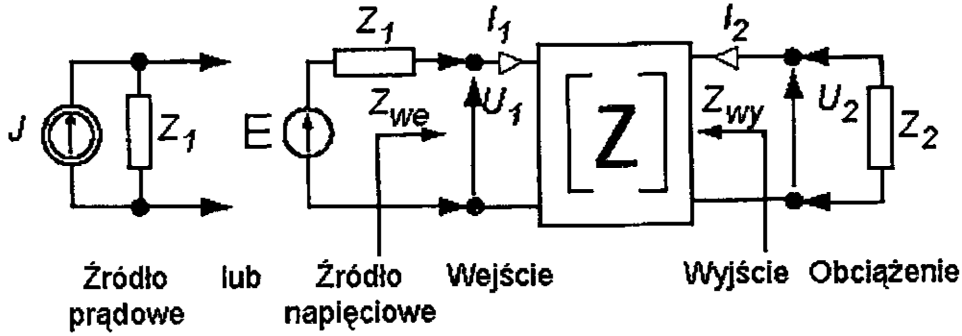
Pierwszy rodzaj to układy, które zostały w taki sposób skonstruowane np. mostki czteroramienne z jednym lub kilkoma czujnikami pomiarowymi, drugi występuje w schematach zastępczych obiektów badanych oraz monolitycznych i scalonych czujników o czterech końcówkach, w tym np. hallotronów.

W tej pracy szczegółowo omawia się odwracalne układy mostkowe 4T o zmianach w postaci przyrostów rezystancji i wybrane dwuprądowe układy prądu przemiennego. W rozdziale 6 opisano też schematy zastępcze hallotronu jako przykład nieodwracalnego pasywnego układu 4T. Jest to uaktualniona wersja rozdz. 6 monografii pt. Technika hallotronowa [26]. Opracowane przez autora rozdz. 1, 6 i 7 tej monografii zawierają w oryginalnym ujęciu podstawy teoretyczne optymalizacji układów hallotronowych. Obok schematów zastępczych omawia się tam skuteczną kompensację napięcia początkowego i innych napięć pasożytniczych, kształtowanie charakterystyki i wymienność hallotronów, analizę dokładności, układy różnicowe i ze sprzężeniem zwrotnym. Opracowanie było oparte na badaniach teoretycznych i eksperymentalnych oraz doświadczeniu z prac konstrukcyjnych. Wykorzystano je z powodzeniem w budowie wielu rozwiązań dokładnych teslomierzy i militeslomierzy oraz przetworników hallotronowych [25, 26][3].

1.7. Równania impedancyjne układu 4T pracującego jako czwórnik i jego macierz Z

Dowolny układ 4T może mieć wewnątrz wiele gałęzi, węzłów i oczek. Jeśli jego współpraca z zewnętrznymi obwodami i otoczeniem odbywa się tylko przez dwie pary zacisków o prądach sobie przeciwnych, to pracuje on jako czwórnik i prądy połączeń innymi drogami poprzez sprzężenia magnetyczne, pojemnościowe i upływności izolacji, są wówczas pomijalne. Taki stan pracy układu przedstawiono na rys. 1.6 przy zasilaniu dołączanym do lewej jego strony. Opisuje się go wówczas równaniami wiążącymi napięcia i prądy tych par zacisków. Przeprowadzane w następnych rozdziałach rozważania szczegółowe o właściwościach i niekonwencjonalnym zastosowaniu mostka 4R w pomiarach kilkuparametrowych zostaną tu poprzedzone przedstawieniem podstawowych zależności czwórników.

[3] Szereg publikacji polskich, angielskich i rosyjskich z tej tematyki opracowanych przez autora oraz wspólnych ze współpracownikami i doktorantem, było cytowanych wielokrotnie. Publikacja autora o hallotronowych układach zamkniętych [25] została, jako podstawowa, zamieszczona w rozdziale o hallotronach międzynarodowego poradnika techniki pomiarowej [20], wydanego w 2001 r., Zagadnienia te, po ich uaktualnieniu, znajdowały się też pierwotnej wersji tej monografii, ale ze względu na ich obszerność recenzent zasugerował, by je wyłączyć i opracować osobną pozycję wydawniczą – tylko o układach hallotronowych i galwanomagnetycznych mikroukładach scalonych.



Rys. 1.6. Czwórnik liniowy przy współpracy z liniowymi źródłem i obciążeniem. ($Z_{we} \equiv Z_{AB}$, $Z_{wy} \equiv Z_{AB}$, $U_1 \equiv U_{AB}$, $U_2 \equiv U_{CD}$, $I_1 \equiv I_{AB}$, $I_2 \equiv I_{CD}$)

Fig. 1.6. Linear twoport connected to linear source and load. ($Z_{we} \equiv Z_{AB}$, $Z_{wy} \equiv Z_{AB}$, $U_1 \equiv U_{AB}$, $U_2 \equiv U_{CD}$, $I_1 \equiv I_{AB}$, $I_2 \equiv I_{CD}$)

Jeśli czwórnik jest liniowy lub linearyzowany, to w teorii obwodów opisuje się go układem dwu równań liniowych na sześć różnych sposobów oznaczanych umownie jako równania typu **Z, Y, A, B, H, H'** – patrz np. [74 – 81]. Są one transformowalne wzajemnie, ale w szczególnych wypadkach niektóre mogą nie istnieć. Jeśli zmiany parametrów wewnętrznych układu są przedstawiane jako przyrosty impedancji, to wygodnie jest stosować postać impedancyjną Z tych równań, którą zapisuje się macierzowo następująco:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I} \tag{1.11}$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

albo algebraicznej

$$\begin{aligned} U_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ U_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned} \tag{1.11a}$$

gdzie: $\mathbf{U} \equiv |U_1, U_2|^T$; $\mathbf{I} \equiv |I_1, I_2|^T$ – kolumnowe dwuelementowe macierze napięć i prądów wpływających do wrót o zaciskach AB i CD obu stron czwórnika (patrz dalej rys. 1.6);

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} Z_{AB}^{\infty} & z_{12} \\ z_{21} & Z_{CD}^{\infty} \end{vmatrix} \tag{1.11b}$$

- macierz o elementach z_{ij}, które są współczynnikami równań impedancyjnych czwórnika.

Współczynniki impedancyjne z_{ij} (elementy macierzy **Z**) wyznacza się bądź bezpośrednio z pomiarów, bądź metodami analitycznymi czy też numerycznymi przy znanej strukturze i wartościach parametrów całego układu. W ogólnym wypadku wszystkie te współczynniki są różne.

Elementy z_{12}, z_{21} w sensie fizycznym są transmitancjami prądowo-napięciowymi (nazywanymi też impedancjami skrośnymi lub łączącymi) pomiędzy stronami (wrotami, bramami, portami) czwórnika, określonymi w obu kierunkach przy braku obciążenia ($I_2 = 0$, lub $I_1 = 0$). Natomiast elementy z_{11} oraz z_{22} to impedancje widziane odpowiednio z pary zacisków AB lub CD przy rozwarciu drugiej strony czwórnika, czyli tzw. impedancje rozwarciowe: wejściowa Z_{AB}^{∞} i wyjściowa Z_{CD}^{∞}. Współczynniki i wielkości występujące w równaniach (1.11) i (1.11a) dalej w tekście nazywa się ogólnie: parametrami zewnętrznymi lub zaciskowymi. Dla elementów z_{ij} macierzy czwórnika spotyka się też w literaturze z teorii obwodów, np. w [80], nazwę: funkcje układowe.

Wszystkie parametry obu stron czwórnika dla krańcowych wartości impedancji obwodu dołączonego do przeciwnej jego strony są oznaczane dodatkowym górnym indeksem, tj. przy rozwarciu – indeksem ∞, zaś przy zwarciu – indeksem 0. Na przykład impedancja wyjściowa Z_{CD}^{∞} występuje przy przerwie w obwodzie dołączonym do zacisków AB lub przy zasilaniu z idealnego źródła prądowego J, zaś impedancja Z_{CD}^{0} – przy zwarciu zacisków AB lub przy dołączeniu do nich idealnego źródła napięciowego E. Układ traktuje się w praktyce jako zasilany z idealnego źródła prądowego J, gdy rezystancja zastępcza obwodu źródła jest znacznie większa od rezystancji wejściowej pary zacisków, do której to źródło jest dołączane.

Przy zasilaniu prądem stałym (DC) równania czwórnika są algebraiczne. Przy innych przebiegach w czasie równania (11.1) algebraizują się po ich transformacji: dla dowolnych przebiegów nieokresowych – za pomocą operatorów Laplace'a, dla przebiegów okresowych odkształconych – operatorów Fouriera, zaś przy jednej częstotliwości (AC) do postaci w liczbach zespolonych.

Dla czwórnika zasilanego w obwodzie wejściowym ze źródła prądowego J o impedancji zastępczej Z_1 otrzymuje się następujące parametry na zaciskach:

$$U_2 = J\frac{Z_1 Z_2 z_{21}}{(Z_1 + z_{11})(Z_2 + z_{22}) - z_{12}z_{21}} \tag{1.12a}$$

$$U_1 = J\left(z_{11} - \frac{z_{12}\, z_{21}}{z_{22} + Z_2}\right) \tag{1.12b}$$

$$Z_{\text{in}} \equiv Z_{AB} = z_{11} - \frac{z_{12}\, z_{21}}{z_{22} + Z_2} \tag{1.12c}$$

$$Z_{out} \equiv Z_{CD} = z_{22} - \frac{z_{12}\, z_{21}}{z_{11} + Z_1} \tag{1.12d}$$

Natomiast przy zasilaniu tym samym źródłem prądowym J od strony wrót wyjściowych napięcie na wejściu będzie następujące:

$$U_1'' = J\frac{Z_1 Z_2 z_{12}}{(Z_1 + z_{11})(Z_2 + z_{22}) - z_{12}z_{21}} \tag{1.12e}$$

Postacie szczególne wzorów dla parametrów roboczych na zaciskach czwórnika zestawiono w tabeli 1.1. Ze wzorów (1.12a), (1.12e) i z tabeli 1.1 wynika bezpośrednio, że dla układów o niejednakowych transmitancjach $z_{12} \neq z_{21}$, przy tym samym prądzie zasilającym J doprowadzanym kolejno do każdej ze stron czwórnika otrzymuje się po drugiej stronie różniące się pomiędzy sobą wartości napięć U_2, U_1.

Gdy wewnątrz czwórnika nie ma źródeł stacjonarnych (niesterowalnych), a we współpracującym z nim układzie jest tylko jedno takie źródło, dołączone np. do zacisków AB, to z równań (1.11) i tabeli 1.1 wynika, że w stanie równowagi sygnał na wyjściu w postaci napięcia U_2 lub prądu $I_2 = 0$ jest równy zeru, gdy $z_{21} = 0$. Poza tym stanem układ jest niezrównoważony i na jego wyjściu występuje sygnał. Przy zasilaniu z drugiej strony, tj. z zacisków DC, napięcie $U_1 = 0$, lub prąd $I_1 = 0$, gdy $z_{12} = 0$. Dla kilku źródeł stacjonarnych w układzie – równe zeru transmitancje czwórnika i stany równowagi układu, którego ten czwórnik jest częścią – mogą występować nierównocześnie i zachodzić dla różniących się kombinacji wartości elementów wewnętrznych układu.

Tabela 1.1. Definicje i podstawowe zależności parametrów roboczych wrót czwórnika liniowego z liniowym obciążeniem i jednym źródłem

Table 1.1. Definitions and basic relations of terminal parameters of linear twoport under work of linear load and single supply source

Parametry			Postać ogólna	Postacie szczególne			
			$\infty > Z_1 > 0, \infty > Z_2 > 0$	$Z_1 = \infty$	$Z_1 = 0$	$Z_2 = \infty$	$Z_2 = 0$
Zastencza impedancja	wejścia	$Z_{AB} = \frac{U_1}{I_1}$	$z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_2} = \frac{\det\mathbf{Z} + Z_2 z_{11}}{z_{22} + Z_2} = Z_{AB}^{\infty} \frac{Z_{CD}^{0} + Z_2}{Z_{CD}^{\infty} + Z_2}$			$Z_{AB}^{\infty} = z_{11}$	$Z_{AB}^{0} = \frac{\det\mathbf{Z}}{z_{22}}$
Zastencza impedancja	wyjścia	$Z_{CD} = \frac{U_2}{I_2}$	$z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_1} = Z_{CD}^{\infty} \frac{Z_{AB}^{0} + Z_1}{Z_{AB}^{\infty} + Z_1}$	$Z_{CD}^{\infty} = z_{22}$	$Z_{CD}^{0} = \frac{\det\mathbf{Z}}{z_{11}}$	$z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_1} = \frac{\det\mathbf{Z} + Z_1 z_{22}}{z_{11} + Z_1}$	
Źródło E lub J zasila wrota 1 –	Napięcie i prąd wyjścia	U_2	$\frac{E}{Z_{AB} + Z_1} z_{21} \frac{Z_2}{Z_{CD} + Z_2}$	0	$\frac{E}{Z_{AB}} \frac{z_{21} Z_2}{Z_{CD}^{0} + Z_2}$	$\frac{E z_{21}}{z_{11} + Z_1}$	0
			$\frac{J Z_1}{Z_{AB} + Z_1} z_{21} \frac{Z_2}{Z_{CD} + Z_2}$	$J \frac{z_{21} Z_2}{z_{22} + Z_2}$	0	$J \frac{Z_1 z_{21}}{z_{11} + Z_1}$	0
		$-I_2$	$\frac{E}{Z_{AB} + Z_1} \frac{z_{21}}{z_{CD} + Z_2}$	0	$\frac{E}{Z_{AB}} \frac{z_{21}}{Z_{CD}^{0} + Z_2}$	0	$\frac{E}{Z_{AB}^{0} + Z_1} \frac{z_{21}}{Z_{CD}}$
			$\frac{J Z_1}{Z_{AB} + Z_1} \frac{z_{21}}{Z_{CD} + Z_2}$	$\frac{J z_{21}}{z_{22} + Z_2}$	0	0	$\frac{J Z_1}{Z_{AB}^{0} + Z_1} \frac{z_{21}}{Z_{CD}}$
Źródło *E* lub *J* zasila wrota *1* –	Napięcie i prąd wejścia	U_1	$\frac{E Z_{AB}}{Z_{AB} + Z_1}$	0	E	$E \frac{z_{11}}{z_{11} + Z_1}$	$\frac{E \det\mathbf{Z}}{\det\mathbf{Z} + Z_1 z_{22}}$
			$J \frac{Z_{AB} Z_1}{Z_{AB} + Z_1}$	$J Z_{AB}$	0	$J \frac{z_{11} Z_1}{z_{11} + Z_1}$	$\frac{J Z_1 \det\mathbf{Z}}{\det\mathbf{Z} + Z_1 z_{22}}$
		I_1	$\frac{E}{Z_{AB} + Z_1}$	0	$\frac{E}{Z_{AB}}$	$\frac{E}{Z_1 + z_{11}}$	$\frac{E z_{22}}{\det\mathbf{Z} + Z_1 z_{22}}$
			$J \frac{Z_{AB} Z_1}{Z_{AB} + Z_1}$	J	0	$\frac{J Z_1}{z_{11} + Z_1}$	$\frac{J Z_1 z_{22}}{\det\mathbf{Z} + Z_1 z_{22}}$

gdzie: $\det \mathbf{Z} = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$

Tak jak poprzednio dla układu nT oraz 4T, również każdą z macierzy **Z** i **Y** czwórnika można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej, tj.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B \tag{1.13}$$

i

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B. \tag{1.14}$$

Na przykład dla macierzy **Z** otrzymuje się:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{AB}^{\infty} & z_{12A} \\ z_{12A} & Z_{CD}^{\infty} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -z_{12B} \\ z_{12B} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.13a}$$

gdzie: $z_{12A} = \frac{1}{2}(z_{12} + z_{21})$

$z_{12B} = \frac{1}{2}(z_{12} - z_{21})$

Składowa $\mathbf{Z}_B$ macierzy **Z** jest macierzą idealnego żyratora o impedancji żyracji z_{12B}.

Ze wzorów (1.11b) i (1.13) wynikają trzy następujące możliwości osiągania przez układ stanu równowagi:

1) $z_{12} = 0$ gdy $z_{12A} = z_{12B}$
2) $z_{21} = 0$ gdy $z_{12A} = -z_{12B}$
3) $z_{12} = 0$, $z_{21} = 0$ gdy $z_{12A} = 0$ i $z_{12B} = 0$.

W ostatniej z tych sytuacji równowaga zachodzi równocześnie dla obu kierunków przetwarzania wielkości na zaciskach wrót czwórnika. Po wydzieleniu w wartościach elementów obu macierzy ich wartości początkowych w stanie równowagi, oznaczonych dolnym indeksem 0 i przyrostów od tego stanu, otrzymuje się:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{AB0}^{\infty} + \Delta_{AB}^{\infty} & z_{12A} \\ z_{12A} & Z_{CD}^{\infty} + \Delta_{CD}^{\infty} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -z_{12B} \\ z_{12B} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.15a}$$

lub dla przyrostów względnych:

$$\mathbf{Z}=\begin{vmatrix} Z_{AB0}^{\infty}\left(1+\varepsilon_{AB}^{\infty}\right) & t_{0A}^{\infty}f_{A}^{\infty} \\ t_{0A}^{\infty}f_{A} & Z_{CD}^{\infty}\left(1+\varepsilon_{CD}^{\infty}\right) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -t_{0B}^{\infty}f_{B}^{\infty} \\ t_{0B}^{\infty}f_{B} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.15b}$$

gdzie:

$\varepsilon_{AB}^{\infty}$, $\varepsilon_{CD}^{\infty}$ – przyrosty względne impedancji rozwarciowych czwórnika,

t_{0A}^{∞}, t_{0B}^{∞} – czułości początkowe impedancji skrośnych z_{12A}, z_{12B}

f_{A}^{∞}, f_{B}^{∞} – współczynniki charakteryzujące ich nieliniowość.

Jeśli układ ma te same moduły transmitancji $|z_{12}|=|z_{21}|$, to przy jednakowych ich znakach, tj. dla $z_{12} = z_{21}$, jest to układ immitancyjny pasywny odwracalny, zaś gdy $z_{12} = - z_{21}$ (np. dla hallotronu o skutecznie skompensowanym napięciu początkowym) jest układem antyodwracalnym. Ze wzorów tabeli 1.1 wynika, że ich napięcia wyjściowe będą się różnić tylko znakiem, zaś impedancje robocze wrót Z_{AB}, Z_{CD} – również wartościami, gdyż impedancje te dla układów odwracalnych maleją wraz ze wzrostem $(z_{12})^2$, a dla hallotronów – rosną.

Dla prądu stałego (DC) i w takim zakresie częstotliwości prądu przemiennego, w którym wpływ składowych reaktancyjnych elementów układu jest pomijalny z błędem dopuszczalnym w danych rozważaniach, tj. dla składowej $\mathrm{Im}(Z_{ij}) \ll \mathrm{Re}(Z_{ij})$, współczynniki macierzy **Z** są czysto rezystancyjne. Mogą one jednak zależeć od częstotliwości (np. wskutek naskórkowości). Równanie (1.11) przyjmuje wówczas następujące postacie macierzowe w zapisie rozwiniętym:

$$\begin{vmatrix} U_{AB} \\ U_{DC} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_{AB} \\ I_{CD} \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} R_{AB}^{\infty} & r_{12} \\ r_{21} & R_{CD}^{\infty} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_{AB} \\ I_{CD} \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

gdzie:

r_{ij} – elementy z_{ij} macierzy $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z_R}$ czwórnika rezystancyjnego

R_{AB}^{∞}, R_{CD}^{∞} – jego rezystancje rozwarciowe: wejściowa i wyjściowa

r_{12}, r_{21} – transmitancje prądowo-napięciowe tego czwórnika.

Równania (1.16) opisują wszystkie czwórniki rezystancyjne liniowe zarówno pasywne, jak i aktywne, bez wewnętrznych źródeł stacjonarnych. Schematy zastępcze takich układów mogą więc zawierać rezystancje oraz źródła sterowane o rzeczywistych współczynnikach, żyratory lub i inne idealne układy podstawowe stosowane współcześnie w teorii obwodów [75-82]. Elementy r_{ij} mogą różnie zależeć od każdej z wielkości wpływających.

1.8. Rodzaje impedancyjnych układów dwuwyjściowych

Stosowane w pomiarach pośrednich 2D impedancyjne układy dwuwyjściowe mogą być zasilane zarówno z jednego jak i z dwu źródeł. Podstawowe ich rodzaje wraz ze schematami przetwarzania sygnałów w kilku przykładach ich realizacji o zasilaniu prądowym i o wyjściach napięciowych podano na rys. 1.7a–f. W układach tych zmiany sygnałów wyjściowych zależą od przyrostów impedancji skrośnych. Każdy z tych przyrostów jest funkcją przyrostów elementów wewnętrznych układu, a te zależą od wielkości wpływających X_1 i X_2. Przy odpowiednim doborze zależności między elementami wewnętrznymi układu i ich przyrostami zależności te mogą się uprościć.

Przykładami układu 2D o pojedynczym zasilaniu jest pętla Andersona z rys. 1.1 o dwu wyjściach oraz mostkowy układ kaskadowy podany dalej na rys. 4.1. Układ o pojedynczym zasilaniu prądowym opisany jest równaniem:

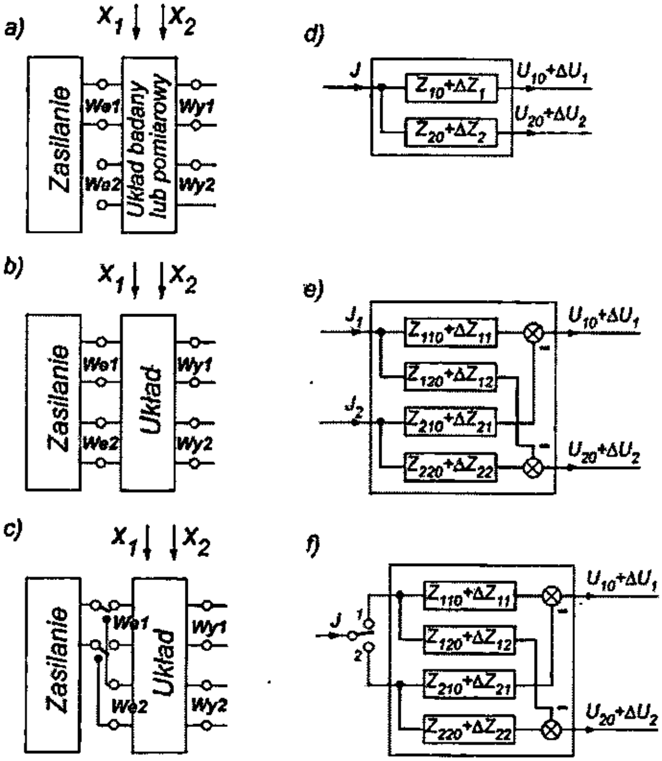
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{10} + \varDelta Z_1 \\ Z_{20} + \varDelta Z_2 \end{bmatrix} [J] \tag{1.17}$$

W układach tych dla początku zakresu $Z_{10} = 0$ oraz $Z_{20} = 0$ i napięcia wyjściowe zależą bezpośrednio od przyrostów $\varDelta Z_1$, i $\varDelta Z_2$. Ograniczenia w ich stosowaniu – to konieczność użycia jednakowych czujników i rozłączanie układu, gdy są one połączone, a dla mostka klasycznego niemożność pomierzenia jednakowych przyrostów w ramionach sąsiednich.

Układ z rys. 1.7b o dwu wejściach i dwu wyjściach można opisywać w różny sposób, zarówno jako cztero-bramowy (4-P), jak i bardziej ogólnie - jako układ o ośmiu końcówkach (8-T). Rozpatrzmy szczególną postać tego układu podaną na rys, 1.8e, tj. o zasilaniu z dwu źródeł prądowych o wydajnościach J_1 i J_2 i dwu wyjściach napięciowych U_1, U_2. Zależności łączące te wielkości w dowolnym układzie liniowym mają następującą postać:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

gdzie: Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} – impedancje skrośne (lub transmitancje) łączące źródła prądowe z wyjściami napięciowymi.



Rys. 1.7. Rodzaje immitancyjnych układów dwuwyjściowych
a) z pojedynczym zasilaniem, b) z podwójnym zasilaniem,
c) z przełączanym zasilaniem, d), e), f.) przetwarzanie sygnałów
we-wy w układach 2D zasilanych prądowo i o wyjściach napięciowych.
Fig.1.7. Types of two output immitance circuits: a) - of single supply,
b) - of double supply, c) - of switched single supply, d), e), f) - I/O signal transmissions in 2D circuits supplied by currents and of voltage outputs.

Układ taki może mieć dwa stany równowagi $U_1 = 0$ oraz $U_2 = 0$ opisane wzorami:

$$Z_{11}J_1 + Z_{12}J_2 = 0$$

$$Z_{21}J_1 + Z_{22}J_2 = 0 \qquad (1.18a,b)$$

Jeden z prądów lub jedna z impedancji skrośnych w każdym z powyższych warunków musi być ujemna. W szczególnym przypadku, gdy $J_1 = -J_2$, otrzymuje się: $Z_{11} = Z_{12}$ oraz $Z_{21} = Z_{22}$. Jeśli przyrosty bezwzględne ΔZ_{ij} impedancji skrośnych wyznaczać od ich wartości Z_{ij0} w stanach równowagi, a przyrosty względne odnieść do wartości dla tych stanów, czyli

$$Z_{11} \equiv Z_{11\,0}(1+\varepsilon_{11}) \equiv Z_{12\,0}(1+\varepsilon_{12})$$

$$Z_{21} \equiv Z_{21\,0}(1+\varepsilon_{21})$$

$$Z_{22} \equiv Z_{22\,0}(1+\varepsilon_{22}) \tag{1.19a-d}$$

to otrzyma się następujące wzory dla napięć wyjściowych, przy założeniu, że składowe obu napięć wyjściowych od obu prądów odejmują się

$$U_1 = J_1\,\Delta Z_{11} - J_2\,\Delta Z_{12} \tag{1.20a}$$

lub

$$U_1 = J_1\,Z_{11\,0}\,\varepsilon_{11} - J_2\,Z_{12\,0}\,\varepsilon_{12} \tag{1.20b}$$

oraz

$$U_2 = J_1\,\Delta Z_{21} - J_2\,\Delta Z_{22} \tag{1.21a}$$

lub

$$U_2 = J_1\,Z_{21\,0}\,\varepsilon_{21} - J_2\,Z_{22\,0}\,\varepsilon_{22} \tag{1.21b}$$

Zaś przy jednakowych prądach źródeł: $J_1 = J_2 \equiv J$ dla przyrostów bezwzględnych i względnych otrzymuje się napięcia:

$$U_1 = J\,(\Delta Z_{11} - \Delta Z_{12}) \tag{1.22a}$$

lub

$$U_1 = J\,(Z_{11\,0}\,\varepsilon_{21} - Z_{12\,0}\,\varepsilon_{2\,3}) \tag{1.22b}$$

oraz

$$U_2 = J\,(\Delta Z_{21} - \Delta Z_{22}) \tag{1.23a}$$

lub

$$U_2 = J\,(Z_{21\,0}\,\varepsilon_{21} - Z_{22\,0}\,\varepsilon_{22}) \tag{1.23b}$$

Aby możliwe były pomiary dwuparametrowe, powinna zachodzić następująca nierówność:

$$\Delta Z_{21} - \Delta Z_{2\,2} \neq \Delta Z_{11} - \Delta Z_{12}$$

Odmianą układu o podwójnym jednakowym zasilaniu jest układ z rys 1.7c. o przełączanym źródle zasilającym. Wymaga on zastosowania na wyjściu układu próbkująco-pamiętającego (Sample&Hold) i uśrednienia dla każdego z wyjść dwu wartości sygnałów uzyskanych przy obu podłączeniach źródła. Wówczas uzyskuje się takie same wyniki jak przy dwu jednakowych źródłach. Przy zasilaniu prądowym i wyjściach napięciowych układ ten opisują wzory (1.22 – 1.23).

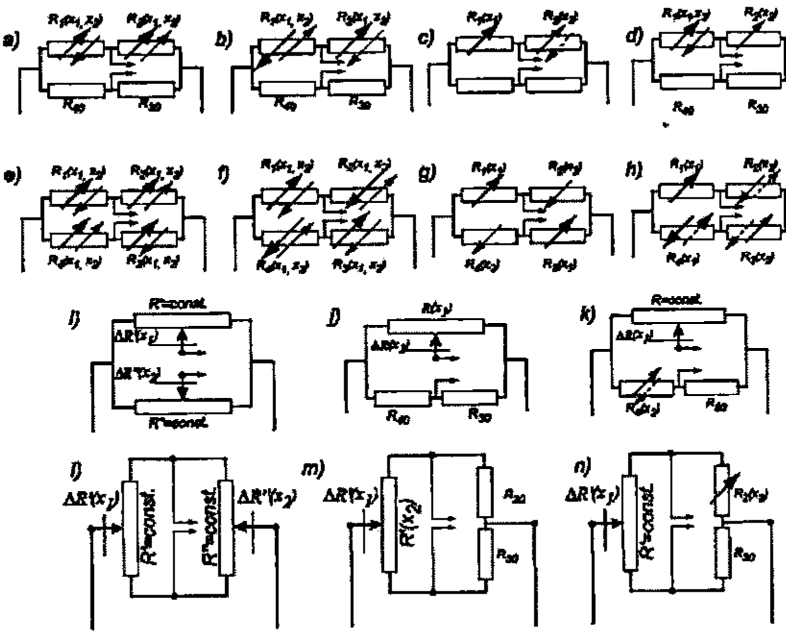
Układy dwuprądowe, poza najprostszą ich wersją – dwu źródeł prądowych zasilających dwa czujniki nie były dotąd szerzej stosowane. Do tej grupy zaliczają się też podane przez autora mostki dwuprądowe i ich napięciowe układy dualne. Problemy realizacji pomiarów 2D z wykorzystaniem różnych postaci układu 4T (czterobiegunnika) i ich właściwości metrologiczne omawia się dalej w treści pracy.

Wzory dla wartości impedancji skrośnych można wyznaczyć dla każdego układu liniowego o znanej strukturze lub znanej macierzy. Szczególnym wypadkiem tego układu jest mostek 4R zasilany obocznie przez źródła prądowe dołączone równolegle do jego ramion przeciwległych, tak jak na rys.1.9b, c.

1.9. Przykłady oddziaływań dwu wielkości na elementy pasywnego układu 4T w postaci mostka czteroramiennego (4R)

Na rys. 1.8 pokazano różne możliwe oddziaływania dwu niezależnych od siebie wielkości na przyrosty rezystancji mostka czteroramiennego. Pominięto tu tylko, jako zbyt trywialny, przypadek najprostszy dwu rezystancji, każdej zależnej selektywnie od jednej tylko wielkości wpływającej. Układy l), m), n) mają inny, bardziej nieliniowy charakter niż pozostałe i nie będą tu analizowane, chociaż też i dla nich można stosować podobne sposoby opisu.

Jednakowe co do znaku i wartości przyrosty rezystancji w ramionach sąsiednich mostka 4R nie dają sygnału na jego wyjściu przy klasycznym zasilaniu po przekątnej. W mostkach dwuprądowych zrównoważonych na początku w obu przekątnych, przy zmianach wielkości x_1, x_2 pojawiają się na wyjściach z przekątnych sygnały wyjściowe różnie zależne od tych wielkości. Na przykład, przy małych przyrostach jeden sygnał zależy od ich różnicy, a drugi – od sumy w ramionach sąsiednich. Trzeba więc przy pomiarach dwu parametrów, dla różnych wypadków z rys. 1.8 stosować różne sposoby zasilania mostka i różne metody pomiaru. Aby wyznaczyć wartości kilku wielkości wpływających na mostek, należy mierzyć nie tylko jego napięcie wyjściowe, ale i inne parametry na jego zaciskach będące różnymi funkcjami zmian składowych immitancji jego ramion. Zazwyczaj nie ma też możliwości rozłączania układu mostka. Można to uzyskać dwojako: bądź poprzez pomiary odpowiedniej liczby parametrów mostka w obwodzie wejściowym lub wyjściowym, bądź na podstawie pomiarów zmian napięć i prądów jego poszczególnych gałęzi. Do dalszych rozważań wybrano pierwszy z tych sposobów.



Rys. 1.8. Zestawienie różnych rodzajów oddziaływań dwu wielkości x_1, x_2 na rezystancje układu 4T w postaci mostka 4R. (Kierunek strzałek: w górę lub w dół oznacza dodatni lub ujemny przyrost. Strzałką grubszą oznaczono wpływ wielkości x_1, strzałką cieńszą lub przerywaną – wpływ wielkości x_2)

Fig. 1.8. Set of possible different type influences of two variables x_1, x_2 on 4R bridge arm resistances (Up and down arrow directions and their thickness means plus or minus sign of increments and influence of the variable x_1 or x_2 respectively)

Zasilanie prądowe mostka preferuje się ponadto z szeregu następujących powodów praktycznych:

– mostki o zasilaniu prądowym mają najbardziej liniowe sygnały wyjściowe w funkcji przyrostów ich rezystancji

– wierzchołki mostka nie muszą pokrywać się z zaciskami doprowadzającymi zasilanie

– wymuszenie prądowe uniezależnia napięcie wyjściowe od rezystancji przewodów doprowadzających to zasilanie .

– zaciski wejściowe i wyjściowe mogą, np. w warunkach przemysłowych, znajdować się w znacznej odległości od siebie i równoczesne wykorzystanie dwu różnych z nich może nie być możliwe lub utrudnione

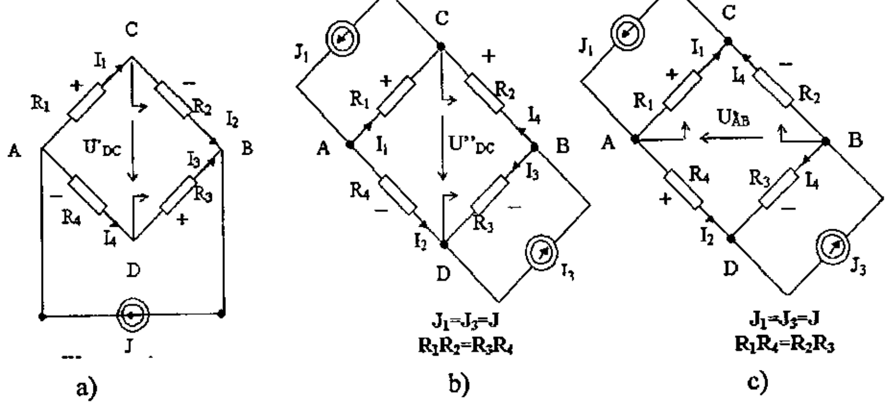
– wymuszenie prądowe stosuje się w automatycznej diagnostyce według standardu IEEE 1194.4 [84], przy użyciu specjalnej, dwuprzewodowej magistrali testującej o mieszanych sygnałach, wbudowywanej do współczesnych scalonych układów analogowo-cyfrowych.

Konieczne stało się więc opracowanie na nowo podstaw teoretycznych różnych zastosowań mostków niezrównoważonych w jednolitym, syntetycznym ujęciu. Jako główną metodę prowadzącą do realizacji tego celu proponuje się traktować mostek klasyczny jak czwórnik typu X o zmiennych rezystancjach wewnętrznych. Jego układ równań ma wówczas współczynniki zależne od rezystancji ramion mostka, które można opisać przez ich względne wartości dla stanu równowagi i przyrosty od tego stanu. Stwarza to możliwość pełniejszego ujęcia różnych problemów teoretycznych i praktycznych występujących przy zastosowaniach mostków, dla różnych pomiarów nie tylko jednej (1D), ale i równocześnie kilku wielkości (ogólnie nD), w tym: wpływów rezystancji w obwodach przekątnych oraz szacowania miar niedokładności parametrów mostka przy dowolnie dużych, niezależnych i znacznie różniących się wartościach przyrostów rezystancji jego ramion.

Dokładny opis możliwości aplikacyjnych mostków jednoprądowo zasilanych w pomiarach kilku parametrów ma szczególne znaczenie, nie tylko przy tworzeniu zarówno dyskretnych, jak i scalonych układów kondycjonowania sygnału, ale też i przy ich użytkowaniu. Temu celowi służy treść rozdziału 2, w którym podano wzory dla parametrów na zaciskach mostków klasycznych w wartościach względnych przy dowolnych przyrostach ich rezystancji, nieopisywane dotąd z punktu widzenia pomiarów wieloparametrowych

1.10. Zarys podstawowych terminów i zależności mostków 4R o prądowym zasilaniu

Zostaną teraz przedstawione trzy spośród możliwych wariantów pracy układu pasywnego 4T. Dokona się tego na przykładzie mostka 4R przy dwu różnych sposobach zasilania prądowego, pokazanych na rys. 1.9. W układzie a) mostek jest zasilany z pojedynczego źródła prądu J, dołączonego klasycznie do przekątnej AB i ma wyjście CD. W układach b) i c) mostek zasila się niekonwencjonalnie, według propozycji autora z dwu źródeł prądowych J_1, J_3 dołączonych równolegle do ramion przeciwległych w kierunku na współdziałanie. Układy te różnią się wyjściami: CD lub AB. Szczegółowe rozważania o ich zastosowaniach w pomiarach parametrów i wielkości sprzężonych poprzedzi podana niżej krótka charakterystyka ich podstawowych właściwości. Wszystkie mostki zasilane ze źródeł prądowych będą tu nazywane ogólnie – mostkami prądowymi. Konsekwentnie z tak przyjętą terminologią układ a) jest mostkiem jednoprądowym, układy b) i c) – to mostki dwuprądowe,



Rys. 1.9. Układy rezystancyjnych mostków czteroramiennych w różny sposób zasilane ze źródeł prądowych i ich warunki równowagi przy prądzie stałym: a) klasyczny układ mostka jednoprądowego, b), c) układy mostków dwuprądowych (Przy prądzie przemiennym w układach występują napięcia i prądy oraz impedancje Z_i w postaci zespolonej).

Fig. 1.9. Four arms resistance bridges differently supplied by current sources and their DC balance conditions: a) - conventional 4R single current supplied bridge, b), c) double current supplied bridges. (In AC circuits all voltages, currents and impedances are expressed by complex numbers)

a rodzaj ich zasilania nazwie się – obocznym. W każdym z mostków dwuprądowych z rys 1.9b) i 1.9c) można też wykorzystywać równocześnie dwa różne wyjścia: z obu przekątnych DC i AB. Z punktu widzenia teorii obwodów mostek jednoprądowy jest czwórnikiem (2P), zaś mostki dwuprądowe są bardzo uproszczonymi układami trójwrotnika (3P), gdy wykorzystuje się tylko jedno z wyjść, lub są czterowrotnikami (4P) przy dwu równoczesnych wyjściach.

Podstawowe wzory dla trzech układów z rys 1.9. przy zasilaniu prądem stałym podano w kolumnach a, b, c tabeli 1.2. Otrzymano je przy założeniu, że zasilające źródła prądowe są idealne i jednakowe, tj. $J_1 = J_2 \equiv J$. Wiersze zawierają kolejno: warunki równowagi układów oraz wzory dla podstawowych parametrów na zaciskach układów. Opisują one dla każdego z wyjść stan biegu jałowego, obciążenie rezystancją oraz zwarcie Podano napięcia wyjściowe rozwarciowe, tj. przy $R_L = \infty$ dla układów a) i b) lub $R_G = \infty$ dla układu c) i przy obciążeniu (R_L lub R_G), prądy wyjściowe i prądy zwarcia (gdy $R_L = 0$ lub $R_G = 0$). Wzory dla mostków dwuprądowych obowiązują przy założeniu, że drugie wyjście jest nieobciążone. Zamieszczono też wzory rezystancji rozwarciowych tych mostków: wejściowej R'^{∞}_{CD} oraz wyjściowych R''^{∞}_{CD} i R^{∞}_{AB}.

Przy powoływaniu się na nie, podaje się wraz z oznaczeniem tabeli numer jej wiersza i literę układu w kolumnie.

Tabela 1.2. Podstawowe zależności rezystancyjnego mostka 4R przy różnych rodzajach prądowego zasilania

Table 1.2. Basic equations of resistance 4T bridge differently supplied from current sources

Parametry wyjściowe		Nr	Mostek jednoprądowy – układ a	Mostek dwuprądowy przy $J_1 = J_3 \equiv J$ – wyjście DC – układ b	Mostek dwuprądowy przy $J_1 = J_3 \equiv J$ – wyjście AB – układ c
Warunki równowagi		1	$R_1R_3 - R_2R_4$	$R_1R_2 - R_3R_4$	$R_1R_4 - R_2R_3$
Napięcia wyjściowe	$R_L = \infty$	2	$U'^{\infty}_{DC} = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i}$	$U''^{\infty}_{DC} = J\frac{R_1R_2 - R_3R_4}{\sum R_i}$	$U^{\infty}_{AB} = J\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{\sum R_i}$
Napięcia wyjściowe	$R_L < \infty \vert_{R_G=\infty}$ 1) $R_G < \infty \vert_{R_L=\infty}$	3	$U'_{DC} = U'^{\infty}_{DC}\frac{R_L}{R_L + R_{CD}}$	$U''_{DC} = U''^{\infty}_{DC}\frac{R_L}{R_L + R_{CD}}$	$U_{AB} = U^{\infty}_{AB}\frac{R_G}{R_G + R_{AB}}$ 1)
Prądy wyjściowe	$R_L = 0$ lub 2) $R_G = 0$	4	$I'^{0}_{DC} = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}$	$I''^{0}_{DC} = J\frac{R_1R_2 - R_3R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}$	$I^{0}_{AB} = J\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$ 2)
Prądy wyjściowe	$R_L < \infty \vert_{R_G=\infty}$ 1) $R_G < \infty \vert_{R_L=\infty}$	5	$I'_{DC} = I'^{0}_{DC}\frac{R'_{CD}}{R_L + R'_{CD}}$	$I''_{DC} = I''^{0}_{DC}\frac{R''_{CD}}{R_L + R''_{CD}}$	$I_{AB} = I^{0}_{AB}\frac{R_{AB}}{R_G + R_{AB}}$ 1)
Rezystancje wyjściowe rozwarciowe $R_G = \infty$, 3) $R_L = \infty$		6	$R'^{\infty}_{CD} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{\sum R_i}$	$R''^{\infty}_{CD} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{\sum R_i}$	$R^{\infty}_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{\sum R_i}$ 3)
Zależności pomiędzy parametrami		7	$U'^{\infty}_{DC} = I'^{0}_{DC}\,R'^{\infty}_{CD}$	$U''^{\infty}_{DC} = I^{0}_{DC}\,R''^{\infty}_{CD}$	$U^{\infty}_{AB} = I^{0}_{AB}\,R^{\infty}_{AB}$
Zależności pomiędzy parametrami		8	$U'_{DC} = I'_{DC}\,R_L$	$U''_{DC} = I''_{DC}\,R_L$	$U_{AB} = I_{AB}\,R_L$

Oznaczenia: numeracja wzorów – wg nr wiersza i oznaczenia literowego układu;
R_L, R_G – rezystancje w przekątnych CD i AB; $\sum R_i \equiv R_1 + R_2 + R_3 + R_4$;
dodatkowy indeks górny: ∞ – bieg jałowy, 0 – zwarcie;

Zależności przy źródłach nieidealnych i o niejednakowych prądach oraz wpływ równoczesnego obciążania obu wyjść mostka dwuprądowego omawia się w rozdziałach 2 i 3.

Podane w wierszu 1 warunki równowagi układów uzyskano ze wzorów dla napięć wyjściowych z wiersza 2 równych zeru. Mają one postać równości iloczynów rezystancji (lub konduktancji). Dla mostka zasilanego klasycznie – (układ a) jest to znana równość iloczynów par rezystancji jego ramion przeciwległych. Dla mostków dwuprądowych jest to równość iloczynów par rezystancji ramion przyległych do wyjścia: w poziomie dla układu b lub w pionie dla układu c z rys. 1.9. Dotychczasowy warunek równowagi (z pozycji 1a tej tabeli) wszystkich jednoźródłowych mostków 4R i dwa nowe warunki równowagi (1b) i (1c) dwuprądowych mostków 4R wyczerpują możliwe trzy kombinacje równości par iloczynów rezystancji ramion czterogałęziowej struktury mostkowej.

Zwraca uwagę duże podobieństwo formy wzorów w każdym z wierszy tabeli 1.2. Mianowniki we wzorach mają taką samą postać, gdyż dotyczą układu mostkowego o takiej samej strukturze połączenia i oznaczeniach impedancji (główny wyznacznik macierzy).

Rezystancje ramion zmieniają swoje pozycje w tych wzorach zależnie od warunku równowagi obowiązującego dla danego układu. Układy b), c) można też przetransformować poprzez dołączenie równoległe do wszystkich gałęzi oczka ACBD źródeł prądowych o wydajności J, skierowanych przeciwnie do poprzednich. Uzyskuje się układy równoważne, również zasilane obocznie dwoma jednakowymi źródłami J, lecz dołączonymi równolegle do ramion R_2 i R_4. Mają one takie same napięcia wyjściowe i warunki równowagi jak poprzednio. Jeśli są wykorzystywane równocześnie dwa wyjścia mostka dwuprądowego, to sygnały powinny być odbierane napięciowo, gdyż obciążanie jednego z wyjść wpływa na stan drugiego z nich. Mostki dwupradowe tym różnią się od klasycznych, że w przeciwieństwie do nich dają sygnał wyjściowy przy jednakowych względnych zmianach rezystancji ramion przylegających do wyjścia. Stąd właśnie powstała proponowana przez autora pierwsza ich nazwa - **antymostki** [27]. Każdorazowo, gdy dokonuje się w mostku jakichkolwiek regulacji rezystancji jego ramion, na przykład w celu spełnienia warunku równowagi, innego dla każdego z układów, trzeba ich aktualne wartości uwzględniać przy posługiwaniu się wzorami opisującymi parametry na zaciskach mostka niezrównoważonego. Po takiej regulacji rezystancje widziane z danej pary zacisków, też będą się różnić pomimo takiej samej postaci wzoru. Dlatego też oznaczono je różnymi indeksami górnymi.

Przy jednakowych prądach źródeł $J_1 = J_3$ oraz dla dowolnych, ale stałych wartości rezystancji trzech ramion mostka R_1, R_2, R_4, rezystancje R_{3a}, R_{3b}, R_{3c} spełniające warunki równowagi dla każdego z układów a, b, c są w ogólnym przypadku różne. Otrzymuje się wówczas czwórki rezystancji podane w tabeli 1.3 wraz z warunkami równowagi tych układów – ostatnia kolumna.

Tabela 1.3. Porównanie warunków równowagi mostka klasycznego i mostków dwuprądowych

Table 1.3. Comparison of balance conditions of single and double current supplied bridges

układ a	R_1	R_2	R_4	R_{3a}	$R_1 R_{3a} = R_2 R_4$
układ b				R_{3b}	$R_1 R_2 = R_{3b} R_4$
układ c				R_{3c}	$R_1 R_4 = R_2 R_{3c}$

Z tabeli 1.3 wynika, że równoczesna równowaga kilku układów zachodzi w następujących przypadkach:

– układy a i b ($R_{3a}= R_{3b}$) – gdy $R_1 = R_4$, $R_2 = R_3$ – symetria rezystancji względem przekątnej AB

– układy a i c ($R_{3a} = R_{3c}$) – gdy $R_1 = R_2$, $R_3 = R_4$ – symetria rezystancji względem przekątnej CD

– układy b i c ($R_{3b} = R_{3c}$) – gdy $R_2 = R_4$, $R_1 = R_3$ – antysymetria

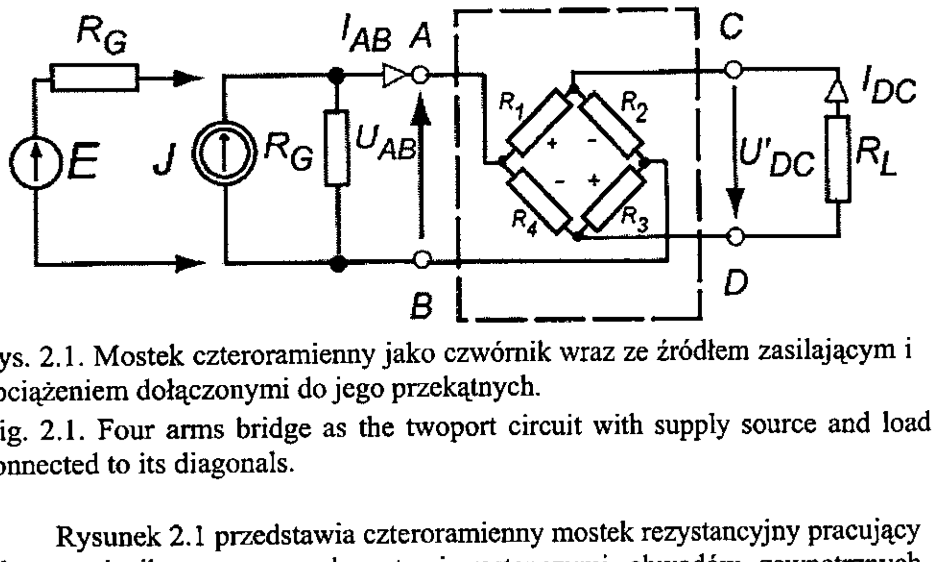
– układy a, b i c ($R_{3a} = R_{3b} = R_{3c}$) – gdy $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ - pełna symetria względem obu przekątnych.

Mostek dwuprądowy o jednakowych ramionach przeciwległych jest więc równocześnie zrównoważony w obu przekątnych, zaś mostek o wszystkich ramionach jednakowych – we wszystkich trzech układach z rys.1.9. Więcej wiadomości o właściwościach mostków dwuprądowych zawiera rozdział 3.

2. REZYSTANCYJNY UKŁAD 4T JAKO CZWÓRNIK X O ZMIENNYCH PARAMETRACH

2.1. Schemat zastępczy i równania podstawowe rezystancyjnego układu 4T jako czwórnika

Rozważymy pracę liniowego, pasywnego i odwracalnego układu 4T jako czwórnika przy prądzie stałym. Składa się on z samych tylko rezystancji. Przy niezwartych wewnętrznie zaciskach podstawowym schematem zastępczym tego układu jest czwórnik rezystancyjny typu X, czyli czteroramienny mostek rezystancyjny bez przekątnych, nazywany dalej w skrócie mostkiem 4R. Jego zależności łatwo jest uogólnić dla dowolnych impedancji, zastępując je odpowiednimi równaniami zmiennej zespolonej lub równaniami operatorowymi.



Rys. 2.1. Mostek czteroramienny jako czwórnik wraz ze źródłem zasilającym i obciążeniem dołączonymi do jego przekątnych.

Fig. 2.1. Four arms bridge as the twoport circuit with supply source and load connected to its diagonals.

Rysunek 2.1 przedstawia czteroramienny mostek rezystancyjny pracujący jako czwórnik wraz ze schematami zastępczymi obwodów zewnętrznych dołączanych do jego przekątnych. Jest to przypadek klasyczny zasilania mostka poprzez zaciski AB z pojedynczego źródła rzeczywistego o schemacie zastępczym prądowym lub napięciowym. Sam mostek znajduje się wewnątrz prostokąta o zaciskach A B C D i jest narysowanym inaczej czwórnikiem rezystancyjnym typu **X**. Jako wyjściowe przyjęto tu napięcie U_{DC} o zwrocie w kierunku zacisku D, gdyż wtedy jest ono dodatnie dla przyrostu $\varepsilon_1 > 0$ rezystancji pierwszego ramienia mostka. Występujące w schematach zastępczych dowolnego układu 4T na rysunku 1.5 rezystancje gałęzi łączących przeciwległe wierzchołki, lub rezystancje szeregowe z dwoma kolejnymi wierzchołkami mostka, nie są tu umieszczone. Natomiast można je uwzględnić w rezystancjach zastępczych obwodów współpracujących.

Przy oznaczeniach prądów i napięć, takich jak na rys 2.1, równania dowolnego czwórnika rezystancyjnego, opisane wzorem macierzowym (1.13), mają następującą postać algebraiczną:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= r_{11} I_{AB} + r_{12} I_{CD}. \\ U_{DC} &= r_{21} I_{AB} + r_{22} I_{CD} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zmiennymi niezależnymi w tych równaniach są prądy I_{AB} oraz $I_{CD} = -I_{DC}$, wpływające do zacisku A strony pierwotnej oraz do zacisku D strony wtórnej czwórnika. Zmiennymi zależnymi są zaś napięcia U_{AB} i U_{DC} , o zwrotach skierowanych do tych zacisków. Dla mostka pasywnego i odwracalnego zachodzi ponadto: $r_{21} = r_{12}$.

Zgodnie z sugestią recenzenta jednej z poprzednich prac, klasyczny układ mostkowy o pojedynczym prądowym zasilaniu jest tu nazywany – **mostkiem jednoprądowym**, mostek zasilany z dwu źródeł prądowych lub z jednego przyłączanego kolejno do dwu różnych par zacisków – **mostkiem dwuprądowym**, zaś oba te rodzaje łącznie – **mostkami prądowymi**. Gdy rezystancja obwodu dołączonego do danej pary zacisków jest znacznie większa od rezystancji wyjściowej układu widzianej z tych zacisków, to układ taki traktuje się jako nieobciążony, czyli o wyjściu napięciowym.

Przedstawiony na rys. 2.1 **mostek czterogałęziowy** składający się z samych tylko rezystancji R_i, jest oznaczany dalej symbolem **4R.** Przy pracy mostka jako czwórnika, do jego równań (2.1) odnosi się **macierz $\mathbf{Z_R}$** o następujących elementach:

$$\mathbf{Z}_R \equiv \begin{vmatrix} R_{AB}^{\infty} & r_{12} \\ r_{21} & R_{CD}^{\infty} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{\sum R_i} & \dfrac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i} \\ \dfrac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i} & \dfrac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{\sum R_i} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

gdzie: $\Sigma R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ – suma rezystancji głównego oczka mostka.

Z zależności elementów tej macierzy od rezystancji mostka wynika, że mają one skończone wartości we wszystkich stanach pracy mostka, w tym i przy jego równowadze. Transmitancje takiego mostka w obu kierunkach są jednakowe, tj. $r_{12} = r_{21}$, a więc i oba stany równowagi zachodzą równocześnie, gdy

$r_{12} = r_{21} = 0$. Macierz $\mathbf{Z}_R$ ma tylko trzy różne elementy, ale transmitancja r_{21} może być zarówno dodatnia jak i ujemna – gdy: $R_1R_3 < R_2R_4$. Dlatego też przy pełnych zakresach zmian wartości rezystancji mostka, w jego opisie nie wystarczy użycie schematów zastępczych czwórnika w postaci trójników typu **T** lub **Π**, składających się z tylko dodatnich rezystancji, gdyż musiały by one zawierać też rezystancje ujemne lub przełącznik zacisków wyjściowych. Trzeba więc do tego celu wykorzystywać czwórnik typu **X**, o czterech immitancjach, którego równania impedancyjne ujmują oba rodzaje przypadków pracy mostka jako czwórnika. Czwórniki **X** nie są wystarczająco szczegółowo omówione w literaturze z teorii obwodów do celów analizy metrologicznej ich pracy. Próby macierzowego opisu współpracy mostków pojawiły się już przed laty w fundamentalnej pracy Hague [1], ale dotyczyły one tylko stanów bliskich równowagi. Stosowano też tam łańcuchowy układ równań, dla którego dwa elementy macierzy stają się nieoznaczone przy równowadze mostka.

2.2. Parametry mostka 4R jako czwórnika typu X i ich związki

2.2.1. Elementy macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}_R$ jako funkcje rezystancji początkowych ramion mostka i ich przyrostów

Rezystancje mostka, oznaczone ogólnie jako R_i, można przedstawić też w następujących, równoważnych sobie dwu postaciach:

$$R_i \equiv R_{i0} + \Delta R_i \equiv R_{i0}\left(1 + \varepsilon_i\right) \tag{2.3}$$

gdzie:

R_i - bieżąca wartość rezystancji dowolnego ramienia mostka $R_i \geq 0$;

$i \subset (1,...4)$;

R_{i0} – wartości początkowa rezystancji R_i przy równowadze mostka,

ΔR_i, $\varepsilon_i \equiv \dfrac{\Delta R_i}{R_{i0}}$ – przyrosty: bezwzględny i względny rezystancji R_i od jej wartości początkowej R_{i0}.

Parametry R_{i0}, ΔR_i, ε_i są dalej nazywane łącznie - składowymi rezystancji R_i. Ten sposób przedstawiania rezystancji R_i poprzez wartości jej składowych wykorzystuje się w opisach czujników oraz w opisach zmian rezystancji schematu zastępczego badanego układu od jego wartości początkowych. Rezystancje statyczne obiektów fizycznych są dodatnie tj. zawsze $R_i \geq 0$. Ich przyrosty ujemne mają więc dolną granicę: $\Delta R_i \geq -R_{i0}$, czyli $\varepsilon_i \geq -1$. Przyrosty dodatnie są zaś w praktyce ograniczone dopuszczalną mocą rezystancji i wartościami wielkości na nie oddziałujących.

Mostki niezrównoważone służą bądź do bezpośrednich pomiarów przyrostów ΔR_i, ε_i i prostych ich kombinacji np. różnicy, bądź do pomiarów pośrednich innych wielkości X_i,, które wg znanych funkcji wpływają na te przyrosty. Przy klasycznym zasilaniu dołączonym do jednej z przekątnych mostka, na przykład do zacisków AB z rys. 2.1, i wyjściu z zacisków DC, pojedynczą wielkość wpływającą na rezystancje mostka wyznacza się z pomiaru napięcia wyjściowego U'_{DC} lub prądu I_{DC} przy stałych parametrach źródła, lub ze stosunku sygnału wyjściowego do jednego z prądów , bądź napięć mostka, np. na wejściu lub w gałęzi czujnika. Przy badaniu kilku wielkości za pośrednictwem układu mostkowego trzeba mierzyć różnie od nich zależne zmiany kilku parametrów na zaciskach zewnętrznych mostka, takich, z których można wyznaczyć te wielkości.

Po uwzględnieniu wartości początkowych R_{i0} i przyrostów względnych ε_i wszystkich rezystancji R_i mostka, wg drugiej postaci ze wzoru (2.3) otrzymuje się następującą zależność dla **transmitancji prądowo – napięciowej r_{21}**:

$$r_{21} = \frac{(R_1 R_3 - R_2 R_4)}{\sum R_i} \equiv t_0' \bullet f'(\varepsilon_i) \tag{2.4}$$

lub

$$r_{21} = R_{10}\,\frac{R_{30}}{\sum R_{i0}} \bullet \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}{1 + \dfrac{\sum R_{i0}\varepsilon_i}{\sum R_{i0}}}, \tag{2.5}$$

gdzie:

$r_{21} \equiv t_0' f'(\varepsilon_i)$ – transmitancja prądowo-napięciowa nieobciążonego mostka, tj. gdy $I_{DC} = 0$,

$R_i \equiv R_{i0} + \Delta R_i \equiv R_{i0}(1 + \varepsilon_i)$ – bieżące wartości rezystancji jego ramion;

R_{i0} – wartości początkowa rezystancji R_i przy równowadze mostka,

ε_i, $R_{i0}\,\varepsilon_i \equiv \Delta R_i$ – jej przyrosty: względny i bezwzględny ($\varepsilon_i \geq -1$),

$\sum R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ – suma rezystancji głównego oczka A B C D;

$\sum R_{i0}$ – jej wartość w równowadze;

$R_{10}\dfrac{R_{30}}{\sum R_{i0}} \equiv t_0^{\prime}$ – czułość początkowa transmitancji r_{21} względem $f'(\varepsilon_i)$ dla $\varepsilon_i \to 0$

$$\text{o wymiarze: } [\, t_0^{\prime} \,] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{mA}} = \mathrm{om}$$

$f'(\varepsilon_i) \equiv \dfrac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\Delta M(\varepsilon_i)}$ – funkcja niezrównoważenia transmitancji r_{21}

$\Delta L(\varepsilon_i)$, $\Delta M(\varepsilon_i) \equiv \varepsilon_{\Sigma R}$ – przyrosty licznika i mianownika tej funkcji.

W sensie fizycznym wyrażenie $\Delta M(\varepsilon_i)$ jest względnym przyrostem $\varepsilon_{\Sigma R}$ rezystancji sumarycznej $\sum R_i$ głównego oczka mostka od jej wartości początkowej $\sum R_{i0}$ w stanie równowagi. Transmitancja r_{21} i jej funkcja $f'(\varepsilon_i)$ mogą teoretycznie przyjmować wartości w zakresie (- ∞, + ∞). W praktyce ich krańcowe wartości wynikają z występujących w mostku przyrostów ε_i, z mocy dopuszczalnych dla rezystancji mostka oraz z maksymalnego dopuszczalnego napięcia źródła prądowego lub maksymalnego prądu źródła napięciowego.

Transmitancja r_{21} = 0 wtedy, gdy jej funkcja niezrównoważenia $f'(\varepsilon_i) = 0$. Może to zachodzić dla wielu różnych kombinacji przyrostów ε_i. Jako podstawowy przyjmuje się stan, gdy wszystkie przyrosty ε_i=0. Z postaci r_{21} we wzorze (2.2), powtórzonej też w (2.4), otrzymuje się dobrze znany **warunek równowagi czteroramiennego mostka rezystancyjnego** o liniowych elementach

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \tag{2.6}$$

Przy zmieniających się kilku ramionach warunek ten może zachodzić dla różnych kombinacji ich rezystancji. Warunek ten nie zależy ani od wartości parametrów zastępczych gałęzi źródła (tj. od jego prądu J lub napięcia E i od rezystancji wewnętrznej R_G), ani od rezystancji obciążenia R_L w całych zakresach zmian tych parametrów. Jest to właściwość samego układu o strukturze w postaci mostka. Warunek ten jest równoważny sygnałowi na wyjściu mostka równemu zero jedynie przy jednym źródle w układzie dołączonym do przekątnej.

Dla stosowanych tu oznaczeń, jako stan odniesienia przyjmuje się warunek równowagi dla rezystancji początkowych w postaci zależności:

$$R_{10} R_{30} = R_{20} R_{40} \tag{2.6a}$$

Równowaga zostanie utrzymana lub pojawi się ponownie, gdy przyrosty ε_i rezystancji mostka spełnią warunek:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_2 \varepsilon_4 = 0 \qquad (2.6b)$$

Z prawej części wzoru (2.5) wynika też, w jaki sposób transmitancja r_{21} mostka zależy od znaków przyrostów ε_i poszczególnych rezystancji jego ramion od tego stanu. Jako przykład, na rysunku 2.1 podano znaki, przy których układ mostka rozrównoważa się w tym samym kierunku. Są one przeciwne w ramionach sąsiednich.

Wzory dla elementów macierzy $\mathbf{Z_R}$ mostka 4R zestawiono w wierszach 7 –.9 tabel 2.1a i 2.1b wraz z ich przypadkami szczególnymi: a) – i). Wszystkie te parametry są funkcjami względnych wartości początkowych rezystancji: R_{10}, $R_{20} \equiv mR_{10}$, $R_{40} \equiv nR_{10}$ i $R'_{30} = m\,n\,R_{10}$. w stanie równowagi, oraz ich przyrostów względnych ε_i od tego stanu. Są to parametry podstawowe na zaciskach samego czteroramiennego mostka, tj. bez obwodów zewnętrznych dołączonych do jego przekątnych.

Dla różnych przypadków mostka 4R wzory z wiersza 7 w obu tabelach opisują jego transmitancję r_{21}, wzory z wiersza 8 – rozwarciową rezystancję wejściową R^{∞}_{AB}, zaś z wiersza 9 – rozwarciową rezystancję wyjściową R^{∞}_{CD} tj. przy przerwanym obwodzie zasilania lub zasilaniu z idealnego źródła prądowego. Kolumna pierwsza tabeli 2.1a zawiera przypadek ogólny, gdy zmieniają się niezależnie cztery rezystancje ramion mostka. W pozostałych kolumnach tej tabeli podano przypadki szczególne, w tym dla trzech różnych wariantów zmieniającej się tylko jednej pary rezystancji – kolumny a, b ,c oraz dla przyrostu pojedynczej rezystancji R_1 – kolumna d. Pomimo że omawiany mostek 4R ma prostą strukturę, wiele wzorów obu tabel jest o dosyć skomplikowanej postaci i dlatego zastosowano dodatkowe oznaczenia, w tym dla względnych przyrostów ε_{ij} sum rezystancji ramion *i* oraz *j* mostka.

Wszystkie trzy parametry zewnętrzne mostka jako czwórnika zawierają ten sam czynnik $(1+\Delta M)^{-1}$, w którym ΔM stanowi względny przyrost sumy rezystancji głównego oczka A B C D mostka. Wzory upraszczają się w następujących przypadkach:

- dla małych wartości przyrostów ε_i
- przy wzajemnym ich powiązaniu oraz
- przy symetrii rezystancji początkowych mostka względem jednej lub obu jego przekątnych.

Jako przykłady, w kolumnie e) oraz g) uzupełniającej tabeli 2.1b podano wzory dla mostka o zmiennych dwu ramionach R_1, R_2 i czterech ramionach oraz przeciwnych znakach przyrostów sąsiednich rezystancji; przy małych ich wartościach – kolumna f), zaś w kolumnach h) – i) – wzory dla mostka o jednakowych rezystancjach początkowych ramion. W ostatnim przypadku wzór dla transmitancji r_{21} staje się trywialnie prosty, a wejściowe rezystancje rozwarciowe obu stron są stałe. Ze wzorów obu tabel można łatwo wyznaczyć wzory również dla innych przypadków szczególnych zarówno początkowych rezystancji ramion mostka jak i ich przyrostów.

Wzory w obu tabelach mają numery według oznaczeń wierszy i kolumn. I tak dla różnych przypadków nieobciążonego mostka wzory (2.7), (2.7a – d) oraz (2.7e – j) z wiersza 7 opisują jego transmitancję r_{21}, zaś wzory (2.8) oraz (2.9) i ich warianty z literami – rezystancje rozwarciowe R_{AB}^{∞} i R_{CD}^{∞}.

Podaną w wierszu 7 tabeli 2.1a czułość początkową t'_0 transmitancji r_{21} łatwo przekształcić do postaci:

$$t'_0 = R_{10}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{2.10a}$$

Stąd wynika, że czułość ta rośnie monotonicznie wraz z m oraz n i osiąga maksimum: $t'_0 = R_{10}$ gdy $m \to \infty$ oraz $n \to \infty$. Dla $m = 1$, $n = 1$ czułość wynosi: $t'_0 = 0{,}25 R_{10}$.

Przy bardzo małych przyrostach ε_i funkcja niezrównoważenia $f'(\varepsilon_i)$ ze wzoru (2.5) linearyzuje się, gdyż wówczas iloczyny przyrostów $\varepsilon_i \varepsilon_j$ w jej liczniku ΔL i przyrost ΔM jej mianownika stają się pomijalnie małe i transmitancja r_{21} wynosi:

$$r_{21} \approx t'_0 \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4\right) \tag{2.10b}$$

Przy znakach przyrostów względnych różniących się tak jak na rys. 2.1 i jednakowych ich modułach $|\varepsilon_i|$ dla wszystkich rezystancji mostka 4R, uzyskuje się dobrze znaną zależność, że wartość r_{21} jest proporcjonalna do liczby ramion zmiennych (dla 2 ramion – dwukrotnie, a dla 4 – czterokrotnie większa niż dla jednego ramienia). Mostek pozostaje natomiast w równowadze dla jednakowych przyrostów względnych ε_i bądź wszystkich rezystancji, bądź ich par występujących po obu stronach warunku równowagi (2.6).

Ogólne wzory (2.8) i (2.9) z pierwszej kolumny tabeli 2.1a dla rezystancji rozwarciowych R_{AB}^{∞} i R_{CD}^{∞} mostka 4R, można również przedstawić w nieco prostszej formie – poprzez przyrosty względne sum rezystancji jego ramion

Tabela 2.1a: Elementy macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z_R}$ mostka 4R jako czwórnika w wartościach względnych jego rezystancji – przypadek ogólny i 4 przypadki szczególne.
Table 2.1a. Matrix $\mathbf{Z_R}$ elements of the 4R bridge as the twoport given in relative values of arms resistances – general case and four particular cases.

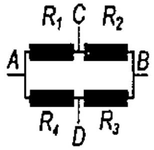
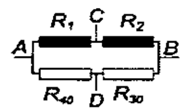
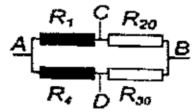
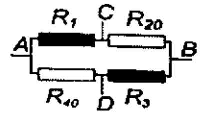
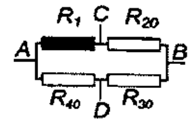
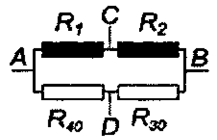
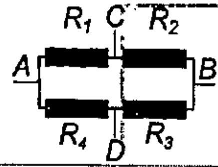
Nr	Element macierzy **Z** mostka	Symbol	Przypadek ogólny:	Przypadki szczególne			
			zmienne: $R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2=mR_{20}(1+\varepsilon_2)$ $R_3=mnR_{10}(1+\varepsilon_3)$ $R_4=nR_{10}(1+\varepsilon_4)$ 	**a.** zmienne: R_1, R_2 	**b.** zmienne: R_1, R_4 	**c.** zmienne: R_1, R_3 	**d.** zmienne: R_1 
7	**Transmitancja:** $r_{21}=\frac{U'_{DC}}{J}=\frac{R_1R_3-R_2R_4}{\sum R_i}\equiv t_0 f(\varepsilon_i)\equiv t_0\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\Delta M(\varepsilon_i)}$	r_{21}	$t_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}{(1+n)(1+m)}}$	$t_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}}$	$t_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{1+\dfrac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{(1+n)(1+m)}}$	$t_0\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_3}{1+\dfrac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}}$	$t_0\dfrac{\varepsilon_1}{1+\dfrac{\varepsilon_1}{(1+n)(1+m)}}$
	czułość początkowa: $\partial r_{21}/\partial f(\varepsilon_i)\big\vert_{\varepsilon_i\to 0}$	t_0	$t_0=R_{10}\dfrac{mn}{(1+m)(1+n)}$				
	przyrost mianownika funkcji $f(\varepsilon_i)$	ΔM	$\Delta M=\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M_{12}=\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M_{14}=\dfrac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M_{13}=\dfrac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M_1=\dfrac{\varepsilon_1}{(1+n)(1+m)}$
8	**Rezystancja wejściowa** $r_{11}=\frac{(R_1+R_2)(R_4+R_3)}{\sum R_i}\equiv R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB})$	$r_{11}\equiv R_{AB}^{\infty}$	$\dfrac{R_{10}(1+m+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)\,n\,(1+m+\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}{(1+m)(1+n)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}$ $=R_{AB0}\dfrac{(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{43})}{1+\Delta M}$ $\langle R_L=\infty\rangle$	$R_{AB0}\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}}{1+\Delta M_{12}}$	$R_{AB0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+m}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_4}{1+m}\right)}{1+\Delta M_{14}}$	$R_{AB0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+m}\right)\left(1+\dfrac{m\varepsilon_3}{1+m}\right)}{1+\Delta M_{13}}$	$R_{AB0}\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+m}}{1+\Delta M_1}$
	w równowadze	R_{AB0}	$R_{AB0}=R_{10}\dfrac{n(1+m)}{(1+n)}$				
	jej przyrost względny	ε_{AB}	$\dfrac{1}{1+\Delta M(\varepsilon_i)}\left(\dfrac{n\varepsilon_{12}+\varepsilon_{43}}{1+n}+\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{43}\right)$ gdzie: $\varepsilon_{12}\equiv\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}$; $\varepsilon_{43}\equiv\dfrac{\varepsilon_4+m\varepsilon_3}{1+m}$	$\dfrac{n(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}$	$\dfrac{n\varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4\left(\dfrac{1+n}{1+m}\right)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+n\varepsilon_4}$	$\dfrac{n\varepsilon_1+m\varepsilon_3+m\varepsilon_1\varepsilon_3\left(\dfrac{1+n}{1+m}\right)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+mn\varepsilon_3}$	$\dfrac{n\varepsilon_1}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1}$
9	**Rezystancja wyjściowa** $r_{22}=\frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{\sum R_i}\equiv R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD})$	$r_{22}\equiv R_{CD}^{\infty}$	$\dfrac{R_{10}(1+n+\varepsilon_1+n\varepsilon_4)\,m\,(1+n+\varepsilon_2+n\varepsilon_3)}{(1+m)(1+n)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}$ $=R_{CD0}\dfrac{(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})}{1+\Delta M}$ $\langle R_G=\infty\rangle$	$R_{CD0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+n}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_2}{1+n}\right)}{1+\Delta M_{12}}$	$R_{CD0}\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}}{1+\Delta M_{14}}$	$R_{CD0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+n}\right)\left(1+\dfrac{n\varepsilon_3}{1+n}\right)}{1+\Delta M_{13}}$	$R_{CD0}\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+n}}{1+\Delta M_1}$
	w równowadze	R_{CD0}	$R_{CD0}=R_{10}\dfrac{m(1+n)}{(1+m)}$				
	jej przyrost względny	ε_{CD}	$\dfrac{1}{1+\Delta M(\varepsilon_i)}\left(\dfrac{m\varepsilon_{14}+\varepsilon_{23}}{1+m}+\varepsilon_{14}\varepsilon_{23}\right)$ gdzie: $\varepsilon_{14}\equiv\dfrac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}$; $\varepsilon_{23}\equiv\dfrac{\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{1+n}$	$\dfrac{m\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\dfrac{1+m}{1+n}\right)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}$	$\dfrac{m(\varepsilon_1+n\varepsilon_4)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+n\varepsilon_4}$	$\dfrac{m\varepsilon_1+n\varepsilon_3+n\varepsilon_1\varepsilon_3\left(\dfrac{1+m}{1+n}\right)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+mn\varepsilon_3}$	$\dfrac{m\varepsilon_1}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1}$

Tabela 2.1b: Elementy macierzy $\mathbf{Z_R}$ mostka w przypadkach szczególnych: przyrosty ε_i przeciwne parami, małe oraz przy jednakowych rezystancji początkowych R_{i0} ramion mostka.

Table 2.1b. Matrix $\mathbf{Z_R}$ elements of the 4R bridge as the twoport of particular cases: if increments of two resistances R_1, R_2 are small or if all initial resistances R_{i0} are equal.

Nr	Elementy macierzy $\mathbf{Z_R}$ mostka	Symbol	Mostek o dowolnym m i n			Mostek podwójnie symetryczny: $m=n=1$		
			$R_1=R_{10}(1+\varepsilon)$ $R_2=mR_{10}(1-\varepsilon)$  $R_{40}=n\,R_{10}$ $R_{30}=m\,n\,R_{10}$	zmienne cztery rezystancje R_i $R_1=R_{10}(1+\varepsilon)$; $R_2=mR_{10}(1-\varepsilon)$, $R_3=mnR_{10}(1+\varepsilon)$; $R_4=nR_{10}(1-\varepsilon)$ 1) $\left\lvert\sum\Delta R_{i0}\right\rvert \ll \sum R_{i0}$ czyli: $\left\lvert\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(m\varepsilon_3+\varepsilon_4)\right\rvert \ll (1+m)(1+n)$		$R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$, $R_2=R_{10}(1+\varepsilon_2)$, $R_3=R_{10}(1+\varepsilon_3)$, $R_4=R_{10}(1+\varepsilon_4)$ 2) $\left\lvert\sum\Delta R_{i0}\right\rvert \ll \sum R_{i0}$ czyli $\left\lvert\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i\right\rvert \ll 4$		
	Przyrosty rezystancji R_i	ε_i	e) para przeciwnych: $\varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2$	f) ε_i bardzo małe 1) i niezależne	g) 2 pary przeciwnych: $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon$; $\varepsilon_2=\varepsilon_4=-\varepsilon$	h) ε_i dowolnej wielkości	i) ε_i bardzo małe 2) i niezależne	j) $\varepsilon_i==(-1)^{i+1}\varepsilon$
7	**Transmitancja -prądowo-napięciowa**	r_{21}	$t_0'\dfrac{2\varepsilon}{1+\dfrac{\varepsilon(1-m)}{(1+n)(1+m)}}$	$\approx t_0'(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)$	$t_0'\dfrac{4\varepsilon}{1+\dfrac{\varepsilon(1-m)(1-n)}{(1+n)(1+m)}}$	$t_0'\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}}$	$\approx t_0'(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)$	$t_0'\,4\varepsilon==\varepsilon R_{10}$
	jej czułość początkowa	t_0'	$t_0'=R_{10}\dfrac{mn}{(1+m)(1+n)}$			$t_0'=\dfrac{R_{10}}{4}$		
	przyrost mianownika r_{21}	ΔM	$\Delta M_{12}=\dfrac{\varepsilon(1-m)}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M_{12}\approx 0$	$\dfrac{\varepsilon(1-m)(1-n)}{(1+n)(1+m)}$	$\Delta M=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}$	$\Delta M\approx 0$	$\Delta M=0$
8	**Rezystancja wejściowa** $R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB})$	R_{AB}^{∞}	$R_{AB0}\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon(1-m)}{(1+m)}}{1+\Delta M_{12}}$	$\approx R_{AB0}\left(1+\dfrac{n(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)+\varepsilon_4+m\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}\right)$	$R_{AB0}\dfrac{1-\left(\varepsilon\dfrac{1-m}{1+m}\right)^2}{1+\Delta M}$	$R_{10}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}\right)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}$	$\approx R_{10}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}\right)$	R_{10}
	w równowadze	R_{AB0}	$R_{AB0}=R_{10}\dfrac{n(1+m)}{(1+n)}$			R_{10}		
	jej przyrost względny	ε_{AB}	$\dfrac{n\varepsilon(1-m)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon(1-m)}$	$\approx\dfrac{n(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)+\varepsilon_4+m\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}$	$-\dfrac{\left(\varepsilon\dfrac{1-m}{1+m}\right)^2+\Delta M}{1+\Delta M}$	$0{,}25\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}$	$\approx\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}$	0
9	**Rezystancja wyjściowa** $R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD})$	R_{CD}^{∞}	$R_{CD0}\dfrac{1-\left(\dfrac{\varepsilon}{1+n}\right)^2}{1+\Delta M_{12}}$	$\approx R_{CD0}\left[1+\dfrac{m(\varepsilon_1+n\varepsilon_4)+\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}\right]$	$R_{CD0}\dfrac{1-\left(\varepsilon\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2}{1+\Delta M}$	$R_{10}\dfrac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_4}{2}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2}\right)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}$	$\approx R_{10}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}\right)$	R_{10}
	w równowadze	R_{CD0}	$R_{CD0}=R_{10}\dfrac{m(1+n)}{1+m}$			R_{10}		
	jej przyrost względny	ε_{CD}	$\dfrac{-\varepsilon(1-m)+\varepsilon^2\left(\dfrac{1+m}{1+n}\right)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon(1-m)}$	$\approx\dfrac{m(\varepsilon_1+n\varepsilon_4)+\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{(1+n)(1+m)}$	$-\dfrac{\left(\varepsilon\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2+\Delta M}{1+\Delta M}$	$0{,}25\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+(\varepsilon_1+\varepsilon_4)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}$	$\approx\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}$	0

sąsiednich, które też zdefiniowano w tej tabeli. Otrzymuje się wówczas następujące postacie iloczynowe:

$$R_{AB}^{\infty} = R_{AB\,0}\left(1+\varepsilon_{AB}\right) = R_{AB\,0}\frac{\left(1+\varepsilon_{12}\right)\left(1+\varepsilon_{34}\right)}{\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)} \tag{2.11}$$

$$R_{CD}^{\infty} = R_{CD\,0}\left(1+\varepsilon_{CD}\right) = R_{CD\,0}\frac{\left(1+\varepsilon_{14}\right)\left(1+\varepsilon_{23}\right)}{\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)} \tag{2.12}$$

gdzie:

$R_{AB\,0} = R_{10}\dfrac{n(1+m)}{1+n}$ – początkowa rezystancja wejściowa mostka w stanie jego równowagi

$R_{CD\,0} = R_{10}\dfrac{m(1+n)}{1+m}$ – początkowa rezystancja wyjściowa mostka w stanie równowagi

$\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{CD}$ – przyrosty względne wejściowej i wyjściowej rezystancji rozwarcia;

$\varepsilon_{ij} \equiv \dfrac{\Delta R_i + \Delta R_j}{R_{i0} + R_{j0}}$ – przyrost względny sumy rezystancji $R_i + R_j$ ramion *i, j* mostka

$\varepsilon_{\Sigma R} \equiv \Delta M(\varepsilon_i) = \dfrac{\varepsilon_{12}+n\varepsilon_{43}}{1+n} = \dfrac{\varepsilon_{14}+m\varepsilon_{23}}{1+m}$ – przyrost względny rezystancji $\sum R_i$ oczka głównego mostka.

W przypadkach szczególnych również i te wzory upraszczają się.

2.2.2. Parametry zewnętrzne nieobciążonego jednoprądowego mostka 4R

Podstawowymi parametrami zewnętrznymi mostka zasilanego po przekątnej z idealnego źródła prądowego są: napięcie wyjściowe bez obciążenia i obie rezystancje rozwarcia widziane z zacisków. AB oraz CD. Z ich wartości można też wyznaczyć bezpośrednio prąd zwarcia i napięcie wejściowe. Robocze parametry zewnętrzne mostka obciążonego i przy zasilaniu ze źródła o skończonej rezystancji, omawia się w następnych punktach tego rozdziału.

Przy zadanej wartości prądu *J* źródła, **napięcie wyjściowe nieobciążonego mostka jednoprądowego** w wartościach względnych otrzymuje się ze wzoru (2.1) z uwzględnieniem postaci transmitancji r_{21} ze wzoru(2.5):

$$U_{DC}^{\infty} \equiv U'_{DC} = J r_{21} \equiv T_0' \bullet f'(\varepsilon_i) \tag{2.13}$$

gdzie:

J – prąd zasilania mostka

$r_{21} \equiv t_0' f'(\varepsilon_i)$ – transmitancja prądowo-napięciowa nieobciążonego mostka jednoprądowego

$T_0^{\infty} \equiv T_0' = J t_0' = J R_{10} \frac{mn}{(1+m)(1+n)}$ – początkowa czułość napięciowa mostka,

wymiar $[T_0]$ = 1V lub mV/% (2.13a)

$f'(\varepsilon_i) = \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + mn\varepsilon_3 + n\varepsilon_4}{(1+m)(1+n)}}$ – funkcja

niezrównoważenia transmitancji r_{21}. (2.13b)

Do wzoru (2.13) podstawia się właściwe dla danego przypadku postacie transmitancji r_{21} z tabel 2.1a lub 2.1b.

Zależności rezystancji wejściowej R_{AB}^{∞} i wyjściowej R_{CD}^{∞} dla różnych przypadków jednoprądowego, nieobciążonego mostka czterogałęziowego podano w wierszach (2.8) i (2.9) tabel 2.1a i 2.1b.

Wyjściowy prąd zwarcia wyznacza się zaś z zależności: $I_{DC\,J}^{0} = \frac{U'_{DC}}{R_{CD}^{\infty}}$. Inne przypadki pracy mostka 4R jako czwórnika zostaną omówione poniżej.

2.2.3. Rozszerzony warunek równowagi i zależności pomiędzy parametrami zewnętrznymi mostka 4R.

Z postaci rezystancji początkowych R_{AB0}, R_{CD0} mostka w stanie równowagi, podanych w tabeli 2.1a i w objaśnieniu wzorów (2.11) i (2.12) wynika, że ich iloczyn też spełnia warunek równowagi, tj.:

$$R_{AB0} R_{CD0} = mn\, R_{10}^2 = R_{10} R_{30} = R_{20} R_{40} \tag{2.14}$$

Jest to **rozszerzony warunek równowagi mostka czteroramiennego.** Nie był on dotychczas podawany w literaturze dotyczącej mostków.

Trzy parametry zewnętrzne tego mostka, tj. początkowe rezystancje rozwarciowe i czułość t'_0 transmitancji prądowo-napięciowej powiązane są prostą zależnością:

$$\frac{R_{AB0}R_{CD0}}{\sum R_{i0}} = t_0^{/} \tag{2.15}$$

Oba powyższe proste związki można z powodzeniem stosować w praktyce pomiarowej, na przykład do upraszczania różnych wzorów mostka i do syntezy parametrów schematu zastępczego układu w postaci „czarnej skrzynki" o niedostępnym bezpośrednio wnętrzu i nieznanej strukturze, dokonywanej tylko na podstawie pomiarów na jego zaciskach. Z wartości rezystancji R_{AB0}, R_{CD0} dla stanu równowagi tego układu można wyznaczyć wartości współczynników ramion zastępującego go mostka czterogałęziowego 4R:

$$m = \frac{r_{CD0}\left(r_{AB0}-1\right)}{r_{CD0}-1} \tag{2.16a}$$

oraz

$$n = \frac{r_{AB0}\left(r_{CD0}-1\right)}{r_{AB0}-1} \tag{2.16b}$$

gdzie:

$$r_{AB0} \equiv \frac{R_{AB0}}{R_{10}}; \quad r_{CD0} \equiv \frac{R_{CD0}}{R_{10}}.$$

Jednoznaczne i dodatnie wartości m i n otrzymuje się tylko, gdy równocześnie $r_{AB0} > 1$ i $r_{CD0} > 1$ lub $r_{AB0} < 1$ i $r_{CD0} < 1$. W szczególnym przypadku, gdy $r_{AB0} = r_{CD0} = 1$ można wykazać, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań powiązanych ze sobą warunkiem: $n\,m = 1$, czyli $n = 1/m$. Zaś przy $r_{AB0} = r_{CD0} \neq 1$ otrzymuje się dwa jednakowe współczynniki ramion mostka, tj. $n = m = r_{AB0}$.

Wyznaczone z wzorów (2.16a,b) wartości m i n umożliwiają, przy zadanej rezystancji początkowej R_{10}, znalezienie pozostałych rezystancji mostka czteroramiennego 4R zastępującego w stanie równowagi układ o wyodrębnionych dwu parach zacisków. Czułość początkową t'_0 transmitancji r_{21} znajduje się ze wzoru (2.14) lub (2.10). Dla obu powyżej podanych przypadków szczególnych o jednakowych rezystancjach wejściowych wynosi ona odpowiednio: $t_0^{/} = R_{10}\frac{m}{(1+m)^2}$ oraz $t_0^{/} = R_{10}\frac{m^2}{(1+m)^2}$. Pierwsza z nich osiąga maksimum, gdy $m = 1$, a druga, gdy $m \to \infty$.

Jeśli poza R_{10} określona jest również początkowa rezystancja któregoś innego ramienia np. drugiego czujnika, to otrzymane wartości m i n mogą służyć jako kryterium: czy badany układ w postaci „czarnej skrzynki" daje się zastąpić schematem tylko czterogałęziowego mostka, czy też muszą istnieć dodatkowe rezystancje dołączane do przekątnych mostka jak na rysunku 1a, lub szeregowo z jego wierzchołkami jak na rys. 1d.

Ze wzorów (2.11) i (2.12) i ich objaśnień wynika też, że przyrosty względne ε_{AB} oraz ε_{CD} rezystancji rozwarciowych R^{∞}_{AB} i R^{∞}_{CD} mostka nie są od siebie niezależne, ale powiązane poprzez wspólne wyrażenie $1+\varepsilon_{\Sigma R}$ następującą zależnością:

$$\frac{1+\varepsilon_{CD}}{1+\varepsilon_{AB}}=\frac{\left(1+\varepsilon_{14}\right)\left(1+\varepsilon_{23}\right)}{\left(1+\varepsilon_{12}\right)\left(1+\varepsilon_{34}\right)}=\left(\frac{1+m}{1+n}\right)^{2}\frac{\left(1+n+\varepsilon_{1}+n\,\varepsilon_{4}\right)\left(1+n+\varepsilon_{2}+n\varepsilon_{3}\right)}{\left(1+m+\varepsilon_{1}+m\,\varepsilon_{2}\right)\left(1+m+\varepsilon_{4}+m\varepsilon_{3}\right)} \qquad (2.16c)$$

Dla mostka o jednakowych rezystancjach początkowych ($m = n = 1$) zależność ta częściowo upraszcza się:

$$\frac{1+\varepsilon_{CD}}{1+\varepsilon_{AB}}=\frac{\left(2+\varepsilon_{1}+\varepsilon_{4}\right)\left(2+\varepsilon_{2}+\varepsilon_{3}\right)}{\left(2+\varepsilon_{1}+\varepsilon_{2}\right)\left(2+\varepsilon_{4}+\varepsilon_{3}\right)} \qquad (2.16d)$$

W takim mostku przyrosty ε_{AB} oraz ε_{CD} będą wówczas sobie równe, gdy $\varepsilon_1=\varepsilon_3$ lub $\varepsilon_2=\varepsilon_4$.

Określenie wartości i przyrostów względnych poszczególnych rezystancji mostka niezrównoważonego na podstawie pomiarów tylko na jego zaciskach wejściowych i wyjściowych, nie jest w ogólnym przypadku proste, gdyż prowadzi do układu równań nieliniowych, a dla układów aktywnych jest niejednoznaczne [8].

2.2.4. Linearyzacja zmian parametrów zewnętrznych mostka 4R

Liniową zależność funkcji niezrównoważenia $f'(\varepsilon_i)$ czteroramiennego mostka można uzyskać nie tylko przy małych, ale też przy dużych przyrostach ε_i jego rezystancji. Przyrosty te muszą jednak występować równocześnie w co najmniej dwu jego ramionach i spełniać tzw. **ogólne warunki linearyzacji,** które autor sformułował po raz pierwszy w pracach [31,35,37]. Warunki te otrzymuje się ze wzorów definicyjnych w pierwszej kolumnie wierszy (2.8) lub (2.9) tabeli 2.1a gdy przyrosty $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{34}$, lub $\varepsilon_{14}=\varepsilon_{23}$. Przyrosty rezystancji ramion mostka muszą wówczas być powiązane jedną z następujących dwu zależności:

$$\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 = \varepsilon_4 + m\varepsilon_3 \tag{2.17a}$$

lub

$$\varepsilon_1 + n\varepsilon_4 = \varepsilon_2 + n\varepsilon_3 \tag{2.17b}$$

Przy spełnianiu każdego z tych warunków uzyskuje się istotne uproszczenia wzorów opisujących parametry mostka. Otrzymuje się wówczas na przykład, że: $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{\Sigma R}$ lub $\varepsilon_{CD} = \varepsilon_{14} = \varepsilon_{\Sigma R}$. Łatwo też sprawdzić, że po podstawieniu każdego z nich do wzoru (2.5), w liczniku i mianowniku funkcji niezrównoważenia $f'(\varepsilon_i)$ występuje wspólny wielomian podlegający skróceniu i funkcja ta staje się zależna liniowo od różnicy tylko dwu przyrostów ε_i. Dla warunku (2.17a) jest to wyrażenie: $1 + m + \varepsilon_1 + m\varepsilon_2$, a transmitancja r_{21} mostka i względny przyrost jego rezystancji wejściowej ε_{AB} wynoszą wówczas:

$$r_{21} = R_{10}\frac{n}{1+n}(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \tag{2.18a}$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m} \tag{2.18b}$$

Jeśli przyrosty spełniają drugi warunek wg wzoru (2.17 b), to otrzymuje się:

$$r_{21} = R_{10}\frac{m}{1+m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{2.19a}$$

oraz przyrost względny rezystancji wyjściowej:

$$\varepsilon_{DC} = \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n} \tag{2.19b}$$

Zależność (2.11) opisująca rezystancję wejściową R_{AB}^{∞} mostka nieobciążonego staje się więc liniowa przy spełnieniu warunku (2.17a), zaś zależność (2.12) rezystancji wyjściowej R_{CD}^{∞} – przy warunku (2.17 b).

Powyższych, ogólnych warunków linearyzacji transmitancji prądowo-napięciowej i jednej rezystancji wejściowej wrót mostka autor nie spotkał we wcześniejszej literaturze. Warunki te obejmują też różne prostsze związki pomiędzy przyrostami rezystancji ramion mostka jako przypadki szczególne.

Jeśli któryś z warunków (2.17a) lub (2.17b) ma być spełniony, to w ogólnym przypadku tylko trzy przyrosty mogą być od siebie niezależne. Czwarty musi już zależeć liniowo i w określony sposób od pozostałych. Jest to jednak trudne do realizacji w praktyce. Łatwiej jest powiązać przyrosty ze sobą parami poprzez ich odpowiednie zależności od wspólnych wielkości wpływających. Można np. bardzo prosto i w określonym stosunku zmniejszyć przyrost względny rezystancji poprzez dodanie doń stałej rezystancji szeregowej. Innym rozwiązaniem, nadającym się do stosowania np. w przetwornikach tensometrycznych siły lub ciśnienia, jest umieszczanie czujników w miejscach elementu sprężystego różnie naprężanych w znanym stosunku.

W obu parach zależności (2.18a) i (2.18b) oraz (2.19a) i (2.19b) występują po trzy przyrosty ε_i. Aby wyznaczyć osobno każdy z nich, niezbędne jest więc jeszcze jedno równanie. Ale na przykład dla warunku (2.17a) przyrost ε_{DC} rezystancji wyjściowej jest nieliniową funkcją przyrostów $\varepsilon_1, \varepsilon_4$. Sytuacja upraszcza się, gdy przyrosty spełniają jeden z warunków (2.17a) lub (2.17b) i są jeszcze odpowiednio ze sobą powiązane parami, np. poprzez wielkości wspólnie na nie wpływające. Wówczas linearyzacja wg warunku (2.16a) zachodzi, gdy:

$$\varepsilon_1 = m\varepsilon_3 \text{ i } \varepsilon_4 = m\varepsilon_2 \qquad sign\,\varepsilon_2 = -sign\,\varepsilon_1 \qquad (2.20a)$$

lub

$$\varepsilon_1 = -m\varepsilon_2 \text{ i } \varepsilon_4 = -m\varepsilon_3 \qquad sign\,\varepsilon_4 = -sign\,\varepsilon_1 \qquad (2.20b)$$

W pierwszym z tych przypadków para przyrostów dodatnich jest ograniczona jedynie dopuszczalną mocą rezystancji mostka, lub przez parametry źródła zasilania. Drugi przypadek – to na przykład mostek o wyjściu ze styków ślizgowych dwu potencjometrów. Ich krańce ograniczają moduły przyrostów rezystancji, które muszą spełniać warunek: $|\varepsilon_i| \leq 1+m$.

Różne przypadki zależności pomiędzy przyrostami dwu i jednej pary rezystancji mostka przy linearyzacji jego napięcia wyjściowego zestawiono w tabeli 2.2.

Liniowe zależności transmitancji i jednej z rezystancji zewnętrznych mostka od przyrostów rezystancji jego ramion stanowią cenną właściwość, przydatną do wykorzystania w pomiarach. Opisaną tu linearyzację wykorzystywano dotąd tylko przy pomiarach jednej wielkości i w przypadkach szczególnych, np. dla mostka o jednakowych rezystancjach początkowych. Przykładem są tu mostki z czujnikami potencjometrycznymi oraz jeden z układów wejściowych analogowo-cyfrowych programowalnych układów

Tabela 2.2: Warunki liniowości napięcia wyjściowego niezrównoważonego jednoprądowego mostka 4R.

Table 2.2. Linearity conditions of the output voltage of the unbalanced single current suplied 4R bridge.

	Parametr	Nr	Ogólny warunek liniowości 1		Nr	Ogólny warunek liniowości 2	
			$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{34}$			$\varepsilon_{14} = \varepsilon_{23}$	
Zależności między przyrostami rezystancji ramion		1	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4 = m(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$ lub $\Delta R_1 + \Delta R_2 = \frac{\Delta R_4 + \Delta R_3}{n}$		2	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = n(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ lub $\Delta R_1 + \Delta R_4 = \frac{\Delta R_2 + \Delta R_3}{m}$	
Napięcie wyjściowe			$U'_{DC} = JR_{10}\frac{n}{1+n}(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$			$U'_{DC} = JR_{10}\frac{m}{1+m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$	
Przypadki sprzężenia przyrostów	Znak		+ +	- -		+ +	- -
	Dwie pary	1a	$\varepsilon_1 = m\varepsilon_3$	$\varepsilon_4 = m\varepsilon_2$	2a	$\varepsilon_1 = n\varepsilon_3$	$\varepsilon_2 = n\varepsilon_4$
	Jedna para	1b	+ +		2b	+ +	0
			$\varepsilon_1 = m\varepsilon_3$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$		$\varepsilon_1 = n\varepsilon_3$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$
	Dwie pary	1c	+ -	- +	2c	+ -	- +
			$\varepsilon_1 = -m\varepsilon_2$	$\varepsilon_4 = -m\varepsilon_3$		$\varepsilon_1 = -n\varepsilon_4$	$\varepsilon_2 = -n\varepsilon_3$
	Jedna para	1d	+ -		2d	+ -	0
			$\varepsilon_1 = -m\varepsilon_2$	$\varepsilon_3 = \varepsilon_3 = 0$		$\varepsilon_1 = -n\varepsilon_4$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$
	Mostek uproszczony	1e	$m=1$ lub	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ $\Delta R_1 + \Delta R_2 = \frac{\Delta R_3 + \Delta R_4}{n}$	2e	$n=1$ lub	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$ $\Delta R_1 + \Delta R_4 = \frac{\Delta R_2 + \Delta R_3}{m}$
	Mostek uproszczony	1f	$m=1, n=1$	$\Delta R_1 + \Delta R_3 = \Delta R_2 + \Delta R_4$	2f	$m=1, n=1$	$\Delta R_1 + \Delta R_3 = \Delta R_2 + \Delta R_4$

kondycjonowania sygnałów, opisany w [21]. Zawiera on w przeciwległych ramionach mostka dwa jednakowe czujniki rezystancyjne.

Mostki nie są dotychczas stosowane pojedynczo do równoczesnych pomiarów dwu wielkości. Wykorzystywano jedynie wpływ drugiej wielkości w sposób ograniczony i z reguły niejawny na wyjściu, na przykład do kompensacji, lub korekcji temperaturowych zmian czułości w przetwornikach z czujnikami różnicowymi przy małych przyrostach rezystancji. W wielu tensometrycznych przetwornikach naprężeń do tego celu bezpośrednio służą, zależne tylko od temperatury, zmiany rezystancji wejściowej mostka symetrycznego, [8–10], [17].

Możliwość zastosowania zlinearyzowanych mostków klasycznych w pomiarach dwu przyrostów rezystancji i wielkości na nie różnie oddziałujących, będzie opisana szczegółowo w rozdziale 4.

2.3. Parametry robocze mostka 4R jako czwórnika przy dowolnym zasilaniu i obciążeniu

2.3.1. Rodzaje opisów pracy mostka niezrównoważonego

Rozpatrzymy teraz pracę mostka rezystancyjnego 4R w przypadku ogólnym wraz ze schematami zastępczymi układów dołączonych do jego przekątnych przedstawionych na rys. 2.1. W równaniach (2.3) rezystancyjnego czwórnika liniowego, gdy jest on odwracalny, zachodzi zależność $r_{12} = r_{21}$ i przy oznaczeniach jak na rysunku 2.1 otrzymuje się:

$$\begin{vmatrix} U_{AB} \\ U_{DC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{AB}^{\infty} & r_{21} \\ r_{21} & R_{CD}^{\infty} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{AB} \\ -I_{DC} \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

Jeśli również parametry zastępcze współpracujących z mostkiem układów zewnętrznych są liniowe, lub można je zlinearyzować (czyli są niezależne od ich prądów i napięć), to podane poprzednio wzory dla elementów macierzy $\mathbf{Z_R}$ można wykorzystać przy wyznaczaniu prądów, i napięć oraz rezystancji wejściowych obu stron mostka jako czwórnika z rysunku 2.1, we wszystkich wariantach jego współpracy z układami dołączanymi na wejściu i wyjściu. Wielkości na zaciskach są też nazywane **parametrami roboczymi** [80]. Prądy, napięcia i moce wszystkich gałęzi układu z rys 2.1 zależą zarówno od wartości początkowych R_{i0} rezystancji mostka i ich przyrostów ε_i od stanu równowagi, jak i od parametrów obwodów dołączonych do przekątnych. Wzory te upraszczają się dla przypadków szczególnych mostka oraz jego współpracy z układami zewnętrznymi. Rodzaje tych przypadków są trojakiego pochodzenia, gdyż wynikają z:

- dodatkowych relacji pomiędzy rezystancjami początkowymi mostka (symetrie, antysymetria i inne)
- zależności pomiędzy przyrostami rezystancji mostka
- sposobu współpracy mostka z oboma dołączonymi doń obwodami.

Dwa rodzaje tych przypadków, lub nawet wszystkie trzy, mogą występować równocześnie. Wzory opisujące elementy macierzy samego mostka dla pierwszych dwu z nich podano w tabelach 2.1a i 2.1b, zaś dla kilku sposobów współpracy – omówiono dalej w tekście.

Wzory opisujące wielkości i parametry na zaciskach mostka jako czwórnika można przedstawiać na dwa równoważne sobie sposoby:

- bezpośrednio jako funkcje rezystancji R_i jego ramion
- poprzez elementy macierzy $\mathbf{Z_R}$ równań impedancyjnych mostka jako czwórnika, pośrednio zależnych od tych rezystancji.

Drugi ze sposobów, jako bardziej ogólny, jest przydatny do opisu pomiarów wieloparametrowych. Oba rodzaje wzorów można podawać też w wartościach względnych, odniesionych do wartości w stanie równowagi mostka.

2.3.2. Opis parametrów roboczych mostka 4R poprzez rezystancje jego ramion

Jest to klasyczny rodzaj opisu. Wielkości robocze na zaciskach mostka przy dowolnych rezystancjach obwodów zasilania i obciążenia wyznacza się bezpośrednio z praw Kirchoffa lub innymi metodami analizy układów. W monografii [2], dla napięcia wyjściowego podano następujący wzór:

$$U_{DC} = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{\Sigma R_i + \frac{1}{R_G}(R_1+R_2)(R_3+R_4) + \frac{1}{R_L}(R_1+R_4)(R_2+R_3) + \frac{A}{R_GR_L}} \tag{2.22a}$$

gdzie: $A = \Sigma R_iR_jR_k = R_1R_2(R_3+R_4) + R_3R_4(R_1+R_2) = \ldots$

Licznik wyrażenia (2.22a) ma zawsze taką samą postać. Mianownik zależy od wartości rezystancji R_i mostka oraz rezystancji zastępczych R_G i R_L obwodów z nim współpracujących. Przy skończonych wartościach obu tych rezystancji występują w mianowniku wszystkie kombinacje iloczynów po trzy rezystancje R_i. Gdy $R_G \to \infty$, to drugi i czwarty jego składnik stają się pomijalne, zaś gdy $R_L \to \infty$ to dotyczy to dwu ostatnich składników.

Ze wzoru (2.22a) wynika bezpośrednio, że napięcie wyjściowe jest największe dla mostka nieobciążonego i o wymuszonym prądzie J, tj. gdy $R_G \to \infty$ i

$R_L \to \infty$. Wówczas mianownik sprowadza się do samej tylko sumy rezystancji ΣR_i mostka, tak jak we wzorze (2.20). Przy innych warunkach pracy mianownik jest większy, gdyż ma dodatkowe dodatnie składniki. Jeśli tylko $R_G \neq \infty$ bądź $R_L \neq \infty$, to występują w nim iloczyny różnych par rezystancji R_i mostka.

Wzór (2.22a) można przekształcić też do postaci zawierającej parametry źródła rzeczywistego o napięciowym schemacie zastępczym. Poprzez proste podstawienie $J = ER_G^{-1}$ otrzymuje się [2]:

$$U_{DC} = E\frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{R_G \Sigma R_i + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + \frac{R_G}{R_L}(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + \frac{A}{R_L}} \tag{2.22b}$$

Gdy $R_L \to \infty$ lub $R_G = 0$ mianownik upraszcza się. Przy stałym napięciu źródła E napięcie wyjściowe U_{DC} jest największe, gdy oba te przypadki zachodzą równocześnie – patrz punkt 2.10.

Parametry robocze na zaciskach obciążonego mostka można też opisywać w podobny sposób, jak elementy jego macierzy $\mathbf{Z_R}$. Wzór (2.22a) przyjmuje wówczas postać ogólną, podobną do wzoru (2.13):

$$U_{DC} \equiv T_0\, f_{UJ}(\varepsilon_i) \tag{2.23}$$

gdzie: $T_0 \equiv J\dfrac{R_{10}\,R_{30}}{M_{UJ0}} = \dfrac{E}{R_G}\dfrac{R_{10}\,R_{30}}{M_{UJ0}}$ – robocza czułość początkowa napięcia wyjściowego mostka przy rezystancji wewnętrznej źródła $R_G > 0$ i dowolnym obciążeniu $R_L > 0$.

$f_{UJ}(\varepsilon_i) \equiv \dfrac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1 + \Delta M_L(\varepsilon_i)}$ – robocza funkcja niezrównoważenia napięcia wyjściowego mostka wraz z układami współpracującymi,

$\Delta L(\varepsilon_i) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4$ – licznik tej funkcji

$\Delta M_L(\varepsilon_i) \equiv \dfrac{\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)}{M_{UJ0}}$ – przyrost względny jej mianownika

$M_{UJ} \equiv M_{UJ0} + \Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)$ – mianownik wzoru (2.21a) z wyodrębnioną jego wartością w równowadze mostka i przyrostem bezwzględnym od tego stanu.

Licznik $\Delta L(\varepsilon_i)$ roboczej funkcji $f_{UJ}(\varepsilon_i)$ niezrównoważenia mostka jest taki sam jak dla r_{21} we wzorze (2.5) i dla napięcia wyjściowego jednoprądowego mostka nieobciążonego U'_{DC} we wzorze (2.13), zaś przyrost $\Delta M_L(\varepsilon_i)$ mianownika tej funkcji zależy od stopnia niezrównoważenia mostka i od wszystkich rezystancji w układzie.

Powyższe wzory można też przedstawiać w wartościach względnych rezystancji mostka. W tym celu, dla rezystancji zastępczych R_G i R_L obwodów współpracujących z mostkiem wprowadza się następujące współczynniki:

$$\frac{R_G}{R_{10}} \equiv g \qquad\qquad \frac{R_L}{R_{10}} \equiv l \tag{2.24a, b}$$

Zaś dla stosunków tych rezystancji do rezystancji zewnętrznych mostka w równowadze, przyjęto oznaczenia:

$$\frac{R_G}{R_{AB0}} \equiv k_G = \frac{g\,(1+n)}{n\,(1+m)}, \qquad \frac{R_L}{R_{CD0}} \equiv k_L = \frac{l\,(1+m)}{m\,(1+n)} \tag{2.24c,d}$$

Przy rezystancjach układu w wartościach względnych i dodatkowych oznaczeniach przyrostów ich sum, takich jak we wzorach (2.11), (2.12), otrzymuje się inną, niestety, jeszcze bardziej rozbudowaną postać wzoru (2.22a):

$$U_{DC} = \frac{J R_{10} mn\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4\right)}{\begin{array}{c}(1+n)(1+m)\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)+g^{-1}n(1+m)^2(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{43})+l^{-1}m(1+n)^2(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})+\\ +mn(gl)^{-1}\left[(1+n)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{43})+n(1+m)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{12})\right]\end{array}} \tag{2.25}$$

Czułość początkowa T_0 napięcia U_{DC} ze wzoru (2.23) wyrażona w wartościach względnych wynosi:

$$T_0 = J R_{10}\frac{mn}{\left[1+n+\frac{n}{g}(1+m)\right]\left[1+m+\frac{m}{l}(1+n)\right]} = J R_{10}\frac{mn}{(1+n)(1+m)\left(\frac{k_G}{1+k_G}\right)\left(\frac{k_L}{1+k_L}\right)} \tag{2.26a}$$

Przy określonym prądzie źródła J oraz parametrach m i n mostka, czułość ta jest największa, gdy współczynniki opisujące rezystancje obwodów zewnętrznych $k_G \to \infty$ oraz $k_L \to \infty$. Równa się ona wówczas T'_0.

Dla źródła o schemacie napięciowym mianownik we wzorze (2.22b) jest iloczynem $R_G\, M_{UJ}$. Stąd wynika, że czułość początkowa ma następującą postać:

$$T_0 = E \frac{m\,n}{\left[g(1+n)+n(1+m)\right]\left[1+m+\frac{m}{1}(1+n)\right]} = E\frac{m}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+k_G)\left(\frac{k_L}{1+k_L}\right)} \tag{2.26b}$$

Ze wzorów tych wynika, że przy określonym napięciu źródłowym E tę samą czułość początkową T_0 można uzyskać dla wielu kombinacji współczynników m i n lub k_L i k_G. Gdy $k_G = 0$ i $k_L \to \infty$, czułość ta nie zależy od n, jest największa dla $m = 1$ i wynosi $0{,}25E$. Tak więc w dolnych ramionach mostka można wówczas zmieniać poziom rezystancji oraz dokonywać regulacji warunku równowagi lub przesunięcia zera zakresu pomiarowego i nie ma to wpływu na czułość T_0.

Przyrost mianownika $\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)$ dla ogólnego przypadku współpracy mostka jako czwórnika z obwodami zewnętrznymi jest skomplikowaną funkcją jego rezystancji początkowych R_{i0} i ich przyrostów ε_i, oraz rezystancji źródła R_G i rezystancji obciążenia R_L. Jest to przyrost wyznacznika głównego macierzy Z układu 4T w postaci czworoboku zupełnego, składającego się z mostka i jego przekątnych. Dla układu rezystancyjnego funkcję tą można ogólnie zapisać jako:

$$\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i) = \Sigma \frac{\partial M_{UJ}}{\partial R_i} R_{i0}\varepsilon_i + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 M_{UJ}}{\partial R_i \partial R_j} R_{i0} R_{j0}\varepsilon_i\varepsilon_j + \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i \neq k}} \frac{\partial^3 M_{UJ}}{\partial R_i \partial R_j \partial R_k} R_{i0} R_{j0} R_{k0}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \tag{2.26c}$$

Zawiera ona łącznie aż 14 składników (4 + 6 + 4), tu nie podanych w jawnej postaci ze względu na obszerność wyrażeń. Ograniczymy się tylko do ich omówienia. Składniki wzoru (2.26c) o wartościach bezwzględnych znacznie mniejszych niż dla pozostałych, mogą być pominięte. Przy małych względnych przyrostach rezystancji $|\varepsilon_i| < 1$ w pierwszej kolejności dotyczy to składników ostatniej sumy. – o potrójnych iloczynach tych przyrostów. Jako następne można pominąć składniki o podwójnych iloczynach, gdy są znacznie mniejsze od pozostałych. Przyrost mianownika staje się wówczas, podobnie jak dla transmitancji r_{21}, liniową funkcją przyrostów rezystancji mostka. Wartość tego przyrostu i czułość początkowa napięcia wyjściowego są jednak inne niż we wzorze (2.20). Wreszcie przy bardzo małych wszystkich trzech sumach ze wzoru (2.28), tj. dla $|\varepsilon_i| << 1$, cały przyrost $\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)$ mianownika staje się pomijalny w stosunku do jego wartości przy równowadze mostka.

Rezystancje R_G, R_L obwodów zewnętrznych dołączonych w przekątnych wpływają też na zastępcze tzw. robocze rezystancje wejściowe R_{AB}, R_{CD} na zaciskach mostka 4R. W [2] podano następujące postacie wzorów:

$$R_{AB} = \frac{R_L (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + A}{R_L \Sigma R_i + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \tag{2.27}$$

oraz

$$R_{DC} = \frac{R_G (R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + A}{R_G \Sigma R_i + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \tag{2.28}$$

Prąd wyjściowy mostka wyznacza się z prostej zależności $I_{DC}=U_{DC}R_L^{-1}$, i ze wzorów (2.22a), (22b). Dla rezystancji obciążenia $R_L = 0$ otrzymuje się **wyjściowy prąd zwarcia** I_{DC}^0. w dwu następujących postaciach:

$$I_{DC}^0 = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + \frac{A}{R_G}} = E\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{R_G(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + A} \tag{2.29a,b}$$

gdzie, jak poprzednio:

$$A = \sum R_i R_j R_k = R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2) = \ldots$$

Z dotychczas podanych wzorów wynika, że w ogólnym wypadku współpracy mostka z obwodami zewnętrznymi, wszystkie jego parametry robocze zawierają składnik A będący sumą potrójnych iloczynów rezystancji jego ramion. Gdy $R_G = \infty$ lub $R_L = \infty$, to we wzorach na parametry robocze mostka występują już tylko iloczyny zawierające po dwie rezystancje początkowe R_{i0} i ich przyrosty ε_i.

Wszystkie parametry robocze mostka niezrównoważonego można opisać też w wartościach względnych rezystancji początkowych jego ramion i ich przyrostów. Są one jednak dla ogólnego wypadku zbyt skomplikowane do analizy i stosowania, szczególnie przy niezależnych zmianach kilku rezystancji ramion mostka. Mogą zaś być użyteczne w praktyce przy numerycznym wyznaczaniu elementów macierzy mostka lub gdy upraszczają się dla przypadków szczególnych. Autor proponuje inny, bardziej ogólny niż poprzedni, pośredni opis pracy mostka jako czwórnika – poprzez elementy jego macierzy **Z** i wartości względne rezystancji obwodów współpracujących. Opisu tego nie stosowano dotąd w podstawowej literaturze o mostkach niezrównoważonych.

2.3.3. Opis parametrów roboczych mostka poprzez elementy jego macierzy $\mathbf{Z}_R$

Ten rodzaj opisu dotyczy dowolnego układu pracującego jako czwórnik o jednym źródle zasilania i jednym wyjściu, a więc również i mostka 4R jako szczególnego przypadku. Z podstawowych zależności dla parametrów liniowego czwórnika zestawionych w tabeli 1.1 i ze wzorów (1.12a–e),wynika, że dla źródła zasilania o prądowym schemacie zastępczym napięcie wyjściowe obciążonego układu odwracalnego (czyli gdy $U_{DC} = R_L I_{DC}$) wynosi:

$$U_{DC} = J \frac{R_G R_L r_{21}}{\left(R_G + R_{AB}^{\infty}\right)\left(R_L + R_{CD}^{\infty}\right) - r_{21}^2} \tag{2.30a}$$

Zaś dla rzeczywistego źródła napięciowego, po prostym podstawieniu $J = ER_G^{-1}$, wzór ten przekształca się do postaci:

$$U_{DC} = E \frac{R_L r_{21}}{\left(R_G + R_{AB}^{\infty}\right)\left(R_L + R_{CD}^{\infty}\right) - r_{21}^2} \tag{2.30b}$$

Wzory te upraszczają się istotnie przy wyjściu napięciowym tj. dla $R_L \to \infty$, a ponadto pierwszy z nich przy idealnym zasilaniu prądowym tj. gdy $R_G \to \infty$, a drugi – przy idealnym zasilaniu napięciowym, tj. gdy $R_G = 0$.

Dla mostka niezrównoważonego transmitancja r_{21} oraz rezystancje rozwarciowe R_{AB}^{∞}, R_{CD}^{∞} są funkcjami przyrostów ε_i rezystancji jego ramion. Rezystancja wewnętrzna źródła R_G i rezystancja odbiornika R_L są zazwyczaj stałe. Uwzględniając postacie elementów macierzy $\mathbf{Z}_R$ mostka i prądowy schemat zastępczy źródła rzeczywistego można np. w celu sprawdzenia ze wzoru (2.30a) otrzymać wzór (2.22a).

Po uwzględnieniu wzorów definicyjnych rezystancji R_{AB}^{∞}, R_{CD}^{∞} z tabeli 2.1a i współczynników k_G, k_L wg (2.24a,b), wzory (2.30a,b) przekształcają się do postaci:

$$U_{DC} = J \frac{r_{21}}{\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right)\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right) - \frac{r_{21}^2}{R_G R_L}} \tag{2.31a}$$

oraz

$$U_{DC} = \frac{E}{R_G} \frac{r_{21}}{\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right)\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right) - \frac{r_{21}^2}{R_G R_L}} \tag{2.31b}$$

Iloczyn $R_G R_L$ można też zastępować wyrażeniami: $gl R_{10}^2$ lub $k_G\, k_L R_{AB\,0} R_{CD\,0}$.

Roboczą **rezystancję wejściową mostka obciążonego** wyznacza się z równań (2.1) lub (1.12). Po uwzględnieniu, że: $U_{DC} = I_{DC} R_L$ oraz $U_{AB} = I_{AB} R_{AB}$, wynosi ona:

$$R_{AB} = R_{AB}^{\infty} - \frac{r_{21}^2}{R_{CD}^{\infty} + R_L} = R_{AB}^{\infty}\left(1 - \frac{r_{21}^2}{R_{AB}^{\infty}\left(R_{CD}^{\infty} + R_L\right)}\right) \tag{2.32}$$

Rezystancja R_{AB} jest więc zawsze mniejsza niż R_{AB}^{∞} i maleje szybko wraz ze wzrostem stopnia niezrównoważenia mostka reprezentowanym przez r_{21}^2 oraz przy zmniejszaniu się rezystancji obciążenia R_L. Dla transmitancji $r_{21} \neq 0$ rezystancja wejściowa R_{AB} jest najmniejsza przy zwarciu na wyjściu ($R_L = 0$) i wynosi:

$$R_{AB}^{0} = R_{AB}^{\infty} - \frac{r_{21}^2}{R_{CD}^{\infty}} = R_{AB}^{\infty}\left(1 - \frac{r_{21}^2}{R_{AB}^{\infty}\, R_{CD}^{\infty}}\right) \tag{2.33a}$$

Można też wyznaczyć ją bezpośrednio z układu mostka jako sumę połączonych równolegle jego rezystancji R_1 i R_4 oraz R_2 i R_3

$$R_{AB}^{0} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \tag{2.33a}$$

Podobne wzory opisują roboczą **rezystancję wyjściową** mostka:

$$R_{CD} = R_{CD}^{\infty} - \frac{r_{21}^2}{R_{AB}^{\infty} + R_G} = R_{CD}^{\infty}\left(1 - \frac{r_{21}^2}{R_{CD}^{\infty}\left(R_{AB}^{\infty} + R_G\right)}\right) \tag{2.34}$$

I ta rezystancja również maleje wraz z r_{21} w kwadracie oraz przy zmniejszaniu się zastępczej rezystancji R_G źródła, osiągając najmniejsze wartości dla idealnego źródła napięciowego E, tj. gdy $R_G = 0$. Opisują to wzory dla tzw. zwarciowej rezystancji wyjściowej:

$$R^{0}_{CD} = R^{\infty}_{CD} - \frac{r^{2}_{21}}{R^{\infty}_{AB}} = R^{\infty}_{CD}\left(1 - \frac{r^{2}_{21}}{R^{\infty}_{CD}\; R^{\infty}_{AB}}\right) \tag{2.35}$$

lub

$$R^{0}_{CD} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \tag{2.35a}$$

Z (2.33) i (2.35) wynika bezpośrednio znana zależność, że **w stanie równowagi mostka tj. gdy r_{21}=0, obie rezystancje wejściowe nie zależą od rezystancji obwodu dołączonego do jego przeciwnej strony** i wynoszą: $R_{AB\,0}$, $R_{CD\,0}$. Poza równowagą, tj. przy dowolnej wartości transmitancji r_{21}, obowiązują zaś proporcje:

$$\frac{R^{0}_{CD}}{R^{\infty}_{CD}} = \frac{R^{0}_{AB}}{R^{\infty}_{AB}} = 1 - \frac{r^{2}_{21}}{R^{\infty}_{CD}\; R^{\infty}_{AB}} \tag{2.36}$$

Tak więc stosunki rezystancji obu stron mostka przy zwarciu i rozwarciu zacisków strony przeciwnej są jednakowe i maleją wraz z r^{2}_{21}. Stąd wynika też, że stosunki rezystancji zwarcia i rezystancji rozwarcia obu stron są sobie równe.

$$\frac{R^{0}_{CD}}{R^{0}_{AB}} = \frac{R^{\infty}_{CD}}{R^{\infty}_{AB}} \tag{2.37}$$

Rezystancje robocze R_{AB}, R_{CD} obu stron mostka przyjmują następujące postacie w wartościach względnych:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_{AB\,0}\left(1 + \varepsilon_{AB}\right) - \frac{r^{2}_{21}}{R_{CD\,0}\left(1 + \varepsilon_{CD} + k_L\right)} = \\ &= R_{AB\,0}\left[1 + \varepsilon_{AB} - \frac{r^{2}_{21}}{R_{AB\,0} R_{CD\,0}\left(1 + \varepsilon_{CD} + k_L\right)}\right] \end{aligned} \tag{2.38}$$

oraz

$$R_{CD} = R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD}) - \frac{r_{21}^2}{R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB}+k_G)} = $$
$$= R_{CD0}\left[1+\varepsilon_{CD} - \frac{r_{21}^2}{R_{CD0}R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB}+k_G)}\right] \tag{2.39}$$

W mostkach czteroramiennych spełniony jest też, podany we wzorze (2.13), **rozszerzony warunek równowagi:** $R_{AB0}R_{CD0} = mn\,R_{10}^2$, który można uwzględniać w zapisie powyższych i następnych wzorów.

Warto tutaj zwrócić uwagę, na to że, hallotron, który też jest pasywnym, ale nieodwracalnym układem 4T sterowanym polem magnetycznym, ma inne właściwości niż mostek niezrównoważony. Rezystancja wejściowa hallotronu wyzerowanego przy polu magnetycznym $B = 0$ rośnie wraz z jego prądem obciążenia I_{DC} i w przybliżeniu z kwadratem pola B [26], zaś mostka niezrównoważonego maleje wraz z kwadratem transmitancji r_{21} charakteryzującej stopień jego niezrównoważenia. Podobne zależności dotyczą rezystancji wyjściowych obu układów.

Prąd wyjściowy wyznacza się ze wzorów (2.30a i 2.30b), korzystając, tak jak poprzednio, z prawa Ohma w postaci: $I_{DC}=U_{DC}R_L^{-1}$. Przy obciążeniu $R_L = 0$ otrzymuje się **wyjściowy prąd zwarcia** I_{DC}^0 mostka dla obu rodzajów schematu źródła:

$$I_{DC}^0 = \frac{U_{DC}^\infty}{R_{CD}} = J\frac{R_G\,r_{21}}{\left(R_G+R_{AB}^\infty\right)R_{CD}^\infty - r_{21}^2} = E\frac{r_{21}}{\left(R_G+R_{AB}^\infty\right)R_{CD}^\infty - r_{21}^2} \tag{2.40a,b}$$

Po wstawieniu do tych wzorów początkowych wartości rezystancji rozwarciowych mostka i ich przyrostów względnych oraz współczynnika k_G. otrzymuje się:

$$I_{DC}^0 = \frac{U_{DC}^\infty}{R_{CD}} = J\frac{r_{21}}{R_{CD0}}\frac{1}{\left(1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right)(1+\varepsilon_{CD}) - \frac{r_{21}^2}{R_G R_{CD0}}} \tag{2.41a}$$

lub

$$I_{DC}^{0} = E \frac{r_{21}}{R_{AB0} R_{CD0}} \frac{1}{(k_G + 1 + \varepsilon_{AB})(1 + \varepsilon_{CD}) - \frac{r_{21}^{2}}{R_{AB0} R_{CD0}}} \tag{2.41b}$$

Podane powyżej wzory ujmują ogólnie właściwości mostka niezrównoważonego dla różnych przypadków jego pracy jako czwórnika z dołączonymi układami zewnętrznymi. Wynikają z nich zarówno wartości czułości początkowych sygnałów wyjściowych mostka (napięcia U_{DC} lub prądu I_{DC}), jaki i ich nieliniowe zależności od transmitancji r_{21} oraz od rezystancji wejściowych mostka i od rezystancji obu gałęzi dołączonych do przekątnych. Szereg omówionych tu pełnych wzorów dla parametrów roboczych mostka i ich przypadki szczególne zestawiono w tabeli 2.3, aby można je bezpośrednio porównać i wykorzystywać w praktyce. Omówimy bliżej kilka z nich.

2.4. Podstawowe przypadki pracy jednoźródłowego mostka 4R

2.4.1. Obciążony mostek 4R o idealnym prądowym zasilaniu

W praktyce pomiarowej dotyczy to zasilania mostka ze źródła o rezystancji wewnętrznej $R_G >> R_{AB}$ i wymuszonym prądzie wejściowym $I_{AB} \approx J$. Mostek taki nazywa się jednoprądowym. Z dopuszczalnym przybliżeniem można wówczas stosować wzory takie, jak przy idealnie prądowym zasilaniu, czyli gdy $R_G \to \infty$. Ze wzoru (2.22a) wynika bezpośrednio, że:

$$U_{DC} = J \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\Sigma R_i + \frac{1}{R_L}(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \tag{2.42a}$$

Po podstawieniach lub z (2.25), gdy $g \to \infty$, otrzymuje się zależność tego napięcia od wartości względnych rezystancji układu i ich przyrostów:

$$U_{DC} = \frac{J R_{10} mn (\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4)}{(1+n)(1+m)(1 + \varepsilon_{\Sigma R}) + l^{-1} m (1+n)^2 (1 + \varepsilon_{14})(1 + \varepsilon_{23})} \tag{2.42b}$$

Z (2.31a), gdy $R_G \to \infty$, a więc i $k_G \to \infty$, otrzymuje się inną, równoważną postać napięcia U_{DC} mostka

Tabela 2.3. Parametry robocze na zaciskach mostka 4R jako czwórnika przy różnych rodzajach jego współpracy z układami zewnętrznymi jako funkcje elementów jego macierzy $\mathbf{Z_R}$.
Table 2.3. Output signals and terminal resistances of the 4R bridge of any mode DC supply and load as functions of its matrix $\mathbf{Z_R}$ elements.

Nr	Wielkości i parametry robocze mostka	**Zasilanie ze źródła prądowego: $J;\ R_G$**			**Zasilanie ze źródła napięciowego: $E=J R_G;\ R_G$**	
		Rezystan-cja R_G	odbiór napięciowy $R_L\to\infty, (k_L\to\infty)$	obciążenie: $0<R_L<\infty$	Rezystancje R_G, R_L	obciążenie: $0<R_L<\infty$
1	**Napięcie wyjściowe** $U_{DC}=J\frac{R_1R_3-R_2R_4}{M_{UJ}}\equiv T_0\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\frac{\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)}{M_{UJ0}}}$	$R_G>0$	$J r_{21}\frac{R_G}{R_G+R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB})}=J r_{21}\frac{1}{1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}}\equiv U_{DC}^{\infty}$	$J r_{21}\frac{R_G R_L}{(R_G+R_{AB}^{\infty})(R_L+R_{CD}^{\infty})-r_{21}^2}=J r_{21}\frac{1}{\left(1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right)\left(1+\frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right)-\frac{r_{21}^2}{g\,l\,R_{10}^2}}$	$R_G<\infty$	$\frac{E r_{21}}{R_{AB0}}\frac{1}{(k_G+1+\varepsilon_{AB})\left(1+\frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right)-\frac{r_{21}^2}{m n k_L R_{10}^2}}$
		$R_G\to\infty$ $(I_{AB}=J)$	$U_{DC}\to J r_{21}\equiv T_0'\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$	$J r_{21}\frac{R_L}{R_L+R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD})}=J r_{21}\frac{k_L}{k_L+1+\varepsilon_{CD}}$	$R_G=0$ $(k_G=0)$	$\frac{E r_{21}}{R_{AB0}}\frac{1}{(1+\varepsilon_{AB})\left(1+\frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right)-\frac{r_{21}^2}{m n k_L R_{10}^2}}$
	czułość początkowa $T_0\equiv J\frac{R_{10}R_{30}}{M_{UJ0}}=\frac{E}{R_G}\frac{R_{10}R_{30}}{M_{UJ0}}$	$R_G>0$	$T_0'\frac{k_G}{1+k_G}=JR_{10}\frac{mn}{\left(1+m+\frac{1}{g}\frac{1+n}{n}\right)(1+n)}$	$T_0'\frac{k_G k_L}{(1+k_G)(1+k_L)}=JR_{10}\frac{mn}{\left(1+m+\frac{1}{g}\frac{1+n}{n}\right)\left(1+n+\frac{1}{l}\frac{1+m}{m}\right)}$	$R_G>0$ $R_G<\infty$	$K_0'\frac{1}{(1+k_G)}\frac{k_L}{(1+k_L)}=\frac{E\ m\ n}{n(1+m)+g(1+n)}\frac{l}{l(1+m)+n(1+m)}$
					$R_G=0$ $R_L\to\infty$	$E\frac{m}{(1+m)^2}\frac{k_L}{(1+k_L)}\xrightarrow{k_L\to\infty}E\frac{m}{(1+m)^2}\equiv K_0'=\frac{T_0}{R_{AB0}}$
		$R_G\to\infty$	$T_0\to T_0'=JR_{10}\frac{mn}{(1+m)(1+n)}$	$T_0'\frac{k_L}{1+k_L}$	$R_G<\infty$ $R_L\to\infty$	$K_0'\frac{1}{(1+k_G)}$
2	**Rezystancja wejściowa: R_{AB}**		$R_{AB}^{\infty}=R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB})$	$R_{AB}^{\infty}-\frac{r_{21}^2}{R_{CD}^{\infty}+R_L}=R_{AB0}\left[1+\varepsilon_{AB}-\frac{r_{21}^2}{mnR_{10}^2(1+\varepsilon_{CD}+k_L)}\right]$	gdzie: $R_{AB0}=R_{10}\frac{n(1+m)}{(1+n)}$	
3	**Rezystancja wyjściowa R_{CD}**	$R_G>0$	$R_{CD}^{\infty}-\frac{r_{21}^2}{R_{AB}^{\infty}+R_G}=R_{CD0}\left[1+\varepsilon_{CD}-\frac{r_{21}^2}{mnR_{10}^2(1+\varepsilon_{AB}+k_G)}\right]$	gdzie: $R_{CD0}=R_{10}\frac{m(1+n)}{(1+m)}$		$\varepsilon_{CD}=\frac{(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$
		$R_G\to\infty$	$R_{CD}^{\infty}=R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD})$		$R_G=0$	$R_{CD}^{\infty}-\frac{r_{21}^2}{R_{AB}^{\infty}}=R_{CD0}\left[1+\varepsilon_{CD}-\frac{r_{21}^2}{mnR_{10}^2(1+\varepsilon_{AB})}\right]$
4	**Prąd zwarcia** $I_{DC}^{0}=\frac{U_{DC}^{\infty}}{R_{CD}}$ $R_L=0$	$R_G>0$ $R_G<\infty$	$J\frac{R_G r_{21}}{(R_G+R_{AB}^{\infty})R_{CD}^{\infty}-r_{21}^2}=\frac{J r_{21}}{R_{CD0}}\frac{1}{\left(1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right)(1+\varepsilon_{CD})-\frac{r_{21}^2}{k_G m n R_{10}^2}}$		$R_G>0$ $R_G<\infty$	$\frac{E r_{21}}{mnR_{10}^2}\frac{1}{(k_G+1+\varepsilon_{AB})(1+\varepsilon_{CD})-\frac{r_{21}^2}{mnR_{10}^2}}$
		$R_G\to\infty$	$J\frac{r_{21}}{R_{CD0}}\frac{1}{(1+\varepsilon_{CD})}=J\frac{n}{(1+n)^2}\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})(1+\varepsilon_{CD})}$		$R_G=0$	$\frac{E r_{21}}{mnR_{10}^2}\frac{1}{(1+\varepsilon_{AB})(1+\varepsilon_{CD})-\frac{r_{21}^2}{mnR_{10}^2}}$

Gdzie: $E=JR_G$; $R_{20}\equiv mR_{10}$; $R_{40}\equiv nR_{10}$; $R_G\equiv gR_{10}\equiv k_G R_{AB0}$; $R_L\equiv lR_{10}\equiv k_L R_{CD0}$; $R_{AB0}=R_{10}\frac{n(1+m)}{(1+n)}$; $\varepsilon_{AB}=\frac{(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{43})}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$; $R_{CD0}=R_{10}\frac{m(1+n)}{(1+m)}$; $\varepsilon_{CD}=\frac{(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$

$$U_{DC} \to J\frac{r_{21}}{1+\dfrac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}} \tag{2.42c}$$

Gdy również rezystancja obciążenia $R_L \to \infty$, a więc i $k_L \to \infty$, to występuje napięcie wyjściowe, tzw. rozwarciowe, opisane wzorem (2.13), czyli $U'_{DC} = Jr_{21}$.

Dla przykładu, przy zmiennych tylko dwu ramionach R_1, R_2 wzór ten ma postać:

$$U'_{DC} = J\frac{R_{10}\,mn}{(1+n)(1+m)}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}} \tag{2.42d}$$

a przy zmiennym tylko pierwszym ramieniu jest jeszcze prostszy:

$$U'_{DC} = J\frac{R_{10}\,mn}{(1+n)(1+m)}\frac{\varepsilon_1}{1+\dfrac{\varepsilon_1}{(1+n)(1+m)}} \tag{2,42e}$$

Roboczą rezystancję wejściową R_{AB} opisują wzory (2.32) lub (2.38), takie same jak dla przypadku ogólnego, zaś rezystancja wyjściowa wynosi $R_{CD} = R_{CD}^{\infty}$.

Dla mostka jednoprądowego, przy braku obciążenia, wszystkie trzy parametry robocze są bezpośrednio elementami jego macierzy, podanymi dla różnych wariantów mostka w tabelach 2.1a i 2.1b.

Ze wzoru (2.41a), gdy $k_L = 0$, oraz $R_G \to \infty, k_G \to \infty$ wynika też, że prąd zwarcia I_{DCJ}^{0} tego mostka wynosi:

$$I_{DCJ}^{0} \to \frac{U_{DC}^{\infty}}{R_{CD}^{\infty}} = J\frac{r_{21}}{R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD})} \tag{2.43}$$

Zaś po podstawieniu doń zależności dla występujących tu elementów macierzy Z_R mostka wyrażonych w wartościach względnych rezystancji początkowych i ich przyrostów, można otrzymać prąd zwarcia zapisany w podobnej, znormalizowanej postaci jak wzór (2.20) dla napięcia wyjściowego:

$$I_{DCJ}^{0} = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)} =$$

$$= J\frac{n}{(1+n)^2}\bullet\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{1+n}\right)} \equiv S_0\bullet f_J^{/}(\varepsilon_i) \quad (2.44a,b)$$

gdzie:

$S_0^{/}=J\frac{n}{(1+n)^2}\equiv Js_0^{/}$ – początkowa czułość prądu zwarcia mostka jednoprądowego

$f_J^{/}(\varepsilon_i)=\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})}\equiv\frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\Delta M_J(\varepsilon_i)}$ – funkcja niezrównoważenia mostka dla tego prądu.

Warto zauważyć, że początkowa czułość prądu zwarcia jest proporcjonalna do prądu źródła J i zależy jedynie od wartości n (stosunek rezystancji początkowych R_{40}/R_{10}), zaś nie zależy od m. Mianownik funkcji niezrównoważenia prądu zwarcia też inaczej zależy od wszystkich przyrostów względnych niż dla napięcia rozwarcia.

2.4.2. Mostek 4R zasilany napięciowo

Przy zasilaniu obciążonego mostka z idealnego źródła napięcia E (tj. gdy $R_G = 0$) ze wzoru (2.22b) otrzymuje się:

$$U_{DC} = E\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+\frac{A}{R_L}} \quad (2.45a)$$

Ze wzorów (2.22b) i (2.25) dla wartości względnych rezystancji, przy $g = 0$, wynika:

$$U_{DC}=E\frac{m(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4)}{(1+m)^2(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{43})+m\,l^{-1}\begin{bmatrix}(1+n)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{43})+\\+n(1+m)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{12})\end{bmatrix}} \quad (2.45b)$$

Zaś z (2.41b), dla bardzo dużej rezystancji źródła, tj. gdy $R_G\to 0$, a więc i $k_G\to 0$, otrzymuje się:

$$U_{DC} \to E\frac{r_{21}}{R_{AB0}}\,\frac{1}{\left(1+\varepsilon_{AB}\right)\left(1+\dfrac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right)-\dfrac{r_{21}^2}{R_{AB0}R_L}} \tag{2.45c}$$

Ponadto, przy bardzo dużej rezystancji obciążenia, tj. $R_L >> R_{CD}$, czyli gdy $k_L \to \infty$, wzory te jeszcze dalej upraszczają się. Drugi składnik mianownika wzoru (2.45a) staje się pomijalny i wówczas:

$$U_{DC}^{\infty} = E\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{\left(R_1+R_2\right)\left(R_3+R_4\right)} \tag{2.46a}$$

lub w wartościach względnych:

$$U_{DC}^{\infty} = E\frac{m}{(1+m)^2}\bullet\frac{\Delta L\left(\varepsilon_i\right)}{\left(1+\varepsilon_{12}\right)\left(1+\varepsilon_{34}\right)} \equiv K_0'' \bullet f''\left(\varepsilon_i\right) \tag{2.46b}$$

gdzie:

$$K_0'' \equiv E\frac{m}{(1+m)^2}\;; \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_1 + m\,\varepsilon_2}{1+m}; \qquad \varepsilon_{34} = \frac{\varepsilon_4 + m\,\varepsilon_3}{1+m}$$

Czułość początkowa transmitancji napięciowej K''_0 zależy tylko od stosunku m rezystancji początkowych i przy E = *const.* osiąga maksimum równe $0{,}25E$ dla wartości $m = 1$.

Bezpośrednio z (2.45c) dla $R_L >> R_C$, czyli gdy $k_L \to \infty$, otrzymuje się inną, równoważną postać wzoru (2.46a):

$$U_{DC}^{\infty} \to E\frac{r_{21}}{R_{AB}^{\infty}} = E\frac{r_{21}}{R_{AB0}\left(1+\varepsilon_{AB}\right)} \tag{2.46c}$$

Gdy m i n jest dowolne, dla przykładu przy zmiennych rezystancjach R_1 i R_2 lub tylko R_1 otrzymuje się odpowiednio

$$U_{DC}^{\infty} = E\frac{m}{(1+m)^2}\bullet\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m}} \tag{2.46d}$$

oraz

$$U_{DC}^{\infty} = E\frac{m}{(1+m)^2}\bullet\frac{\varepsilon_1}{1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+m}} \tag{2.46e}$$

Przy tej samych wartościach m jak we wzorach (2.42d), (2.42.e) dla mostka zasilanego jednoprądowo powyższe przebiegi napięcia wyjściowego są bardziej nieliniowe.

Roboczą rezystancję wejściową R_{AB} mostka przy napięciowym zasilaniu opisują te same wzory (2.27) i (2.32) jak dla zasilania prądowego, zaś roboczą rezystancją wyjściową jest rezystancja zwarciowa R^{0}_{CD} – ze wzorów (2.35) i (2.35a).

Napięcie wyjściowe będzie liniowo zależało od przyrostów, gdy spełnione będą równocześnie dwa warunki: $\varepsilon_{12} = 0$ i $\varepsilon_{34} = 0$, a więc dla $m\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ i $\varepsilon_4 = -m\varepsilon_3$. Można je spełnić jedynie przy ograniczonych wartościach przyrostów $|\varepsilon_i| \leq 1$. Jest to takie same wymaganie jak dla jednego z rodzajów pracy mostka zasilanego prądowo. Wówczas: $\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4 = 0$, a napięcie wyjściowe:

$$U^{\infty}_{DC} = E\frac{1}{1+m}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3\right) \tag{2.47}$$

Rezystancja wejściowa wynosi wówczas $R_{AB} = R_{AB\,0}$. Jako stała, nie niesie informacji pomiarowej o przyrostach.

Natomiast rezystancja wyjściowa R_{CD} zależy nieliniowo od obu przyrostów.

Przy zmianach ramion w postaci przyrostów rezystancji mostek o pojedynczym zasilaniu napięciowym ma więc większe ograniczenia i mniejsze możliwości niż mostek jednoprądowy, w tym i w pomiarach kilkuparametrowych.

Prąd zwarcia dla zasilania z idealnego źródła napięciowego E (gdy $R_G = 0$) otrzymuje się ze wzoru (2.22b). Wynosi on:

$$I^{0}_{DCE} = E\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{A} \tag{2.48a}$$

gdzie:

$$A = \sum R_iR_jR_k = R_1R_2\left(R_3 + R_4\right) + R_3R_4\left(R_1 + R_2\right) = \ldots$$

Postać tego wzoru w wartościach względnych rezystancji mostka jest dość skomplikowana.

Wzór (2.41b) na prąd zwarcia mostka w funkcji jego parametrów zewnętrznych jako czwórnika, gdy $k_G \to 0$ i $k_L \to 0$, przyjmuje natomiast postać:

$$I_{DC}^{0} \to E \frac{r_{21}}{R_{AB0} R_{CD0}} \frac{1}{(1+\varepsilon_{AB})(1+\varepsilon_{CD}) - \frac{r_{21}^{2}}{R_{AB0} R_{CD0}}} \tag{2.48b}$$

Korzystając z rozszerzonego warunku równowagi (2.13), zamiast iloczynu $R_{AB0} R_{CD0}$ w mianowniku tego wzoru można też podstawiać $m\, n\, R_{10}^{2}$.

Prąd zwarcia jest dosyć rzadko wykorzystywany jako sygnał wyjściowy mostka. Może być przydatny przy stosowaniu czujników konduktancyjnych. Z zasady dualności układów pasywnych wynika, że dla przewodności uzyska się wzory o podobnej formie jak dla rezystancji po zamianie źródła prądowego na napięciowe i napięć na prądy. Na przykład odpowiednikiem wzoru (2.20) na napięcie wyjściowe bez obciążenia i przy zasilaniu prądowym mostka jest podobny doń w formie, podany poniżej wzór dla prądu zwarcia przy zasilaniu napięciowym, wyrażony przez przewodności $G_i \equiv R_i^{-1}$ ramion mostka. Otrzyma się go też bezpośrednio ze wzoru (2.48)

$$I_{DCE}^{0} = E \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \tag{2.49}$$

Wzór ten dla konduktancji ramion mostka i ich przyrostów wyrażonych w wartościach względnych ma więc podobną postać jak wzór (2.20) dla napięcia wyjściowego mostka zasilanego prądowo.

Idealne zasilanie napięciowe i wyjście w postaci prądu zwarcia można też stosować w mostkach przy prądzie zmiennym do pomiarów różnych funkcji przyrostów składowych admitancji. Na przykład w [17] przytoczono opis takiego układu dla różnicowych czujników pojemnościowych.

2.4.3. Mostek nieobciążony przy zasilaniu ze źródła rzeczywistego

W nieobciążonym na wyjściu mostku prądy ramion szeregowo ze sobą połączonych są sobie równe tj. $I_1 = I_2$ oraz $I_3 = I_4$. Ułatwia to analizę tego układu. Wówczas ze wzorów (2.22a) i (2.22b), przy $R_L \to \infty, k_L \to \infty$ otrzymuje się:

$$U_{DC}^{\infty} = J \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\Sigma R_i + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_G}} \tag{2.50a}$$

lub w wartościach względnych

$$U_{DC}^{\infty}=\frac{JR_{10}mn\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4\right)}{(1+n)(1+m)\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)+g^{-1}n(1+m)^2(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{43})} \tag{2.50b}$$

Zaś dla napięciowego schematu źródła:

$$U_{DC}^{\infty}=E\frac{R_1R_3-R_2R_4}{R_G\Sigma R_i+(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \tag{2.51}$$

W podobny sposób, z pozostałych ogólnych zależności można uzyskać uproszczone wzory dla parametrów zewnętrznych mostka jako czwórnika i przy takiej jego pracy. Na przykład z (2.30a) i (2.30b) otrzymuje się:

$$U_{DC}=J\frac{r_{21}}{1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}} \tag{2.52}$$

oraz

$$U_{DC}=\frac{E}{R_G}\frac{r_{21}}{1+\frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}} \tag{2.53}$$

Rezystancja wejściowa wynosi R_{AB}^{∞}, zaś roboczą rezystancję wyjściową R_{CD} opisują wzory (2.28), (2.34) i (2.39).

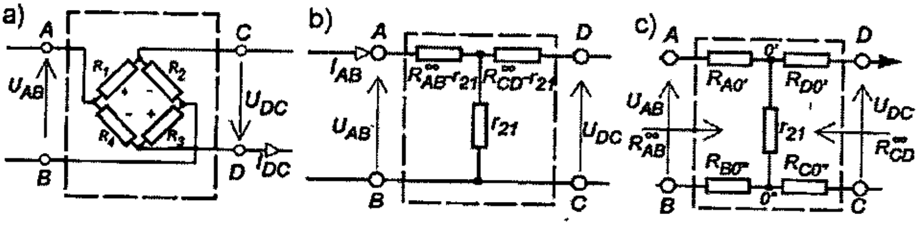
Wzory podstawowe wraz z szeregiem przypadków szczególnych dla parametrów roboczych mostka jako czwórnika w funkcji elementów jego macierzy Z_R oraz względnych wartości rezystancji układu zawiera tabela 2.3.

Wszystkie podane w tym rozdziale wzory można też dalej przekształcać wprowadzając po kolei coraz bardziej uszczegółowione wyrażenia wg określonych potrzeb, np. skorzystać z zależności (2.11), (2.12) dla wyznaczenia przyrostów ε_{AB}, ε_{CD}, a następnie rozwinąć wzory do postaci takich, jak dla parametrów w tabeli 2.1a z uwzględnieniem przyjętych oznaczeń jednoliterowych: $R_{20}\equiv mR_{10}$, oraz $R_{40}\equiv nR_{10}$ dla rezystancji początkowych w stanie równowagi i przyrostów ε_i. Wzory te mogą być użyteczne tylko dla przypadków szczególnych pracy mostka, gdyż jako ogólne są bardzo obszerne i dlatego trudniejsze w interpretacji niż wzory oparte na parametrach czwórnika. Ale jeśli nawet skorzysta się tylko z współczynników m i n dla stosunków rezystancji początkowych, to nawet tak długie wzory jak (2.22a), (2.25) i inne upraszczają się nieco dwojako, tj. wskutek tego, że rezystancja odniesienia R_{10}

wystąpi tylko jako mnożnik całych wyrażeń, a w jej miejscach pojawi się cyfra 1 oraz, że zamiast R_{30} występuje współczynnik $m\,n$.

2.5. Uproszczone schematy zastępcze mostka 4R jako czwórnika

Transfigurację układu o strukturze czworoboku zupełnego omówiono w punkcie 1.4. Otrzymywane kolejno układy b), c), d) z rysunku 1.1 są całkowicie równoważne z punktu widzenia równań opisujących prądy oraz potencjały wszystkich zacisków względem węzła odniesienia, czyli jako układy 4T (four Terminals). Trzy prądy mogą być dowolne, czwarty wynika z prądowego prawa Kirchoffa. Mostek tylko czteroramienny, a więc bez gałęzi w przekątnych, nie ma jako układ 4T innych odpowiedników zbudowanych z dodatnich rezystancji, czyli jest układem pierwotnym (tak jak liczba pierwsza w algebrze). Inaczej wygląda sytuacja, gdy układ 4T współpracuje z układami zewnętrznymi tylko jako czwórnik. Wówczas prądy zacisków jego stron są parami przeciwne tj. $I_A = -I_B$ oraz $I_C = -I_D$ i można w rozważaniach zastępować układ mostkiem 4R i innymi schematami. Dwa takie schematy zastępcze podano na rysunku 2.2b, c.



Rys. 2.2. Schematy zastępcze pasywnego odwracalnego układu 4T dla jego pracy jako czwórnika:
a) mostek 4R czyli czwórnik typu X – pełna równoważność,
b) czwórnik typu T – równoważność tylko dla parametrów wejścia i wyjścia (elementów macierzy obu układów);
c) czwórnik typu 2T – równoważność elementów macierzy i napięć wszystkich zacisków dla $r_{21} > 0$, przy $r_{21} < 0$ użycie pomiędzy punktami 0' 0" dodatniej rezystancji $|r_{21}|$ wymaga zamiany miejscami zacisków wyjściowych.

Fig. 2.2. Equivalent schemes of the passive reciprocal 4T circuit working as twoport:
a) equivalent 4R bridge i.e. twoport type X – full equivalence,
b) two-port type T – equivalence of input-output bridge parameters only (its matrix elements),
c) two-port type 2T – equivalence of input-output parameters and all terminal voltages.

Układ b) dotyczy przypadków, gdy można pominąć występujące poza mostkiem połączenia pomiędzy układami dołączonymi do obu jego stron, w tym poprzez ziemię. Jest to czwórnik typu **T**, którego rezystancje są funkcjami elementów macierzy $\mathbf{Z_R}$ mostka z rysunku 2.2a. Równoważność tego mostka i czwórnika typu **T** z tego rysunku dotyczy tylko ich parametrów na zaciskach obu stron, czyli elementów ich macierzy, gdyż w tym czwórniku, inaczej niż w mostku, jeden z zacisków wejścia i wyjścia jest wspólny (B zwarty z C). Dla mostka czteroramiennego 4R rezystancje poziome następująco zależą od rezystancji jego ramion:

$$R_{A0} = R_{AB}^{\infty} - r_{21} = \frac{R_4 (R_1 + R_2) + R_2 (R_3 + R_4)}{\sum R_i} \tag{2.54a}$$

$$R_{0D} = R_{CD}^{\infty} - r_{21} = \frac{R_2 (R_1 + R_4) + R_4 (R_2 + R_3)}{\sum R_i} \tag{2.54b}$$

lub w wartościach względnych:

$$R_{A0} = nR_{10} \frac{(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{12}) + m(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{34})}{(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \tag{2.55a}$$

$$R_{D0} = mR_{10} \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{14}) + m(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{23})}{(1+m)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \tag{2.55b}$$

Transmitancję mostka r_{21} odwzorowuje w obu schematach równa jej co do wartości rezystancja w środkowej – pionowej gałęzi układów. Dla ujemnej wartości tej transmitancji, rezystancja r_{21} jest ujemna. Dla zbioru wartości rezystancji ramion mostka, przy których jego napięcie wyjściowe U_{DC} zmienia znak (przechodzi przez zero) należało by więc zamieniać miejscami odprowadzenia wyjścia w obu schematach zastępczych z rys. 2.2b i c.

Jeśli w rzeczywistym układzie pracy mostka występują rezystancje w przekątnych, lub obwody do nich dołączone, to należy też tak samo przyłączać je do wejścia i wyjścia schematu zastępczego i parametry robocze na zaciskach mostka wyznaczać wraz z nimi.

Czwórnik zastępczy **T** ma również swój odpowiednik typu **Π**, który może być użyteczny przy opisie ramion poprzez przewodności oraz przy wyznaczaniu prądu zwarcia.

Schemat z rys. 2.2c ma strukturę symetrycznego czwórnika typu 2T. Każda z rezystancji poziomych z poprzedniego rys. 2.2b została odpowiednio rozłożona na dwie części. Ich wartości są następujące:

$$R_{A0'} = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{\sum R_i} \quad (2.56a) \qquad R_{B0''} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{\sum R_i} \quad (2.56b)$$

$$R_{C0''} = \frac{R_4(R_2 + R_3)}{\sum R_i} \quad (2.56c) \qquad R_{D0'} = \frac{R_2(R_1 + R_4)}{\sum R_i} \quad (2.56d)$$

Wzory te w wartościach względnych rezystancji ramion mostka mają postacie:

$$R_{A0'} = \frac{nR_{10}(1+\varepsilon_4)(1+m+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{(1+m)(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.57a)$$

$$R_{B0''} = \frac{nmR_{10}(1+\varepsilon_2)(1+m+\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}{(1+m)(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.57b)$$

$$R_{C0''} = \frac{nmR_{10}(1+\varepsilon_4)(1+n+\varepsilon_2+n\varepsilon_3)}{(1+m)(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.57c)$$

$$R_{D0'} = \frac{mR_{10}(1+\varepsilon_2)(1+n+\varepsilon_1+n\varepsilon_4)}{(1+m)(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.57d)$$

lub w wersjach bardziej zwartych :

$$R_{A0'} = \frac{nR_{10}(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{12})}{(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.58a); \qquad R_{B0''} = \frac{nmR_{10}(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{34})}{(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.58b)$$

$$R_{C0''} = \frac{nmR_{10}(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_{23})}{(1+m)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.58c); \qquad R_{D0'} = \frac{mR_{10}(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_{14})}{(1+m)(1+\varepsilon_{\Sigma R})} \quad (2.58d)$$

Rezystancje te, w ogólnym przypadku, zależą różnie i niejednakowo od przyrostów rezystancji ramion mostka. Obok równoważności parametrów wejścia i wyjścia schemat z rys. 2.2c zachowuje również rozkład napięć pomiędzy wszystkimi zaciskami, taki jak w mostku. Ma to znaczenie, gdy istotne są nie tylko wartości parametrów na zaciskach obu stron mostka jako czwórnika, ale i zmiany potencjałów na jego zaciskach. Jedynie wartości rezystancji widzianych z boku – od strony ramion mostka, np. z zacisków AD, są tu inne niż dla mostka. Schemat ten nie był dotychczas opisywany w literaturze. Może on znaleźć zastosowanie na przykład do analizy układów, w których mostek i obwody współpracujące z jego stronami, zawierają wzmacniacze i są zasilane ze wspólnego źródła oraz gdy analizuje się upływności do ziemi.

Jako przykład rozpatrzymy mostek o jednakowych rezystancjach w równowadze, czyli gdy m = 1, n = 1. Otrzymuje się następujące rezystancje schematu zastępczego 2T:

$$R_{A0'} = \frac{R_{10}}{2} \frac{(1+\varepsilon_4)[1+0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]}{1+0{,}25\sum\varepsilon_i} \quad (2.59a)$$

$$R_{B0''} = \frac{R_{10}}{2} \frac{(1+\varepsilon_2)[1+0{,}5(\varepsilon_3+\varepsilon_4)]}{1+0{,}25\sum\varepsilon_i} \quad (2.59d)$$

$$R_{C0''} = \frac{R_{10}}{2} \frac{(1+\varepsilon_4)[1+0{,}5(\varepsilon_2+\varepsilon_3)]}{1+0{,}25\sum\varepsilon_i} \quad (2.59c)$$

$$R_{D0'} = \frac{R_{10}}{2} \frac{(1+\varepsilon_2)[1+0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_4)]}{1+0{,}25\sum\varepsilon_i} \quad (2.59d)$$

oraz na podstawie tabeli 2.1b

$$r_{12} = \frac{R_{10}}{4} \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{1+0{,}25\sum\varepsilon_i} \quad (2.\ 59e)$$

Gdy przyrosty rezystancji sąsiednich ramion tego mostka są parami jednakowe co do wartości, lecz o przeciwnym znaku np. w poziomie, tj.
$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ oraz $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$, wówczas:

$$R_{A0'} = \frac{R_{10}}{2}(1-\varepsilon_3) \quad (2.60a) \qquad R_{B0'} = \frac{R_{10}}{2}(1-\varepsilon_1) \quad (2.60b)$$

$$R_{C0'} = \frac{R_{10}}{2}(1-\varepsilon_3)\left(1+\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{2}\right) \quad (2.60c) \qquad R_{D0'} = \frac{R_{10}}{2}(1-\varepsilon_1)\left(1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right) \quad (2.60d)$$

oraz

$$r_{12} = \frac{1}{2} R_{10} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \right) \tag{2. 60e}$$

Rezystancja wejściowa R^{∞}_{AB} mostka jest tu stała i wynosi R_{10}, a transmitancja r_{21} zależy liniowo od obu przyrostów. Rozwarciowe napięcie wyjściowe mostka będzie więc liniowo zależeć od przyrostów przy źródle zasilającym o dowolnej rezystancji wewnętrznej. Ogólnie dotyczy to mostka o przeciwnych przyrostach bezwzględnych w górnej i dolnej parze ramion.

Jeśli przeciwne parami są przyrosty rezystancji w pionie mostka, czyli $\varepsilon_1 = -n\varepsilon_4$ oraz $\varepsilon_3 = -n \varepsilon_2$, to rozwarciowa rezystancja wyjściowa R^{∞}_{CD} jest stała. Przebiegi napięcia wyjściowego będą podobne dla różnych wartości rezystancji obciążenia R_L.

Natomiast, jeśli obie pary przyrostów względnych będą równocześnie miały jednakowe moduły tj. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_4 \equiv \varepsilon$, to w mostku o m = n = 1 wszystkie poziome rezystancje są sobie równe i wynoszą: $0{,}5\, R_{10}(1 - \varepsilon)$. Maleją więc one wraz ze wzrostem ε, zaś transmitancja $r_{12} = R_{10}\varepsilon$. Obie rezystancje R^{∞}_{AB}, R^{∞}_{CD} są teraz stałe i równe R_{10}.

Schematy zastępcze o takiej strukturze jak na rys 2.2 można utworzyć dla dowolnego układu pasywnego odwracalnego 4T, gdy pracuje on jako czwórnik, w tym dla mostka z przekątnymi (czworoboku zupełnego). Dotyczy to na przykład odwracalnej części schematu zastępczego hallotronu [26], lub dowolnej bryły o czterech romboidalnie rozstawionych zaciskach i przy niejednakowo zmieniających się lokalnych rezystywnościach w jej wnętrzu (w tym anizotropowo). Poszczególne rezystancje tych schematów są wówczas opisane rezystancjami ramion zastępczego czterogałęziowego mostka 4R. Na przykład w schemacie z rys. 2.2b rezystancje R^{∞}_{AB}, R^{∞}_{CD} należy zastąpić rezystancjami roboczymi R_{AB} i R_{CD} wg wzorów (2.27) i (2.28) lub (2.32) i (2.34), a transmitancję prądowo-napięciową r_{21} nieobciążonego mostka czterogałęziowego – transmitancją roboczą wynikającą ze wzoru (2.22a) lub (2.30a). Wszystkie wzory uzależniające parametry robocze układu bezpośrednio od jego elementów rzeczywistych będą miały bardziej rozbudowane postacie.

3. PODSTAWOWE WŁAŚCIWOŚCI REZYSTANCYJNYCH MOSTKÓW 4R PRZY DWUPRĄDOWYM ZASILANIU

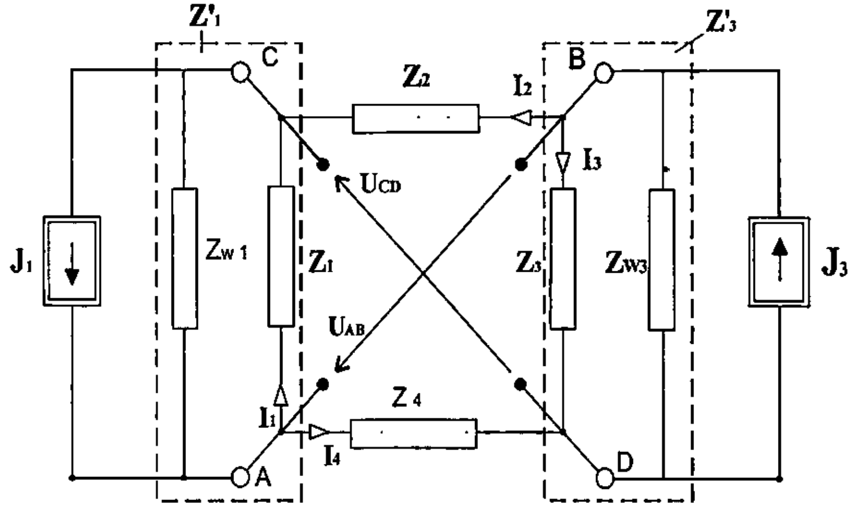
W punkcie 1.10 przedstawiono już wstępnie podany przez autora nowy rodzaj układu pomiarowego w postaci mostka immitancyjnego zasilanego z dwu jednakowych źródeł prądowych, włączonych obocznie (równolegle) do ramion przeciwległych. Autor początkowo używał dla niego nazwy „antymostek", ale ostatecznie zdecydował się na termin: **mostek dwuprądowy**. Układ ten ma dwa różne stany równowagi na wyjściach z przekątnych, opisane innymi zależnościami pomiędzy parametrami niż w mostkach klasycznych. Ten niekonwencjonalny układ nie był wcześniej stosowany w technice pomiarowej, a oferuje nowe możliwości pomiarowe.

A oto krótka historia tego odkrycia. Na istnienie układu o warunku równowagi w postaci równości iloczynów impedancji ramion przyległych mostka przy równości prądów zasilających ramiona przeciwległe autor natrafił wiele lat temu, opracowując metodę pomiaru parametrów schematu zastępczego hallotronu jako układu o czterech końcówkach (4T) [26]. Ten oryginalny rodzaj układu pozostawał jednak aż do 2000 roku szerzej nieznany, gdyż autor przez wiele lat nie zdecydował się na opublikowanie informacji na ten temat, a to ze względu na występujące poprzednio istotne ograniczenia techniczne w jego realizacji, a układ traktował jako pewną ciekawostkę. Samodzielne stosowanie mostków dwuprądowych w technice pomiarowej było wcześniej ograniczone w szczególności trudnościami budowy dwu identycznych i izolowanych źródeł prądowych. O tym odkryciu zasygnalizowała jedynie jego współpracowniczka w wystąpieniu na XII Międzyuczelnianej Naradzie Metrologów - poprzedzającym niespełniony zamiar opracowywania doktoratu z tej tematyki pod kierunkiem autora [73]. Opis takich mostków nie występuje ani w obszernej monografii [5] o wieloźródłowych układach kompensacyjnych, ani w wielu innych publikacjach omawiających pomiary immitancji i zastosowania czujników immitancyjnych, w tym [1 – 24]. Sensowne technicznie, sprzętowe oraz programowe możliwości realizacji tych niekonwencjonalnych układów pojawiły się stosunkowo niedawno. Dzięki nim układy te nabrały znaczenia praktycznego. **Mostki dwuprądowe mogą posłużyć do budowy całkowicie nowych rodzajów członów funkcyjnych inteligentnych przetworników i układów wejściowych mikroprocesorowych systemów pomiarowych** o oryginalnych właściwościach metrologicznych, w tym do tworzenia nowych układów wstępnego kondycjonowania sygnałów z czujnikami immitancyjnymi do pomiarów kilku sprzężonych parametrów. Dlatego też autor postanowił nie tylko opisać ogólnie zasadę działania tych mostków, ale gruntownie i szczegółowo przeanalizować podstawowe ich właściwości metrologiczne oraz opracować propozycję różnych wariantów rozwiązań i podać potencjalne obszary ich zastosowań. Zarys tego obszernego przedsięwzięcia był prezentowany na dwu kolejnych zamkniętych seminariach Komitetu Metrologii PAN w Ustroniu k. Kępna w styczniu 2000 i 2001. Zachęcony opinią metrologów tam zgromadzonych, mostki dwuprądowe (wówczas jeszcze pod nazwą: antymostki) autor przedstawił publicznie i opublikował po raz pierwszy w materiałach Sympozjum SP 2000 Politechniki Zielonogórskiej [27]. Postępy pracy w dziedzinie tych mostków i ich zastosowań były omawiane następnie na kolejnych sympozjach organizowanych przez inne uczelnie krajowe, w tym kilku środkowoeuropejskich sympozjach Politechniki Rzeszowskiej [30, 34, 44], na Sympozjum Komitetu TC-7 Międzynarodowej Konfederacji Pomiarów IMEKO w maju 2002 r. w Krakowie [31] oraz publikowane w materiałach konferencyjnych i w kilku czasopismach naukowo-technicznych [28 – 48].[1] Niniejsza monografia zawiera rozszerzoną syntezę dotychczasowych opracowań autora z tej dziedziny.

3.1. Wyprowadzenie zasady działania

Rozpatrzymy układ odwracalny przedstawiony na rys. 3.1 w postaci czterogałęziowego mostka impedancyjnego, zasilanego z dwu źródeł o wydajnościach prądowych J_1, J_3 i impedancjach wewnętrznych Z_{w1}, Z_{w3}, włączonych równolegle (obocznie) do jego ramion przeciwległych Z_1, Z_3 . Źródła te, podobnie jak w układzie kompensacji prądów, są dołączone do układu mostkowego w jednym kierunku obiegu – na wspomaganie się wzajemne. Pomiędzy zaciski AC i BD obu źródeł mogą być też włączane układy pasywne o bardziej skomplikowanej topologii, ale bez zacisków wspólnych i zastępowalne czterogałęziowym układem mostkowym. W mostku dwuprądowym, podobnie jak w dotychczas znanych układach kompensacyjnych i mostkowych, można wykorzystać łatwo wykrywalną równość potencjałów dwu węzłów zarówno do uzyskiwania stanu równowagi układu, jak i jako odniesienie w układach niezrównoważonych. Podstawowe wzory zostaną tu wyprowadzone dla dowolnych przebiegów czasowych prądów zasilających, przy założeniu, że impedancje w układzie są liniowe lub zlinearyzowane. Korzystając bezpośrednio z podanego ogólnego równania macierzowego lub zamieniając schematy zastępcze źródeł prądowych J_1, J_3 z równoległymi do nich impedancjami zastępczymi Z'_1, Z'_3 na równoważne im dwa źródła napięciowe wraz z takimi impedancjami włączonymi w szereg oraz

[1] Zagadnienia okazały się na tyle aktualne, że po wystąpieniu na Sympozjum IMEKO znany międzynarodowy autor książek z metrologii prof. P. Sydenham z Australii zaproponował autorowi opracowanie sześciu obszernych bloków tematycznych o mostkach (przygotowano już [46, 47]) do światowego multimedialnego poradnika konstrukcji systemów pomiarowych przygotowywanego przez wydawnictwo J. Wiley&Sons do publikacji na początku 2005 roku i przeznaczonego też do udostępniania w internecie na hasło-klucz wraz z kroczącymi uzupełnieniami.



Rys. 3.1. Podstawowy schemat wyjaśniający działanie układu mostka dwuprądowego.

J_1, J_3 – wydajności prądowe źródeł zasilających, Zw_1, Zw_3 – ich impedancje wewnętrzne, Z_1, ...Z_4 – impedancje gałęzi układu, U_{AB}, U_{CD} – napięcia wyjściowe, I_1 ... I_4 – prądy w gałęziach

Fig. 3.1. Basic scheme for illustration of the double current bridge operation: J_1, J_3 – currents sources; Zw_1, Zw_3 – their inner impedances; Z_1, ... Z_4 – bridge arms impedances; U_{AB}, U_{CD} – output voltages; I_1 ... I_4 –arm currents.

stosując zasadę superpozycji otrzymuje się następujące wzory na napięcia przekątnych AB i CD:

$$UAB = \frac{J_1 Z'_1 (Z'_3 + Z_4) - J_3 Z'_3 (Z'_1 + Z_2)}{Z'_1 + Z_2 + Z'_3 + Z_4} \tag{3.1}$$

$$U_{CD} = \frac{J_3 Z'_3 (Z'_1 + Z_4) - J_1 Z'_1 (Z'_3 + Z_2)}{Z'_1 + Z_2 + Z'_3 + Z_4} \tag{3.2}$$

gdzie: $Z'_1 = \dfrac{Z_1 Z_{w1}}{Z_1 + Z_{w1}}$; $Z'_3 = \dfrac{Z_3 Z_{w3}}{Z_3 + Z_{w3}}$

Ze wzorów (3.1) i (3.2) wynikają dwa różne warunki równowagi układu. Dla $U_{AB} = 0$ lub $U_{CD} = 0$ odpowiednio otrzymuje się:

$$J_1 Z_1'(Z_3' + Z_4) = J_3 Z_3'(Z_1' + Z_2) \quad (3.3)$$

$$J_3 Z_3'(Z_1' + Z_4) = J_1 Z_1'(Z_3' + Z_2) \quad (3.4)$$

Każdy z tych warunków może zostać spełniony osobno przez regulację składowych bądź impedancji mostka, bądź prądu jednego ze źródeł.

Przy zasilaniu układu z dwu źródeł o jednakowych wydajnościach prądowych $J_1 = J_3 = J$ równania (3.1 – 3.4) się upraszczają. Otrzymujemy wówczas:

$$UAB = \frac{J(Z'_1 Z_4 - Z'_3 Z_2)}{Z'_1 + Z_2 + Z'_3 + Z_4} \quad (3.5)$$

i warunek równowagi dla $U_{AB} = 0$:

$$Z'_1 Z_4 = Z'_3 Z_2 \quad (3.5a)$$

oraz

$$U_{CD} = \frac{J(Z'_3 Z_4 - Z'_1 Z_2)}{Z'_1 + Z_2 + Z'_3 + Z_4} \quad (3.6)$$

i warunek równowagi dla drugiej przekątnej, gdy $U_{CD} = 0$

$$Z'_1 Z_2 = Z'_3 Z_4 \quad (3.6a)$$

Takie same wzory uzyskuje się też, zastępując źródła prądowe J źródłami napięciowymi o wartościach napięć źródłowych $E_1 = JZ_{W1}$, $E_2 = JZ_{W2}$ i szeregowych impedancjach .wewnętrznych Z_{W1}, Z_{W2}. Ale w tym wypadku, źródła opisuje się czterema, powiązanymi ze sobą parametrami. Obie siły elektromotoryczne mogą być różne, lecz w takim samym stosunku proporcjonalne do ich impedancji wewnętrznych.

Gałęzie układu z rys. 3.1 można też opisać admitancjami. Otrzymujemy wówczas warunki równowagi o następujących postaciach:

$$Y_1' Y_4 = Y_3' Y_2 \quad (3.5b)$$

$$Y_1' Y_2 = Y_3' Y_4 \quad (3.6b)$$

gdzie:

$$Y_1' = (Z_1')^{-1}, \qquad Y'_3 = (Z'_3)^{-1},$$

$$Y_2 = Z_2^{-1}, \qquad Y_4 = Z_4^{-1}$$

Dalsze uproszczenie wzorów (3.5) i (3.6) na napięcia wyjściowe i warunków równowagi (3.5a) i (3.6a) uzyskuje się po zastosowaniu dwu, nie tylko jednakowych, ale i idealnych źródeł prądowych ($|Z_{w1}| >> |Z_1|$, $|Z_{w3}| >> |Z_3|$). Otrzymujemy wówczas następujące napięcie na przekątnej AB

$$U_{AB} = \frac{J(Z_1 Z_4 - Z_3 Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} \tag{3.7}$$

Napięcie $U_{AB} = 0$, gdy jest spełniony warunek:

$$Z_1 Z_4 = Z_3 Z_2 \tag{3.7a}$$

Zaś na przekątnej CD jest

$$U_{CD} = \frac{J(Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} \tag{3.8}$$

Równowaga $U_{CD} = 0$ zachodzi, gdy:

$$Z_1 Z_2 = Z_3 Z_4 \tag{3.8a}$$

Tak więc w obu przypadkach, przy równych wydajnościach prądowych źródeł zasilających $J_1 = J_3$, **warunkiem równowagi jest równość iloczynów impedancji ramion przyległych do przekątnej wyjściowej układu mostkowego.** Dla układu z rys. 1 mamy równowagę przy równości iloczynów impedancji przyległych do przekątnych AB – wzór (3.7a) lub też równowagę przy równości iloczynów impedancji przyległych do przekątnej CD – wzór (3.8a). Warunki te mogą być spełnione równocześnie jedynie przy jednakowych naprzeciwległych impedancjach, tj. gdy $Z_1 = Z_3$ i $Z_2 = Z_4$. Taką samą parę wzorów na napięcia wyjściowe i warunki równowagi otrzyma się przy zasilaniu układu mostkowego dwoma jednakowymi źródłami J, dołączonymi obocznie do ramion Z_2 *i* Z_4.

Warunki (3.7a) i (3.8a) różnią się istotnie od warunku równowagi mostka przy jego klasycznym zasilaniu z jednego źródła, dołączonego do przekątnej AB lub CD. Przy tych samych oznaczeniach otrzymuje się wówczas następującą równość iloczynów impedancji w ramionach przeciwległych:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \tag{3.9}$$

Właśnie dla podkreślenia tej różnicy, układy mostkowe o niekonwencjonalnym, dwuprądowym sposobie zasilania, autor we wcześniejszych swoich publikacjach nazywał antymostkami [27-30]. Kilku metrologom nazwa ta jednak wydała się zbyt kontrowersyjna ze względu na zawarte w niej przeciwstawienie. Został więc zaproponowany nowy, niebudzący już takich zastrzeżeń termin – **mostki dwupradowe.**

Z porównania warunków (3.7a) i (3.8a) oraz (3.9) wynika, że dla każdego ze znanych klasycznych układów mostkowych istnieją jeszcze aż 4 różne warianty połączeń tych samych impedancji w układach mostków dwuprądowych: – po 2 dla $U_{AB} = 0$ i $U_{CD} = 0$. Wynika to z możliwości permutacji impedancji w jednym z iloczynów każdego z nowych warunków równowagi (zamiana miejscami impedancji w ramionach mostka). Otwiera to ogromne możliwości aplikacyjne mostków dwuprądowych przy ich zasilaniu nie tylko prądem stałym, ale przede wszystkim zmiennym zarówno sinusoidalnym, jak i o innym kształcie. Przy obocznym dwuprądowym zasilaniu można na przykład zrównoważyć takie układy mostków immitancyjnych, które nigdy nie równoważyły się przy klasycznym zasilaniu, gdyż nie spełniały strukturalnie warunku równości sumy faz w ramionach przeciwległych – patrz np. mostkowy przesuwnik fazy o elementach 2R i 2C omówiony w rozdziale 7.

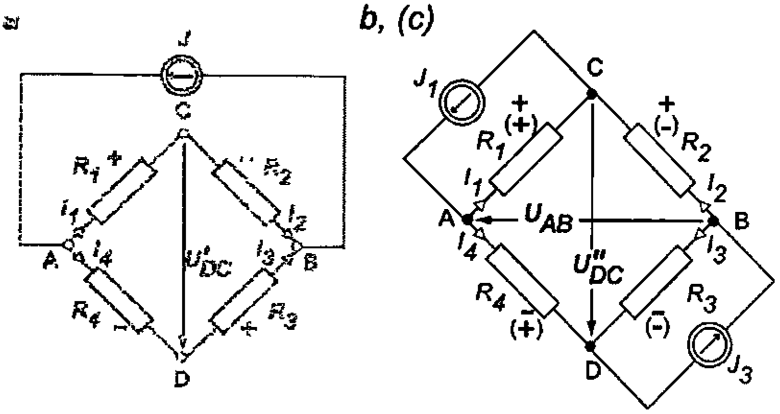
3.2. Napięcia wyjściowe dwuprądowych mostków rezystancyjnych w wartościach względnych rezystancji

Na rys. 3.2 przedstawiono dwa różne sposoby prądowego zasilania mostka czterogałęziowego składającego się tylko z samych rezystancji. Zwroty napięć dla wszystkich układów na rysunkach są skierowane przeciwnie niż podane na rysunku kierunki prądów, czyli do wyższego potencjału.

Układ klasyczny a), zasilany po przekątnej AB, omówiono szczegółowo w poprzednim rozdziale, a tu powtórzono jego schemat dla wygody porównywania z mostkiem dwuprądowym. Mostek ten stosuje się obecnie zazwyczaj przy wyjściu napięciowym z zacisków DC, a więc przy bardzo dużej rezystancji obciążenia, ale nie jest to obligatoryjne. Prąd zwarcia jako sygnał wyjściowy mostka wykorzystuje się dość rzadko, głównie aby uzyskać lepszą liniowość przy pomiarach wielkości proporcjonalnych do przyrostów konduktancji ramion mostka. Układ powinien wówczas współpracować z przetwornikiem o wejściu prądowym z pomijalnie małą rezystancją wejściową, uzyskiwaną dzięki równoległemu sprzężeniu zwrotnemu.

Do zacisków AC i DB mostka rezystancyjnego 4R przedstawionego na rys. 3.2b(c) dołącza się dwa prądowe źródła zasilania oraz ma on dwa wyjścia z

Mostki dwuprądowe można stosować zarówno jako układy zrównoważone, jak i jako niezrównoważone (odchyłowe). Dla pierwszych z nich źródła powinny być jedynie współbieżne lub przełączane, dla drugich – również stabilizowane. Rozpatrzymy kolejno wszystkie te możliwości.



Rys. 3.2. Mostki rezystancyjne prądowe
a klasyczny mostek jednoprądowy: zasilanie AB, wyjście DC – układ a);
b, (c) mostek zasilany dwuprądowo z jednakowych źródeł $J_1 = J_3$ dołączonych do zacisków AC i BD,
wyjście DC układ b), wyjście AB – układ (c)
Podane na rysunku znaki przyrostów rezystancji (dla układu c w nawiasach) rozrównoważają mostek w tym samym kierunku.
Fig. 3.2. Current supplied bridges:
a Conventional bridge supplied by current J via terminals AB, output DC,
b, (c) Bridge supplied by two equivalent sources $J_1 = J_3$ connected to AC and BD terminals; Outputs: DC – of the b) circuit; AB - of the (c) circuit.
Given on figure signs of resistance increments (of the circuit (c.) - in brackets) unbalance the bridge in the same direction.

przekątnych DC i AB. Z punktu widzenia teorii obwodów jest więc to uproszczony układ aż cztero-bramowy (4P). Jednak stosowanie formalnego macierzowego opisu takiego układu byłoby zbyt skomplikowane dla nieobciążonego, zaledwie czterogałęziowego mostka 4R. W tabeli 1.1 podano już kilka podstawowych wzorów mostka dwuprądowego, ale wyrażonych tylko w wartościach bezwzględnych jego rezystancji. Potraktowano tam każde z wyjść osobno - jako układ b) oraz c) – patrz kolumny b, c tabeli 1.1. Ich wzory otrzymano je przy założeniu, że zasilające źródła prądowe są idealne i jednakowe, tj. $J_1 = J_2 \equiv J$. Przy zastosowaniu niezrównoważonego mostka dwuprądowego do pomiarów dwuparametrowych wykorzystuje się równocześnie oba jego sygnały wyjściowe. Wówczas nie może on mieć obciążonych wyjść, gdyż stan jednego z nich wpływa na stan równowagi drugiego i wzory znacznie się komplikują. Wynika to z równań opisujących działanie mostka jako pełnego układu 4T. Takie same jak poprzednio podane wzory będą więc obowiązywały tylko wówczas, gdy wyjścia są idealnie napięciowe[2]. Dlatego też oba wyjścia nadal będą omawiane oddzielnie, odpowiednio jako –układy b oraz c.

Wyprowadzone w punkcie 3.1 wzory (3.7) i (3.8) na napięcia wyjściowe mostka dwuprądowego przy niejednakowych prądach zasilających J_1, J_3 i dla impedancji $Z_i = R_i$ można przekształcić do następujących postaci:

$$U''_{DC} = J_1 \frac{(R_1R_2 - R_3R_4)}{\sum R_i} - \frac{\Delta J(R_1 + R_4)R_3}{\sum R_i} \qquad (3.10)$$

$$U_{AB} = J_1 \frac{(R_1R_4 - R_2R_3)}{\sum R_i} - \frac{\Delta J(R_1 + R_2)R_3}{\sum R_i} \qquad (3.11)$$

gdzie: $\Delta J \equiv J_3 - J_1$

Warunki równowagi równań (3.10) i (3.11) zależą od różnicy prądów ΔJ. Przy jednakowych źródłach zasilających $J_3 = J_1 \equiv J$ prądu stałego lub współfazowych źródłach prądu przemiennego, mamy $\Delta J = 0$ i wzory te upraszczają się do postaci podobnych do wzoru (2.6) dla mostka jednoprądowego. Na nieobciążonych przekątnych występują wówczas napięcia podane wcześniej w tabeli 1.1, które wynoszą:

$$U''_{DC} = \frac{J(R_1R_2 - R_3R_4)}{\sum R_i} \qquad (3.12)$$

$$U_{AB} = \frac{J(R_1R_4 - R_3R_2)}{\sum R_i} \qquad (3.13)$$

Stąd, gdy $U''_{DC} = 0$ lub $U_{AB} = 0$, otrzymuje się bezpośrednio następujące **warunki równowagi**:

[2] Autor podaje też układ dualny do mostka dwuprądowego o zasilaniu z dwu źródeł napięciowych i dwu równoczesnych wyjściach w postaci prądów zwarcia – patrz punkt 3.9.

$$R_1R_2 = R_3R_4 \quad (3.12a)$$

lub

$$R_1R_4 = R_2R_3 \quad (3.13a)$$

Są one inne niż warunek (2.6a) dla mostków rezystancyjnych klasycznych. Dla mostka rezystancyjnego można sformułować je łącznie werbalnie jako:

równość iloczynów par rezystancji ramion przyległych do przekątnej wyjściowej.

W układzie b) dotyczy to więc rezystancji w poziomie, a w układzie c) – w pionie schematu mostka z rys. 3.2b(c). Warunki te nie zależą od rezystancji doprowadzeń źródeł i od jednakowych zmian obu prądów. Taką samą parę warunków równowagi uzyskuje się też, gdy źródła prądowe J dołączy się obocznie do przeciwległych ramion CB i AD.

Z rozważań w punkcie 3.1 wynika, że przy źródłach prądowych J_1, J_3 nieidealnych, ich rezystancje wewnętrzne bocznikują rezystancje mostka R_1, R_3, mają więc wpływ na warunki równowagi. Należałoby wówczas we wzorach (3.12) i (3.13) oraz (3.10a) i (3.13a) wstawiać odpowiednio wartości rezystancji takich równoległych połączeń. Również rezystancje przekątnych wpływają na rozpływ prądów w układzie i wskutek tego na warunek równowagi w drugiej przekątnej. Dlatego przy równoczesnym wykorzystywaniu obu wyjść należy stosować mostek dwuprądowy zasilany wymuszonymi prądami i nieobciążony na obu wyjściach.

Wzory (2.13) i (3.12), (3.13) na napięcia wyjściowe oraz wynikające z nich warunki równowagi dla wszystkich trzech powyższych mostków o prądowym zasilaniu mają podobną formę. Rezystancje zmieniają w nich jedynie swoje miejsca, zależnie od sposobu zasilania i przekątnej wyjściowej.

Wszystkie parametry w stanie równowagi oznacza się dalej w tekście dodatkowym indeksem dolnym „0". Wprowadza się też wartości względne rezystancji mostka odniesione do rezystancji pierwszego ramienia w stanie równowagi, tj. $r_{i0} \equiv \frac{R_{i0}}{R_{10}}$. Ponadto parametry, które w każdym z układów a, b, c mają inną wartość rozróżnia się dodatkowo indeksami górnymi. Jeśli rezystancje początkowe trzech ramion R_{10}, R_{20}, R_{40} mają takie same wartości, to równowaga każdego z układów zachodzi przy różnych wartościach R_{30}, tj. dla następujących względnych wartości r'_{i0}, r''_{i0}, r'''_{i0} tej rezystancji:

$$r'_{30} = r_{20}\, r_{40}; \qquad r''_{30} = \frac{r_{20}}{r_{40}}; \qquad r'''_{30} = \frac{r_{40}}{r_{20}}; \qquad (3.14a,b,c)$$

Stąd też wynika, że w ogólnym wypadku wartości $r'_{30}, r''_{30}, r'''_{30}$ są różne. Mostek dwuprądowy jest równocześnie zrównoważony w obu przekątnych tylko gdy $r_{20} = r_{40}$, zaś omawiane trzy układy są razem w równowadze, gdy $r_{20} = r_{30} = r_{40} = 1$, a więc przy wszystkich jednakowych rezystancjach początkowych R_{i0} jego ramion – patrz tabela 1.3. Po zastosowaniu oznaczeń według wzorów (2.3) i przekształceniu wzorów (2.13), (3.12) i (3.13) otrzymuje się napięcia wyjściowe o następujących postaciach:

$$U'_{DC} = JR_{10}\frac{r_{10}r'_{30}}{\sum r'_{i0}}\cdot\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4)}{1+\frac{\sum r'_{i0}\varepsilon_i}{\sum r'_{i0}}} \equiv T'_0\cdot f'(\varepsilon_i) \tag{3.15a}$$

$$U''_{DC} = JR_{10}\frac{r_{10}r''_{20}}{\sum r''_{i0}}\cdot\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4)}{1+\frac{\sum r''_{i0}\varepsilon_i}{\sum r''_{i0}}} \equiv T''_0\cdot f''(\varepsilon_i) \tag{3.15b}$$

$$U_{AB} = JR_{10}\frac{r_{10}r'''_{40}}{\sum r'''_{i0}}\cdot\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_3)}{1+\frac{\sum r'''_{i0}\varepsilon_i}{\sum r'''_{i0}}} \equiv T'''_0\cdot f'''(\varepsilon_i) \tag{3.15c}$$

gdzie: T'_0, T''_0, T'''_0 – napięciowe czułości początkowe;

$f'(\varepsilon_i)$, $f''(\varepsilon_i)$, $f'''(\varepsilon_i)$ – funkcje niezrównoważenia napięć układów.

Forma wszystkich tych wzorów jest podobna, łącznie z mianownikami funkcji niezrównoważenia. Wynika to stąd, że są to napięcia w układzie o tej samej strukturze i przy ich wyznaczaniu w mianowniku jest wyznacznik główny tego układu. Jednakże, nawet przy tych samych wartościach r_{20} oraz r_{40} wszystkich trzech układów zarówno ich czułości początkowe, jak i funkcje niezrównoważenia mają różne wartości, gdyż w ogólnym wypadku inne są względne rezystancje $r'_{30}, r''_{30}, r'''_{30}$ dla każdego z warunków równowagi – patrz tabele 1.1 i 1.3 oraz tabela 3.1.

Prądy, napięcia i moce w ramionach mostka każdego z układów a, b, c zależą zarówno od wartości początkowych R_{i0} wszystkich rezystancji oraz zmieniają się różnie w funkcji przyrostów ε_i. W niezrównoważonych nieobciążonych mostkach dwuprądowych o jednakowych źródłach zasilających $J_1 = J_3$, jednakowe są pary prądów ramion naprzeciwległych, tj. $I_1 = I_3$ oraz $I_2 = I_4$. Ze wzorów (3.15a, b, c) wynika, że napięcia wyjściowe każdego z układów różnie zależą od znaków i wartości przyrostów poszczególnych rezystancji.

Jako przykład, na rys. 3.2 podano znaki przyrostów rezystancji względem stanu równowagi, które rozrównoważają układy w tym samym kierunku. Aby uzyskać dwa różne sygnały mostka antysymetrycznego, równoważącego się równocześnie dla obu wyjść, muszą być różne co najmniej przyrosty trzech jego rezystancji. Przy parze połączonych ze sobą rezystancji, np. dwu czujnikach, w mostku dwuprądowym otrzymuje się dwa sygnały wyjściowe, z których jeden zależy od składowych obu tych przyrostów przy jednakowych ich znakach, a drugi – przy różnych.

W celu dalszego uproszczenia wzorów, również i dla mostka dwuprądowego zastosuje się oznaczenia jednoliterowe: $r_{20} \equiv m$, $r_{40} \equiv n$. Wówczas napięciowe czułości początkowe T_0', T_0'', T_0''' układów a oraz b i c wynoszą:

$$T_0' = JR_{10} \frac{mn}{(1+m)(1+n)} \tag{3.16a}$$

oraz

$$T_0'' = JR_{10} \frac{mn}{(n+m)(1+n)} \tag{3.16b}$$

$$T_0''' = JR_{10} \frac{mn}{(n+m)(1+m)} \tag{3.16c}$$

Warunki optymalizacji czułości T_0'', T_0''' przy kilku różnych ograniczeniach autor po raz pierwszy przeanalizował szczegółowo w publikacjach [31 – 33]. Syntezę tych rozważań zawiera punkt 3.4.

Dla bardzo małych przyrostów $\varepsilon_i << 1$, zależności (3.15a, b, c) linearyzują się, gdyż iloczyny par przyrostów stają się pomijalnie małe i ponadto w ich mianownikach $\Sigma r_{i0}\, \varepsilon_i << \Sigma r_{i0}$. Otrzymuje się prostsze postacie:

$$U_{DC}' = T_0' (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \tag{3.17a}$$

$$U_{DC}'' = T_0'' (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \tag{3.17b}$$

$$U_{AB} = T_0''' (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \tag{3.17c}$$

Wówczas, przy znakach z rys. 3.2 i jednakowych modułach przyrostów względnych $|\varepsilon_i|$ wszystkich rezystancji, uzyskuje się na wyjściach układów b i c, podobnie jak dla układu a, wartości napięć proporcjonalne do liczby ramion zmiennych (dla 2 ramion – dwukrotnie, a dla 4 ramion – czterokrotnie większe niż dla jednego ramienia). Układy mostka dwuprądowego, tak jak i mostki klasyczne, pozostają w równowadze bądź dla jednakowych przyrostów ε_i wszystkich rezystancji, bądź jednakowych ich par występujących po obu stronach określonego warunku równowagi. Przy dużych przyrostach ε_i jest możliwa również linearyzacja przebiegu napięć wyjściowych dla każdego z wyjść mostka dwuprądowego oddzielnie. Będzie ona omówiona nieco dalej.

Wskutek podobieństwa formy wzorów (3.15a, b, c), opis niedokładności mostków dwuprądowych przy jednej tylko wielkości mierzonej jest podobny do analizy błędów i niepewności mostków klasycznych, omówionych częściowo w literaturze, np. w [18, 19]. Składowe stałe błędów względnych rezystancji ramion mostka i ich wartości chwilowe rozrównoważają jednak inaczej każdy z układów, ze względu na różniące się warunki ich równowagi. Nie analizowana dotąd w literaturze niedokładność mostków jedno- i dwuprądowych przy dowolnie dużych i niezależnych od siebie przyrostach rezystancji będzie rozpatrzona szczegółowo w rozdziale 8.

Jedno- i dwuprądowe mostki niezrównoważone można też stosować przy wyjściowym sygnale w postaci prądu zwarcia – patrz tabele 3.3, 3.4. [31 – 35].

3.3. Parametry rezystancyjnych mostków dwuprądowych w stanie równowagi

W mostkach zrównoważonych wynik pomiaru otrzymuje się z zależności między parametrami układu, po sprowadzeniu go poprzez regulację ręczną lub automatyczną do stanu równowagi na wyjściu. W mostkach pasywnych dokonuje się to przez regulację jednej lub kilku rezystancji występujących w ich warunku równowagi, zaś w mostkach aktywnych – można regulować również dodatkowo źródła napięcia lub prądu. Stan równowagi stanowi też ważne i wygodne odniesienie przy opisie układów niezrównoważonych.

Dwuprądowy mostek prądu stałego z rys. 3.2b(c) jako zrównoważony, podobnie jak mostki klasyczne, może służyć do bezpośredniego pomiaru wartości rezystancji lub przewodności jednego z ramion, oraz ilorazu lub iloczynu tych parametrów w dwu ramionach. Ponadto, podobnie jak w metodzie porównywania spadków napięć, czy też w mostku Thompsona, wybraną parę naprzeciwległych rezystorów można dołączać do układu przy użyciu czterech zacisków.

Wówczas rezystancje przewodów doprowadzających prąd nie wchodzą w warunek równowagi. Przy pomiarach małych rezystancji czterogałęziowe mostki dwuprądowe mogą stanowić alternatywę sześciogałęziowego mostka Thompsona lub mostka Warshawsky'ego [7][3] stanowiącego jego

[3] Autor zainteresował się bliżej tym mostkiem i jego twórcą dzięki monografii [7], również ze względu na częściową zbieżność nazwiska. Nasze prace dzieli już przeszło

wielogałęziowe rozwinięcie. Spełnienie warunku współbieżności dwu źródeł prądowych J stało się obecnie nawet łatwiejsze niż warunku upraszczania się pełnego równania równowagi mostka Thompsona (równość lub stały stosunek rezystancji dwu ramion i dwu dekad regulacyjnych). Przy różniących się prądach J_1, J_3 obu źródeł można stosować metodę przeciwstawienia, w której poprawny wynik określa się jako średnią z dwu pomiarów przy zamianie tych źródeł miejscami – patrz punkt 3.5.

Tabela 3.1 podaje podstawowe parametry mostków prądowych a, b i c w stanie równowagi.

Przy równowadze układu a) (mostek Wheatstone'a zasilany prądowo) stosunki prądów w gałęziach wynoszą: $I_{10}/ I_{30} = I_{20}/ I_{40} = 1/n$, zaś prądy i napięcia ramion mostka są parami równe, tj. $I_{10} = I_{20}$ i $I_{40} = I_{30}$ oraz $U_{10} = U_{40}$ i $U_{20} = U_{30}$. Z zależności między podanymi w tabeli 3.1 mocami ramion wynika, że: ***przy równowadze mostka Wheatstone'a największą moc pobiera ramię szeregowe z ramieniem o najmniejszej rezystancji.*** Zależność ta może nie być spełniona poza tym stanem, a więc dla mostka niezrównoważonego, gdyż moce te zależą od względnych przyrostów ε_i rezystancji wszystkich ramion mostka.

W stanie równowagi układu b (mostek dwuprądowy z równością iloczynów rezystancji w poziomie) mamy: prądy w ramionach naprzeciwległych parami równe tj. $I_{10} = I_{30}$, $I_{20} = I_{40}$, stosunek prądów $I_{10}/I_{20}=I_{30}/I_{40}=n$, parami przeciwne napięcia boczne $U_{10} = -U_{40}$, $U_{20} = -U_{30}$ oraz równość stosunków napięć: $U_{20}/U_{10} = U_{30}/U_{40} = m$. Zależności między mocami ramion podano w kolumnie b tabeli 3.1.

Dla układu c (mostek dwuprądowy z iloczynami w pionie) w stanie równowagi, zależności między prądami są następujące: $I_{10} = I_{30}$, $I_{20} = I_{40}$ oraz $I_{10}/I_{30}=I_{20}/I_{40}=m$, zaś między napięciami: $U_{10}= -U_{20}$, $U_{40}= -U_{30}$ oraz $U_{40}/U_{10}=U_{30}/U_{20} = n$. Inne zależności podano w kolumnie c) tabeli 3.1.

W oparciu o zależności między prądami i napięciami ramion w dwuprądowych mostkach prądu stałego można też i dla nich sformułować uogólnioną zasadę dotyczącą mocy: **w stanie równowagi danego wyjścia mostka dwuprądowego największą moc pobiera rezystancja szeregowa z największą rezystancją w jednej z dwu gałęzi bocznych łączących zaciski wyjściowe** (dla układu b – gałęzie R_1, R_4 lub R_2, R_3; dla układu c – R_1, R_2 lub R_3, R_4). Jest to inna zależność niż dla układu a.

---

pół wieku, inny poziom techniki i przewidywane obszary aplikacji. Być może w okresie studiów lub w początku lat 60, podczas pierwszych lat pracy zawodowej autora, istniała nawet teoretycznie szansa na spotkanie osobiste, a nie tylko w literaturze, ale wówczas nie było można jej zrealizować. Mostek Warszawskiego od lat stosuje NIST (USA) do precyzyjnych pomiarów małych rezystancji. Jest on kłopotliwy w równoważeniu i jak wynika z informacji dostępnej w Internecie, został ostatnio zautomatyzowany. .Nie był szerzej znany i stosowany w Polsce.

Tabela 3.1. Podstawowe parametry mostków prądowych w równowadze
Table 3.1. Parameters of single and dual current supplied balanced bridges.

Parametr			L p.	a. klasyczny mostek prądowy	b. mostek dwuprądowy o wyjściu CD	c. mostek dwuprądowy o wyjściu AB
1			2	3	4	5
Numer ramienia mostka	1	R_{10}	1	R_{10}		
		I_{10}	2	$J\frac{n}{1+n}$	$J\frac{n}{1+n}$	$J\frac{m}{1+m}$
		P_{10}	3	$\frac{n^2}{(1+n)^2}J^2R_{10}$	$\frac{n^2}{(1+n)^2}J^2R_{10}$	$\frac{m^2}{(1+m)^2}J^2R_{10}$
	2	R_{20}	4	mR_{10}		
		I_{20}	5	$J\frac{n}{1+n}$	$J\frac{1}{1+n}$	$J\frac{1}{1+m}$
		P_{20}	6	mP_{10}	$\frac{m}{n^2}P_{10}$	$\frac{1}{m}P_{10}$
	3	R_{30}	7	nmR_{10}	$\frac{m}{n}R_{10}$	$\frac{n}{m}R_{10}$
		I_{30}	8	$J\frac{1}{1+n}$	$J\frac{n}{1+n}$	$J\frac{m}{1+m}$
		P_{30}	9	$\frac{m}{n}P_{10}$	$\frac{m}{n}P_{10}$	$\frac{n}{m}P_{10}$
	4	R_{40}	10	nR_{10}		
		I_{40}	11	$J\frac{1}{1+n}$	$J\frac{1}{1+n}$	$J\frac{1}{1+m}$
		P_{40}	12	$\frac{1}{n}P_{10}$	$\frac{1}{n}P_{10}$	$\frac{n}{m^2}P_{10}$

cd. tabl. 3.1.

1		2	3	4	5
Dla całego układu	U_{CD}	13	0	0	$JR_{10}\frac{m-n}{1+m}$
	U_{AB}	14	$JR_{10}\frac{1+m}{1+n}n$	$JR_{10}\frac{n-m}{1+n}$	0
	R_{CD}	15	$m\frac{1+n}{1+m}R_{10}$	$m\frac{1+n}{m+n}R_{10}$	$\frac{m^2+n}{1+m}R_{10}$
	R_{AB}	16	$n\frac{1+m}{1+n}R_{10}$	$\frac{n^2+m}{1+n}R_{10}$	$n\frac{1+m}{m+n}R_{10}$
	T_0	17	$JR_{10}\frac{mn}{(1+m)(1+n)}$	$JR_{10}\frac{mn}{(m+n)(1+n)}$	$JR_{10}\frac{mn}{(1+m)(m+n)}$
	S_Z	18	$S_z'=J\frac{n}{(1+n)^2}$	$S_z''=J\frac{n}{(1+n)^2}$	$S_z'''=J\frac{m}{(1+m)^2}$
	ΣP_{i0}	19	$\frac{(1+n)\,(1+m)}{n}P_{10}$	$\frac{(1+n)\,(m+n)}{n^2}P_{10}$	$\frac{(1+m)(m+n)}{m^2}P_{10}$
	ΣR_{i0}	20	$(1+m)(1+n)R_{10}$	$\frac{(1+n)(m+n)}{n}R_{10}$	$\frac{(1+m)(m+n)}{n}R_{10}$

Rezystancja wyjściowa R_{CD} układu b jest większa niż układu a dla $n > 1$ i większa od rezystancji wyjściowej R_{AB} układu c) dla $m > n$. Rezystancja R_{AB} układu c jest też większa od rezystancji wejściowej R_{AB} nieobciążonego układu a przy $m < 1$. Napięciowe czułości początkowe układów T_0', T_0'', T_0''' przeanalizowano szczegółowo w publikacjach [31 - 33] i w punkcie 3.4, zaś czułość początkową prądu zwarcia – w punkcie 3.5.

Z sumy mocy ΣP_{i0} pobieranej przez układ przy różnych sposobach zasilania, lecz przy tej samej mocy ramienia P_{10}, wynika ponadto, że przy określonej wartości m układ b pobiera mniejszą moc niż układ a, gdy $n < 1$. Zaś przy zadanym n – układ c pobiera mniejszą moc od układu a, gdy $m < 1$.

3.4. Optymalizacja napięciowych czułości początkowych mostków prądowych

Ze wzorów (3.16a, b, c) wynika, że napięciowe czułości początkowe T_0'', T_0''' mostka dwuprądowego inaczej zależą od wartości m i n niż czułość T_0' klasycznego mostka jednoprądowego. Wartości parametrów każdego z układów powinny być takie, by jego czułość była możliwie największa przy różnych ograniczeniach występujących w układzie. Zagadnienia te autor po raz pierwszy rozwiązał w pracach [31 – 33]. Analizując dla każdego z układów możliwości uzyskiwania jak największej czułości rozpatrzymy dobór ich parametrów przy następujących dwu ograniczeniach, najbardziej charakterystycznych wśród występujących w praktyce:

– 1° prąd źródła $J = const.$ i rezystancja początkowa R_{10} = const.

– 2° moc pierwszego ramienia w równowadze P_{10} = const. i jego rezystancja R_{10} = const.

3.4.1. Czułość T_0' układu a)

Napięciową czułość początkową układu a) - klasycznego mostka prądowego, opisaną wzorem (3.16a), można przekształcić do postaci:

$$T_0' = JR_{10} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{3.18}$$

Stąd wynika, że czułość ta jest proporcjonalna zarówno do wydajności prądowej źródła J, jak i do rezystancji początkowej R_{10} oraz przyjmuje wartości na hiperboloidzie, wzrastające wraz ze współczynnikami m i n. Powinny więc być one jak największe, o ile pozwolą na to ograniczenia występujące w układzie pomiarowym. Przy jednym z tych współczynników jako parametrze stałym, dla drugiego z nich otrzymuje się rodzinę hiperbol.

Przypadek 1°: JR_{10} = const.

Czułość T_0' rośnie hiperbolicznie ze wzrostem współczynników: n oraz m.

Przy $m = const.$, gdy $n \to \infty$, wtedy $T_0' \to JR_{10}\, m/(1+m)$;

zaś przy $n = const.$ i $m \to \infty$, – $T_0' \to JR_{10}\, n/(1+n)$.

Wartość graniczna tej czułości występuje przy $m \to \infty$ i $n \to \infty$ i wynosi:

$$T_0'{}_{MAX} = JR_{10} \tag{3.19}$$

Tak więc przy JR_{10} = const. należy dobrać jak największe zarówno m jak i n. Uzyskanie możliwie dużej czułości jest jednak ograniczone dopuszczalnymi mocami ramion mostka oraz maksymalnym napięciem źródła prądowego i maksymalną rezystancją wyjściową mostka.

Moc pierwszego ramienia i zależności między mocami ramion w stanie równowagi mostka prądowego a) podano w jego kolumnie w tabeli 3.1. Stąd:

$$P_{10} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^2 J^2 R_{10} \tag{3.20}$$

oraz:

$$P_{20} = mP_{10}; \qquad P_{30} = \frac{m}{n} P_{10}; \qquad P_{40} = \frac{1}{n} P_{10}. \tag{3.20a}$$

We wszystkich mostkach klasycznych największą moc w stanie równowagi pobiera ramię szeregowe z ramieniem o najmniejszej rezystancji, gdyż wskutek równości pary napięć U_{10} i U_{40} oraz U_{20} i U_{30}, to w nim płynie największy prąd. Przy $m > n > 1$ największa moc w stanie równowagi układu pobiera ramię R_2. Stanowi ona ograniczenie dla uzyskania jak największej czułości mostka. Przy dopuszczalnej wartości $P_{20\,MAX}$ z (3.20) i (3.20a) otrzymuje się:

$$m_{1MAX} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{P_{20}}{I^2 R_{10}} \tag{3.21a}$$

Maksymalne wartości m i n są również ograniczane przez dopuszczalne maksymalne rezystancje: wejściową $R_{AB} \equiv r_{AB}\, R_{10}$ i wyjściową $R_{CD} \equiv r_{10}\, R_{10}$. Stąd wynika:

$$m_{2MAX} \leq \frac{(r_{AB} - 1) r_{CD}}{r_{CD} - 1} \tag{3.21b}$$

$$n_{MAX} \leq \frac{(r_{CD} - 1) r_{AB}}{r_{AB} - 1} \tag{3.21c}$$

Należy przyjąć mniejszą z wartości m_{1MAX}, lub m_{2MAX}.

Na przykład, gdy: $r_{CD} = 10$, $r_{AB} = 5$ otrzymuje się: $m_{2MAX} = 4{,}44$; $m_{1MAX} \leq \frac{1{,}19\, P_{20\,MAX}}{J^2 R_{10}}$; $n_{MAX} = 1{,}25$ oraz $T_0' \approx 0{,}88\, JR_{10}$ (około $T_0'_{MAX}$).

Jeśli mostek jest symetryczny tylko względem przekątnej CD (tj. $m = 1$), to:

$$n_{max} \leq 2r_{CD} - 1 \text{ oraz } n_{MAX} \leq r_{AB} / (2 - r_{AB}) \text{ jeśli } r_{AB} \leq 2.$$

Przy jednakowych dopuszczalnych mocach wszystkich rezystancji $P_{i0\,MAX}$ otrzymuje się jako optymalne wartości $m = n = 1$ i czułość: $T_0' = (1/4)\, JR_{10}$ Zaś maksymalne dopuszczalne wartości prądu lub rezystancji R_{10} wynikają z zależności: $4P_{i0\,MAX} = J^2 R_{10}$.

Przypadek 2°: P_{10} = const., R_{10} = const.

Jeśli dla pierwszego ramienia mostka a) zadano dopuszczalną wartość mocy $P_{10\,MAX}$ i rezystancję R_{10}, to po wyznaczeniu ze wzoru (3. 20) wartości prądu J, początkowa czułość T_0' wyniesie:

$$T_0' = \frac{m}{1+m}\sqrt{P_{10}R_{10}} \tag{3.22}$$

gdzie: $\sqrt{P_{10}R_{10}} = U_{10}$ – napięcie ramienia R_{10}.w równowadze.

Czułość T_0' wzrasta podobnie jak poprzednio wraz z m – wg funkcji homograficznej, ale jest niezależna od wartości n. Jeśli $m \to \infty$, to $T_0' \to U_{10}$. Na podstawie (3.20a) moc P_{20} jest proporcjonalna do m i gdy $P_{10} = P_{10\,MAX}$ (dzięki odpowiedniemu doregulowaniu prądu J), to wówczas wartość m jest ograniczona przez moc $P_{20\,MAX}$, która powinna być jak największa. Jeśli obie te moce są jednakowe, to czułość $T_0' = 0{,}5\,\sqrt{P_{10}R_{10}} = U_{10}$ i nie zależy od n.

Ograniczenia poziomu rezystancji dolnych ramion mostka a) są dwojakiego rodzaju. Jeśli $m > 1$, to dolne z nich wynosi: $n_{MIN} > \frac{P_{10MAX}}{mP_{30MAX}}$ lub $n_{MIN} > \frac{P_{10MAX}}{P_{40MAX}}$.

Ograniczenie od góry wynika jak poprzednio z dopuszczalnych maksymalnych wartości rezystancji wejściowej i wyjściowej mostka. Prąd źródła J powinien zaś być tak ustawiony, by nie przekroczyć dopuszczalnych mocy ramion P_{iOMAX}.

Gdy zadany w przypadku **1°** prąd J = const. i maksymalna rezystancja R_{10} są za małe by osiągnąć dopuszczalną moc chociażby w jednym z ramion mostka, to wyższą czułość T_0' otrzyma się w przypadku 2°.

3.4.2. Czułość T_0'' układu b)

Po przekształceniu wzoru (3.16b), czułość T_0'' mostka dwuprądowego b) – o wyjściu DC układu z rys 3.2b(c), wyniesie:

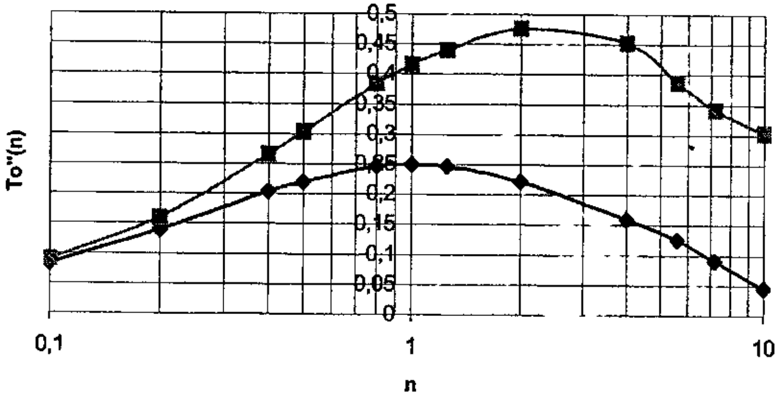
$$T_0'' = JR_{10}\frac{n}{\left(\frac{n}{m}+1\right)(1+n)}$$

Przypadek 1°: JR_{10} = const.

Z powyższego wzoru wynika bezpośrednio, że przy JR_{10} = const. i n = const. czułość początkowa T_0'' wzrasta hiperbolicznie wraz z m. Wartość m powinna więc być jak największa. Gdy $m \to \infty$, wówczas: $T_0'' \to JR_{10}\,n/(1+n)$.

Przy $m \to \infty$ i $n \to \infty$, $T_0'' \to JR_{10}$.

Natomiast dla m=const., przebieg czułości T_0'' w funkcji n ma łagodne maksimum – patrz przebiegi dla m =1 i m =5 na rys. 3.3.



Rys.3.3. Zależność czułości początkowej $T_0''(n)$ układu b) dla dwu wartości. m =1 – punkty w postaci rombów, m =5 - kwadraty.
Fig 3.3. Initial sensitivity $T_0''(n)$ of the circuit b) for two values: m=1, m=5

Z przyrównania pierwszej pochodnej do zera wynika, że maksymalna czułość $T_0''_{MAX}$ występuje przy $n_e = \sqrt{m}$ i wynosi:

$$T_{0\,MAX}'' = JR_{10}\frac{m}{\left(1+\sqrt{m}\right)^2} \tag{3.23}$$

Czułość ta wzrasta wraz z m, które powinno być jak największe. Przy m = 1, $T_0''_{MAX} = JR_{10}/4$, zaś dla $m \rightarrow \infty$, $T_0''_{MAX} \rightarrow JR_{10}$.

W praktyce pomiarowej występują i tu, ograniczenia współczynników m i n, a więc i czułości T_0'', ze względu na dopuszczalne moce $P_{i0\,MAX}$ i prądy gałęzi, rezystancje wejściowe i rezystancję wyjściową mostka. Określa się je za pomocą wzorów z kolumny układu b) w tabeli 3.1.

Moc P_{10} tu też jest opisana wzorem (3.20), ale zależności pomiędzy mocami ramion są już inne, tj.:

$$P_{20} = \frac{m}{n^2}P_{10}\,; \qquad P_{30} = \frac{m}{n}P_{10}\,; \qquad P_{40} = \frac{1}{n}P_{10} \tag{3.23a}$$

Przy prądach źródeł zasilających $J_1 = J_3$ można też sformułować, inną niż dla mostka klasycznego ogólną zasadę, obowiązującą dla każdego z wariantów b) i c) układu mostka dwuprądowego:

maksymalna moc wydziela się w rezystancji szeregowej z największą w ścieżkach gałęzi łączących zaciski danego wyjścia mostka dwuprądowego, gdy znajduje się on w równowadze

W układzie b) jest to. R_{10}, R_{40} lub R_{20}, R_{30}, a w układzie c) - R_{10}, R_{20} lub R_{30} R_{40} Zasada ta wynika stąd, że w równowadze prądy ramion przeciwległych są jednakowe, a napięcia rezystancji w każdej ścieżce – przeciwne, np. $U_{40}= -U_{10}$, $U_{30}= -U_{20}$, gdy $U_{CD}''=0$. Jeśli $m>n>1$, to najbardziej obciążone jest ramię R_{30}.

Ograniczenia m i n, wynikające z dopuszczalnych napięć źródeł prądowych są ujęte wzorami:

$$U''_{10} = JR_{10}\frac{n}{1+n} \tag{3.24a}$$

$$U''_{30} = J\,R_{10}\frac{m}{m+n} \tag{3.24b}$$

Zaś maksymalna rezystancja wyjściowa:

$$R''_{CD} = R_{10}\frac{1+m}{m+n} \tag{3.24c}$$

Gdy $m=n=1$, czułość $T_0''= \frac{1}{4}JR_{10}$.

Przypadek 2°: $P_{10}\,R_{10}$ = const.

Ze wzorów (3.16b) i (3. 20) wynika:

$$T_0'' = \frac{m}{m+n}\sqrt{P_{10}R_{10}} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}\sqrt{P_{10}R_{10}} \tag{3.25}$$

$T''_{0MAX} \to U_{10} = \sqrt{P_{10}R_{10}}$ gdy $n/m \to 0$, tj. jeśli $m>>n$.

Dla mocy P_{10} i rezystancji R_{10}, czułość T_0'' będzie stała, gdy m/n= const. Wartość prądu źródła J ustawia się taką, by dopuszczalne moce ramion mostka nie zostały przekroczone. Przy $m=n$ czułość wynosi

$$T_0''=0{,}5\sqrt{P_{10}R_{10}} = 0{,}5U_{10}.$$

3.4.3. Czułość T_0''' układu c)

Po przekształceniu wzoru (3.16c) dla układu c) mostka dwuprądowego o wyjściu AB otrzymuje się:

$$T_0''' = JR_{10}\frac{m}{\left(1+\frac{m}{n}\right)(1+m)}$$

Przypadek 1^0: JR_{10}= const.

Z powyższego wzoru wynika, że przy m=const., czułość początkowa T_0''' rośnie hiperbolicznie wraz z n; a gdy $n \rightarrow \infty$, wtedy: $T_0''' \rightarrow JR_{10}\, m/(1+m)$.

Przebieg tej czułości w funkcji m przy n=const. ma również łagodne ekstremum. Maksymalna czułość $T_{0\,MAX}'''$ występuje tu przy $m_e = \sqrt{n}$ i wynosi:

$$T_{0\,MAX}''' = JR_{10}\frac{n}{\left(1+\sqrt{n}\right)^2} \tag{3.26}$$

Np. dla $n = 1$, $T_{0\,MAX}''' = JR_{10}/4$, zaś przy $n \rightarrow \infty$, $T_{0\,MAX}''' \rightarrow JR_{10}$

Czułość początkowa T_0''' układu c) jest ograniczona ze względu na graniczne wartości m i n, wynikające z dopuszczalnych mocy w ramionach mostka oraz napięć i rezystancji na zaciskach. Określa się je również ze wzorów tabeli 3.1 zamieszczonych w kolumnie dla tego układu. Dla mocy P_{10} obowiązuje ten sam, co dla poprzednich układów – wzór (3.20). Zaś moce pozostałych ramion są powiązane z nią zależnościami:

$$P_{20} = \frac{1}{m}P_{10}; \qquad P_{30} = \frac{n}{m}P_{10}; \qquad P_{40} = \frac{n}{m^2}P_{10} \tag{3. 27a, b, c}$$

Z nich wynika, że przy $m>n>1$ najbardziej obciążona jest rezystancja R_{10}

Napięcia na zaciskach źródeł opisane są następującymi wzorami:

$$U_{10}''' = JR_{10}m/(1+m) \tag{3.28a}$$

oraz

$$U_{30}''' = JR_{10}n/(m+n) \tag{3. 28b}$$

Zaś względna rezystancja wyjściowa wynosi:

$$r_{AB}''' = n(1+m)/(n+m) \tag{3. 28c}$$

Ze wzorów tych znajduje się dopuszczalne wartości współczynników m i n.

Przypadek 2°: $P_{10} R_{10}$ = const.

Z zależności (3.20) znajduje się

$$T_0''' = \frac{n}{m+n}\sqrt{P_{10}R_{10}} = \left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1} U_{10} \tag{3.29}$$

Czułość: $T_0'''_{MAX} \to U_{10} = \sqrt{P_{10}R_{10}}$, gdy $m/n \to 0$, tj. dla $n>>m$.

Czułość T_0''' jest stała, gdy (m/n)=const.. Ograniczenia doboru m i n są podobne jak poprzednio.

3.4.4. Zależności pomiędzy czułościami układów

Czułość T_0' klasycznego mostka jednoprądowego - układ a), dla $m=n$ wynosi:

$$T_0' = JR_{10}\frac{m^2}{(1+m)^2} \quad \text{lub} \quad T_0' = \frac{m}{1+m}\sqrt{P_{10}R_{10}} \tag{3.30a}$$

Dla mostka dwuprądowego przy $m=n$ czułości w obu przekątnych są takie same, tj.:

$$T_0'' = T_0''' = JR_{10}\frac{m}{2(1+m)} \quad \text{lub} \quad T_0'' = T_0''' = \frac{1}{2}\sqrt{P_{10}R_{10}} \tag{3.30b,c}$$

Oznacza to że dla obu rozpatrywanych przypadków: JR_{10} =const. lub $P_{10}R_{10}$=const. otrzymuje się $T_0' < T_0'' = T_0'''$, jeśli $m<1$.

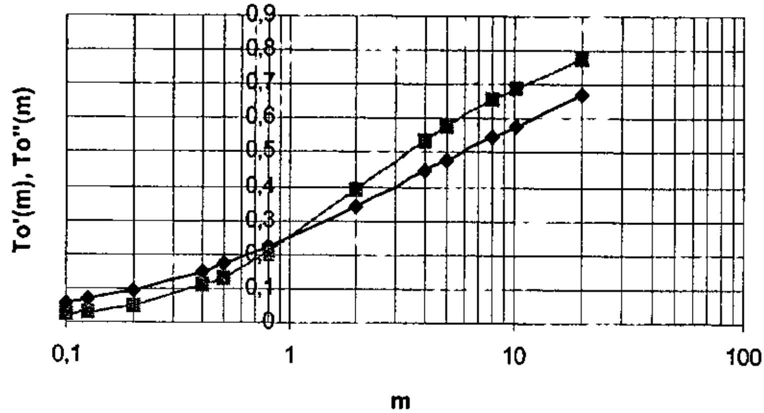
Można też wykazać, że między czułościami początkowymi omawianych trzech układów zachodzą następujące zależności:

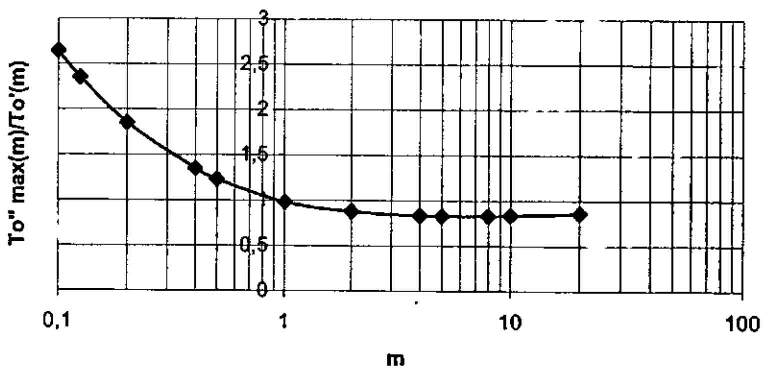
- dla układów b) i a) $T_0'' > T_0'$ gdy $m<1$ – patrz rys. 3.4;
- dla układów c) i a) $T_0''' > T_0'$ gdy $n<1$; zaś
- dla układów b) i c) $T_0'' > T_0'''$ gdy $m>n$.

Mostki dwuprądowe dysponują więc większą czułością przy mniejszych rezystancjach ramion niż klasyczny mostek prądowy. Przy tej samej mocy czujnika układ bardziej czuły pobiera też nieco większą moc. Dla $m=n=1$ wszystkie trzy czułości początkowe są jednakowe i wynoszą: $JR_{10}/4$.

Tak więc występowanie maksimum czułości początkowej względem n lub m odróżnia układy b) i c) mostka dwuprądowego od klasycznego układu a) mostka jednoprądowego, którego czułość wzrasta monotoniczne wraz z m i n według funkcji homograficznej (gałęzi przesuniętej hiperboli równoosiowej).

Warunki uzyskania maksymalnej czułości początkowej mostków dwuprądowych są inne niż dla mostka klasycznego i różne dla każdego z nich. Czułość T_0'' mostka dwuprądowego o wyjściu DC (układ b) rośnie podobnie tylko z m, a przy stałym m ma względem n łagodne maksimum dla $n_e = \sqrt{m}$. Zaś czułość T_0''' tego mostka dla wyjścia AB (układ c) rośnie też według funkcji homograficznej, ale inaczej – tylko wraz z n, zaś przy n = const. ma maksimum dla $m_e = \sqrt{n}$.





Rys. 3.4. Przebiegi czułości początkowej:

1 - maksymalna czułość $T''_{0\,max}(m)$ układu b) przy $n_e = \sqrt{m}$;

2 - czułość początkowa $T_0'(m)$ układu a) przy $n = n_e$;

3 - stosunek czułości $T''_{0\,max}/T_0' = f(m)$.

Fig. 3.4. Maximum initial sensitivities:

Curve 1 - $T''_{0\,max}(m)$ of circuit b) of double current bridge if $n_e = \sqrt{m}$,

Curve 2 - $T_0'(m)$ of single current bridge a) when $n = n_e$;

Curve 3 - ratio $T''_{0\,max}/T_0' = f(m)$ of above sensitivities.

Wzory dla sygnałów wyjściowych w postaci prądów zwarcia przy opisie ramion omawianych układów przez konduktancje i ich przyrosty podano w tabelach 3.4 – 3.5 zaczerpniętych z pracy autora [33].

3.5. Linearyzacja przebiegu napięć wyjściowych mostka dwuprądowego

Z podobieństwa wzorów (3.16a, b, c) wynika, że dla każdego z układów b), c) mostka dwuprądowego, linearyzacja napięcia wyjściowego przy dużych przyrostach wymaga podobnie, jak to szczegółowo opisano w rozdziale 2 dla mostka jednoprądowego a), równoczesnych zmian w co najmniej dwu ramionach mostka i przyrostów rezystancji w określonym, ogólnie innym dla każdego z układów, stosunku do siebie proporcjonalnych [35, 37]. Warunki te w ogólnym wypadku są różne pomiędzy sobą i inne niż dla mostka jednoprądowego. Dla wszystkich trzech układów zestawiono je w tabeli 3.2, wraz z szczególnymi rodzajami pracy. Zależności są na tyle proste, iż nie wymagają już dalszych komentarzy.

3.6. Mostki dwuprądowe o różniących się źródłach zasilających $J_1 \neq J_3$

Rozważymy teraz bliżej właściwości mostka dwuprądowego przy niejednakowych prądach źródeł zasilających $J_1 \neq J_3$. Dokonamy tego na przykładzie układu c). Jego napięcie wyjściowe jest opisane wzorem (3.11), który dla wygody Czytelnika zostanie tu powtórzony:

$$U_{AB} = J_1 \frac{(R_1 R_4 - R_2 R_3)}{\sum R_i} - \frac{\Delta J (R_1 + R_2) R_3}{\sum R_i}$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia jest taki, jak dla jednakowych źródeł. Zaś drugi, występujący tu składnik, proporcjonalny do ΔJ, wpływa zarówno na warunek równowagi układu ($U_{AB} = 0$), jak i na przebieg napięcia wyjściowego w funkcji rezystancji R_i.

Wzór ten można też opisać następująco w wartościach względnych rezystancji [33 – część II].

$$U_{AB} = JR_{10} \left[\frac{mn}{(m+n)(1+m)} f''(\varepsilon_i) - \delta_J \frac{mn}{n+m} \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1+m}\right)(1+\varepsilon_3)}{1+\frac{\sum r_{i0}\,\varepsilon_i}{\sum r_{i0}}} \right] \tag{3.31}$$

Dla $U_{AB} = 0$ warunek równowagi układu c) jest teraz następujący:

$$R_1R_4 = R_2R_3\left[1+\delta_J(1+\frac{R_1}{R_2})\right] \qquad (3.32)$$

gdzie $\delta_J = \frac{\Delta J}{J_1}$ – względna różnica prądów.

Jeśli do wyznaczenia wartości rezystancji mierzonej mostkiem dwuprądowym zrównoważonym przyjmie się prostszy warunek równowagi układu c, tj. taki jak poprzednio dla jednakowych źródeł, czyli: $R_{10}\,R_{40} = R_{20}\,R_{30}$, to powstanie dodatkowy względny błąd pomiaru rezystancji. Np. przy pomiarze rezystancji R_4, ze wzoru (3.31) wynika, że błąd ten wyniesie:

$$\delta_{R4} \cong \delta_J\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (3.33)$$

Przy symetrii rezystancji mostka względem przekątnej CD, czyli dla $m = 1$, otrzymuje się: $\delta_{R4} = 2\frac{\Delta J}{J_1}$.

Z cytowanego powyżej wzoru (3.11) wynika też, że na wyjściu mostka spełniającego warunek $R_{10}\,R_{40} = R_{20}\,R_{30}$ otrzymuje się następującą początkową wartość napięcia niezrównoważenia:

$$\Delta U_{AB} = J_1\,\delta_J\,\frac{R_{10}R_{40}}{R_{20}+R_{40}} \qquad (3.34)$$

Równość prądów źródłowych J_1, J_3 jest więc dla dwuprądowych mostków warunkiem dosyć krytycznym.

3.7. Mostki dwuprądowe o przełączanych źródłach

Autor zaproponował prostą metodę uzyskania wyniku pomiaru niezależnego od różnicy ΔJ prądów $J_1 \neq J_3$ źródeł zasilających mostek dwuprądowy [31]. Stosując dowolny z układów b) i c), należy w tym celu wykonać dwa pomiary przy zamianie źródeł miejscami. Układy takie przedstawiono na rys. 3.5. Schemat a) ujmuje przełączanie dwu źródeł, natomiast schemat b) – tylko jednego. Przy przełączaniu, zależny od ΔJ drugi składnik we wzorach (3.10) i (3.11), zmienia znak na przeciwny. Nie wystąpi więc on w średnich wartościach napięć otrzymanych z dwu pomiarów, które wynoszą:

$$U''_{DC\,śr} = \frac{J_1+J_3}{2}\,\frac{R_1R_2-R_3R_4}{\sum R_i} \qquad (3.35a)$$

Tabela 3.2. Porównanie warunków liniowości napięcia wyjściowego mostków jedno- i dwuprądowych

Table 3.2. Comparison of output voltage linearity conditions of single and dual current bridges

Parametr		Nr	Mostek jednoprądowy		Mostek dwuprądowy					
						Wyjście DC			Wyjście AB	
			Układ a ($r_3' = m\,n$)		Nr	Układ b ($r_3'' = m/n$)		Nr	Układ c ($r_3''' = n/m$)	
Ogólny warunek liniowości 1		**1'**	$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{34}$	$\varepsilon_1-\varepsilon_4=m(\varepsilon_3-\varepsilon_2)$ lub $\Delta R_1+\Delta R_2=\frac{\Delta R_4+\Delta R_3}{n}$	**1''**	$\varepsilon_1-\varepsilon_4=\frac{m}{n}(\varepsilon_2-\varepsilon_3)$ lub $\Delta R_1+\Delta R_3=\frac{1}{n}(\Delta R_2+\Delta R_4)$		**1'''**	$\varepsilon_1-\varepsilon_3=(\varepsilon_4-\varepsilon_2)m$ lub $\Delta R_1+\Delta R_2=\frac{m}{n}(\Delta R_3+\Delta R_4)$	
Napięcie wyjściowe			$U'_{DC}=JR_{10}\frac{n}{1+n}(\varepsilon_1-\varepsilon_4)$			$U''_{DC}=JR_{10}\frac{n}{1+n}(\varepsilon_1-\varepsilon_4)$			$U_{AB}=JR_{10}\frac{n}{n+m}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$	
Rodzaje przyrostów sprzężenia	Znak		+ +	- -		+ +	- -		+	- -
	Dwie pary	1'a	$\varepsilon_1=m\varepsilon_3$	$\varepsilon_4=m\varepsilon_2$	1''a	$\varepsilon_1=\frac{m}{n}\varepsilon_2$	$\varepsilon_4=\frac{m}{n}\varepsilon_3$	1'''a	$\varepsilon_1=m\varepsilon_4$	$\varepsilon_3=m\varepsilon_2$
			+ +							
	Jedna para	1'b	$\varepsilon_1=m\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=\varepsilon_4=0$	1''b	$\varepsilon_1=\frac{m}{n}\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$	1'''b	$\varepsilon_1=m\varepsilon_4$	$\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$
			+ -	- +		+ -	- +		+ -	- +
	Dwie pary	1'c	$\varepsilon_1=-m\varepsilon_2$	$\varepsilon_4=-m\varepsilon_3$	1''c	$\varepsilon_1=-\frac{m}{n}\varepsilon_3$	$\varepsilon_4=-\frac{m}{n}\varepsilon_2$	1'''c	$\varepsilon_1=-m\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=-m\varepsilon_4$
			+ -							
	Jedna para	1'd	$\varepsilon_1=-m\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$	1''d	$\varepsilon_1=-\frac{m}{n}\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=\varepsilon_4=0$	1'''d	$\varepsilon_1=-m\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$
	Mostek uproszczony	1'e	$m=1$	$\varepsilon_1-\varepsilon_4=\varepsilon_3-\varepsilon_2$ lub $\Delta R_1+\Delta R_2=\frac{\Delta R_3+\Delta R_4}{n}$	1''e	$m=n$	$\varepsilon_1-\varepsilon_4=\varepsilon_2-\varepsilon_3$ lub $\Delta R_1+\Delta R_2=\frac{1}{m}(\Delta R_3+\Delta R_4)$	1'''e	$m=1$	$\varepsilon_1-\varepsilon_3=\varepsilon_4-\varepsilon_2$ lub $\Delta R_1+\Delta R_2=\frac{1}{n}(\Delta R_3+\Delta R_4)$
		1'f	$m=n=1$	$\Delta R_1+\Delta R_3=\Delta R_2+\Delta R_4$	1''f	$m=n=1$	$\Delta R_1+\Delta R_2=\Delta R_3+\Delta R_4$	1'''f	$m=n=1$	$\Delta R_1+\Delta R_2=\Delta R_3+\Delta R_4$
Ogólny warunek liniowości 2		**2'**	$\varepsilon_{14}=\varepsilon_{23}$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2=n(\varepsilon_3-\varepsilon_4)$ lub $\Delta R_1+\Delta R_4=\frac{\Delta R_2+\Delta R_3}{m}$	**2''**	$\varepsilon_1-\varepsilon_3=n(\varepsilon_2-\varepsilon_4)$ lub $\Delta R_1+\Delta R_4=\frac{n}{m}(\Delta R_1+\Delta R_3)$		**2'''**	$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\frac{n}{m}(\varepsilon_4-\varepsilon_3)$ lub $\Delta R_1+\Delta R_3=\frac{\Delta R_2+\Delta R_4}{m}$	
Napięcie wyjściowe			$U'_{DC}=JR_{10}\frac{m}{1+m}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$			$U''_{DC}=JR_{10}\frac{m}{n+m}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$			$U_{AB}=JR_{10}\frac{m}{1+m}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$	
Rodzaje przyrostów sprzężenia			+ +	- -		+ +	- -		+ +	- -
	Dwie pary	2'a	$\varepsilon_1=n\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=n\varepsilon_4$	2''a	$\varepsilon_1=n\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=n\,\varepsilon_4$	2'''a	$\varepsilon_1=\frac{n}{m}\varepsilon_4$	$\varepsilon_2=\frac{n}{m}\varepsilon_3$
			+ +			+ +			+ +	
	Jedna para	2'b	$\varepsilon_1=n\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=\varepsilon_4=0$	2''b	$\varepsilon_1=n\,\varepsilon_2$	$\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$	2'''b	$\varepsilon_1=\frac{n}{m}\varepsilon_4$	$\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$
			+ -	- +		+ -	- +		+ -	- +
	Dwie pary	2'c	$\varepsilon_1=-n\varepsilon_4$	$\varepsilon_2=-n\varepsilon_3$	2''c	$\varepsilon_1=-n\varepsilon_4$	$\varepsilon_3=-n\varepsilon_2$	2'''c	$\varepsilon_1=-\frac{n}{m}\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=-\frac{n}{m}\varepsilon_4$
			+ -			+ -			+ -	
	Jedna para	2'd	$\varepsilon_1=-n\varepsilon_4$	$\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$	2''d	$\varepsilon_1=-n\varepsilon_4$	$\varepsilon_3=\varepsilon_2=0$	2'''d	$\varepsilon_1=-\frac{n}{m}\varepsilon_3$	$\varepsilon_2=\varepsilon_4=0$
	Mostek uproszczony	2'e	$n=1$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\varepsilon_3-$ lub $\Delta R_1+\Delta R_4=\frac{\Delta R_2+\Delta R_3}{m}$	2''e	$n=1$	$\varepsilon_1-\varepsilon_3=\varepsilon_2-\varepsilon_4$ lub $\Delta R_1+\Delta R_4=\frac{\Delta R_2+\Delta R_3}{m}$	2'''e	$m=n$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2=(\varepsilon_4-\varepsilon$ lub $\Delta R_1+\Delta R_4=\frac{1}{m}(\Delta R_2+\Delta R_3)$

oraz

$$U_{AB}\acute{s}r = \frac{J_1 + J_3}{2}\,\frac{R_1R_4 - R_3R_2}{\sum R_i} \tag{3.35b}$$

Warunki równowagi mostka dwuprądowego są więc wtedy takie, jak przy jednakowych źródłach $J_1 = J_3 = J$. Średnie napięcie wyjściowe też zmienia się według takich samych wzorów jak dla jednakowych źródeł. Czułości początkowe, a więc i oba sygnały wyjściowe są proporcjonalne do wartości średniej z prądów obu źródeł. Natomiast różnica napięć z powyższych dwu pomiarów stanowi podwojoną wartość drugiego dodatkowego składnika w każdym ze wzorów (3.10) i (3.11). Może ona służyć do sprawdzania i adiustacji układu, np. jako sygnał do regulacji wydajności jednego ze źródeł prądowych.

Przełączanie zasilających źródeł prądowych jest łatwiejsze w realizacji niż bezzakłóceniowe przełączanie małych napięć wyjściowych mostka. Przełączanie prądu zasilającego DC stosuje się już w układach kondycjonowania małych sygnałów z czujników tensometrycznych w celu eliminacji wpływu napięć termoelektrycznych [21]. Wpływ niestabilności źródeł prądowych można wyznaczyć ze wzorów (3.10) i (3.11).

Dzięki przełączaniu źródeł prądowych, wpływy ich niestabilności na sygnały wyjściowe niezrównoważonego mostka dwuprądowego są jednakowe, uśredniają się i mogą być mniejsze niż sygnał wyjściowy mostka jednoprądowego, zaś iloraz tych sygnałów nie zależy od wartości obu prądów.

W krańcowym wypadku można przełączać nawet tylko jedno źródło prądowe J. Wówczas otrzymuje się:

$$U''_{DC}\acute{s}r = \frac{J}{2}\,\frac{R_1R_2 - R_3R_4}{\sum R_i} \tag{3.36a}$$

$$U_{AB}\acute{s}r = \frac{J}{2}\,\frac{R_1R_4 - R_3R_2}{\sum R_i} \tag{3.36b}$$

Każde z tych napięć jako średnia z dwu pomiarów jest proporcjonalne do $J/2$, a suma tych pomiarów - do prądu J. Układ, przy jednakowych czasach każdego z dołączeń źródła do układu będzie pobierał o połowę mniejszą moc. Przy pomiarach przebiegów wolnozmiennych można znacznie ograniczyć moc średnią w każdym cyklu.

W mostku dwuprądowym z przełączanym pojedynczym źródłem, wskutek jego niestabilność wpływa tak samo na oba sygnały wyjściowe, jak w niezrównoważonym mostku jednoprądowym.

Szczegółowa analiza dokładności pomiarów dwuprądowym mostkiem przekracza ramy tego rozdziału. Ze względu na podobieństwo formy wzorów dla obu wyjść tego mostka przy równych prądach źródłowych $J_1 = J_3$ lub przy ich przełączaniu i dla mostka klasycznego jednoprądowego zależności dla błędów i niepewności pomiarowych będą podobne, lecz dotyczące innych rezystancji. Będą one łącznie rozpatrzone w rozdziale 8.

3.8. Podstawowe wzory mostków jedno- i dwuprądowego w wartościach względnych

W kolumnach a, b, c tabel 3.3 – 3.4 zestawiono podstawowe wzory dla parametrów na zaciskach rezystancyjnych mostków prądowych. Obejmują one kolejno: mostek jednoprądowy - układ a) jako odniesienie, oraz układy b) i c) mostka dwuprądowego. Aby można było bezpośrednio porównywać wzory w kolejnych wierszach tych tabel, dla obu wyjść mostka dwuprądowego wyznaczono tu te same parametry na zaciskach, które analizowano w rozdziale 2 dla mostka klasycznego jako czwórnika. Podane w tabeli prądy zwarcia każdego z wyjść tych określono przy drugim z nich rozwartym. Jak już wspomniano, rezystancja obciążenia danego wyjścia w mostku dwuprądowym wpływa na stan równowagi i funkcję opisującą sygnał drugiego wyjścia, a wzory są dość rozbudowane. Upraszczają się one nie tylko przy rozwarciu, ale też przy zwarciu każdego wyjścia.

Przy zwartym wyjściu AB i jednakowych prądach źródeł $J_1 = J_2$, na wyjściu DC otrzymuje się:

$$U''^{0}_{DC} = J\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = J\frac{G_1G_4 - G_2G_3}{(G_1+G_2)(G_3+G_4)} \qquad (3.37a,b)$$

$$R^{0}_{DC} = \frac{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = \frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{(G_1+G_2)(G_3+G_4)} \qquad (3.38a,b)$$

$$I''^{0}_{DC} = J\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = J\frac{G_1G_4 - G_2G_3}{G_1+G_2+G_3+G_4} \qquad (3.39a,b)$$

Natomiast dla wyjścia AB, przy zwartym wyjściu DC zachodzi

$$U''^{0}_{DC} = J\frac{R_3R_4 - R_1R_2}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = J\frac{G_1G_2 - G_3G_4}{(G_1+G_2)(G_3+G_4)} \qquad (3.40a,b)$$

$$R^{0}_{AB} = \frac{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)} = \frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{(G_1+G_4)(G_2+G_3)} \qquad (3.41a,b)$$

Tabela 3.3. Porównanie zależności niezrównoważonych mostków prądowych z rys 3.2 a, b, c, przy opisie rezystancyjnym ich gałęzi
Table 3.3. Comparison of equations of unbalanced current bridges a, b, c of Fig 3.2 of their arms described by resistances

Parametr wyjściowy		Mostek jednoprądowy Układ „a" dla $R_{30}=R_{10}mn$	Mostek dwuprądowy o wyjściu DC Układ „b" dla $R_{30}=R_{10}m/n$	Mostek dwuprądowy o wyjściu AB Układ „c" dla $R_{30}=R_{10}n/m$
Napięcie wyjściowe bez obciążenia		$U'_{DC}=I'_{DC}R'_{CD}$	$U''_{DC}=I''_{DC}R''_{CD}$	$U_{AB}=I_{AB}R_{AB}$
		$U'_{DC}=J\frac{R_1R_3-R_2R_4}{\Sigma R_i}$	$U''_{DC}=J\frac{R_1R_2-R_3R_4}{\Sigma R_i}$	$U_{AB}=J\frac{R_1R_4-R_2R_3}{\Sigma R_i}$
		$U'_{DC}=JR_{10}\frac{mn}{(1+m)(1+n)}f'(\varepsilon_i)$ gdzie: $f'(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i R_{io}}{\Sigma R_{io}}}$	$U''_{DC}=JR_{10}\frac{mn}{(m+n)(1+n)}f''(\varepsilon_i)$ gdzie: $f''(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i R_{io}}{\Sigma R_{io}}}$	$U_{AB}=JR_{10}\frac{mn}{(1+m)(m+n)}f'''(\varepsilon_i)$ gdzie: $f'''(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_3}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i R_{io}}{\Sigma R_{io}}}$
	$\lvert\varepsilon_i\rvert<<1$	$f'(\varepsilon_i)=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$	$f''(\varepsilon_i)=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4$	$f'''(\varepsilon_i)=\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4$
	n=1 m=1	$U'_{DC}=\frac{JR_{10}}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i}{4}}$	$U''_{DC}=\frac{JR_{10}}{4}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i}{4}}$	$U_{AB}=\frac{JR_{10}}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_3}{1+\frac{\Sigma\varepsilon_i}{4}}$
	$\lvert\varepsilon_i\rvert=\varepsilon$	$\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon,\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_4=-\varepsilon$ $f'(\varepsilon_i)=\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon\frac{(1-n)(1-m)}{(1+n)(1+m)}}$	$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon,\ \ \varepsilon_3=\varepsilon_4=-\varepsilon$ $f''(\varepsilon_i)=\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon\frac{(1-n)(1-m)}{(1+n)(n+m)}}$	$\varepsilon_1=\varepsilon_4=\varepsilon,\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3=-\varepsilon$ $f'''(\varepsilon_i)=\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon\frac{(1-n)(1-m)}{(1+m)(n+m)}}$
Prąd zwarcia		$I'_{DC}=J\frac{R_1R_3-R_2R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}$	$I''_{DC}=J\frac{R_1R_2-R_3R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}$	$I_{AB}=J\frac{R_1R_4-R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$
		$I'_{DC}=J\frac{n}{(1+n)^2}f'_I(\varepsilon_i)$ gdzie: $f_I'(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_1}{1+n}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{1+n}\right)}$	$I''_{DC}=J\frac{n}{(1+n)^2}f''_I(\varepsilon_i)$ gdzie: $f_I''(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_1}{1+n}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+n\varepsilon_2}{1+n}\right)}$	$I_{AB}=J\frac{m}{(1+m)^2}f'''_I(\varepsilon_i)$ gdzie: $f_I'''(\varepsilon_i)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_3}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+m\varepsilon_4}{1+m}\right)}$
	$\lvert\varepsilon_i\rvert<<1$	$f_I'(\varepsilon_I)\approx\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$	$f_I''(\varepsilon_I)\approx\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4$	$f_I'''(\varepsilon_I)\approx\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4$
	n=1 m=1	$I'_{DC}=\frac{J}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_4}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2}\right)}$	$I''_{DC}=\frac{J}{4}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_4}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2}\right)}$	$I_{AB}=\frac{J}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_3}{\left(1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}\right)}$
	$\lvert\varepsilon_i\rvert=\varepsilon$	$\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon,\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_4=-\varepsilon$ $f_I'(\varepsilon_i)=\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon^2\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2}$	$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon,\ \ \varepsilon_3=\varepsilon_4=-\varepsilon$	$\varepsilon_1=\varepsilon_4=\varepsilon,\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3=-\varepsilon$ $f_I'(\varepsilon_i)=\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon^2\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2}$
n=m=1 $\lvert\varepsilon_i\rvert=\varepsilon$ $\varepsilon<<1$		$\varepsilon_1=\varepsilon_3=-\varepsilon_2=-\varepsilon_4=\varepsilon$	$\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\varepsilon_3=-\varepsilon_4=\varepsilon$	$\varepsilon_1=\varepsilon_4=-\varepsilon_2=-\varepsilon_3=\varepsilon$
		$U'_{DC}=U''_{DC}=U_{AB}=IR_{10}\varepsilon;\quad I'_{DC}=I''_{DC}=I_{AB}=I\varepsilon;\quad R'_{CD}=R''_{CD}=R_{AB}=R_{10}$		

Tabela 3 cd.

Parametr wyjściowy		Mostek jednoprądowy Układ „a" dla $R_{30}=R_{10}mn$	Mostek dwuprądowy o wyjściu DC Układ „b" dla $R_{30}=R_{10}m/n$	Mostek dwuprądowy o wyjściu AB Układ „c" dla $R_{30}=R_{10}$[illegible]
Rezystancja wyjściowa		$R'_{CD}=\frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{\sum R_i}$	$R''_{CD}=\frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{\sum R_i}$	$R'''_{AB}=\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{\sum R_i}$
		$R'_{CD}=R_{10}m\frac{1+n}{1+m}r'(\varepsilon_i)$ gdzie: $r'(\varepsilon_i)=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2+n\varepsilon_3}{1+n}\right)}{1+\frac{\sum\varepsilon_i R_{io}}{\sum R_{io}}}$	$R''_{CD}=R_{10}\,m\frac{1+n}{m+n}r''(\varepsilon_i)$ gdzie: $r''(\varepsilon_i)=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+n\varepsilon_2}{1+n}\right)}{1+\frac{\sum\varepsilon_i R_{io}}{\sum R_{io}}}$	$R'''_{AB}=R_{10}\,n\frac{1+m}{\cdot m+n}r'''(\varepsilon_i)$ gdzie: $r'''(\varepsilon_i)=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+m\varepsilon_4}{1+m}\right)}{1+\frac{\sum\varepsilon_i R_{io}}{\sum R_{io}}}$
	n=1 m=1	$R'_{CD}=R''_{CD}=R_{10}\frac{1+\frac{1}{2}\sum\varepsilon_i+\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_4)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{4}}{1+\frac{1}{4}\sum\varepsilon_i}$		$R'''_{AB}=R_{10}\frac{1+\frac{1}{2}\sum\varepsilon_i+\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{4}}{1+\frac{1}{4}\sum\varepsilon_i}$

Tabela 3.4. Podstawowe wzory mostków prądowych przy opisie konduktancyjnym ich gałęzi
Table 3.4. Basic relations of four arm bridges of their arms described by conductaces

Parametr wyjściowy		Układ „a" Mostek prądowy	Układ „b" Mostek dwuprądowy o wyjściu CD	Układ „c" Mostek dwuprądowy o wyjściu AB
Napięcie wyjściowe bez obciążenia		$I'_{CD}=U'_{CD}\,G'_{CD};\quad U'_{CD}=-U'_{DC}$	$I''_{CD}=U''_{CD}\,G''_{CD};\quad U''_{CD}=-U''_{DC}$	$I_{BA}=U'''_{BA}\,G'''_{AB};\quad U_{BA}=-U_{AB}$
		$U'_{CD}=J\frac{G_1G_3-G_2G_4}{M_a}$	$U''_{CD}=J\frac{G_1G_2-G_3G_4}{M_b}$	$U_{BA}=J\frac{G_1G_4-G_2G_3}{M_c}$
		gdzie: $M_a=M_b=M_c\cong M=G_1G_2G_3+G_1G_3G_4+G_1G_4G_2+G_2G_3G_4=G_1G_3(G_2+G_4)+G_2G_4(G_2+G_3)=$ $=G_2G_3(G_1+G_4)+G_1G_4(G_2+G_3)=G_1G_2(G_3+G_4)+G_3G_4(G_1+G_2)$		
		$U'_{CD}\cong T'_0 g'(\gamma_i)$ gdzie: $T_o'=\frac{J}{G_{10}}\frac{mn}{(1+m)(1+n)}$	$U'_{CD}\cong T''_0 g''(\gamma_i)$ gdzie: $T_o''=\frac{J}{G_{10}}\frac{mn}{(m+n)(1+n)}$	$U_{BA}\cong T'''_0 g'''(\gamma_i)$ gdzie: $T_o'''=\frac{J}{G_{10}}\frac{mn}{(1+m)(m+n)}$
	$\lvert\gamma_i\rvert<<1$	$g'\approx\gamma_1+\gamma_3-\gamma_2-\gamma_4$	$g''\approx\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$	$g'''\approx\gamma_1+\gamma_4-\gamma_2-\gamma_3$
Prąd zwarcia		$I''_{CD}=J\frac{G_1G_3-G_2G_4}{(G_1+G_4)(G_2+G_3)}$	$I''_{CD}=J\frac{G_1G_2-G_3G_4}{(G_1+G_4)(G_2+G_3)}$	$I_{BA}=J\frac{G_1G_4-G_2G_3}{(G_1+G_2)(G_3+G_4)}$
		$I_{CD}=T'_{I0}\,g_I'(\gamma_i)$ gdzie: $T'_{I0}=J\frac{n}{(n+1)^2}$ $g_I'(\gamma_i)=\frac{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4+\gamma_1\gamma_3-\gamma_2\gamma_4}{\left(1+\frac{\gamma_1+n\gamma_4}{1+n}\right)\left(1+\frac{\gamma_2+n\gamma_3}{1+n}\right)}$	$I_{CD}\equiv T''_{I0}\,g''(\gamma_i)$ gdzie: $T''_{I0}=J\frac{n}{(n+1)^2}$ $g_I''(\gamma_i)=\frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4+\gamma_1\gamma_2-\gamma_3\gamma_4}{\left(1+\frac{\gamma_1+n\gamma_4}{1+n}\right)\left(1+\frac{\gamma_3+n\gamma_2}{1+n}\right)}$	$I_{BA}=T'''_{I0}\,g_I'''(\gamma_i)$ gdzie: $T'''_{I0}=J\frac{m}{(m+1)^2}$ $g_I'''(\gamma_i)=\frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4+\gamma_1\gamma_4-\gamma_2\gamma_3}{\left(1+\frac{\gamma_1+m\gamma_2}{1+m}\right)\left(1+\frac{\gamma_3+m\gamma_4}{1+m}\right)}$
	$\lvert\gamma_i\rvert<<1$	$g_I'=\gamma_1+\gamma_3-\gamma_2-\gamma_4$	$g_I''\approx\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$	$g_I'''\approx\gamma_1+\gamma_4-\gamma_2-\gamma_3$
Konduktancja wyjściowa		$G_{CD}=\frac{M}{(G_1+G_4)(G_2+G_3)}$		$G_{AB}=\frac{M}{(G_1+G_2)(G_3+G_4)}$

$$I''^{0}_{DC} = J\frac{R_3R_4 - R_1R_2}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = J\frac{G_1G_2-G_3G_4}{G_1+G_2+G_3+G_4} \qquad (3.42a,b)$$

Zakładane w powyższych rozważaniach idealnie prądowe lub napięciowe warunki na wejściach i wyjściach mostków, łatwo uzyskuje się, stosując układy ze wzmacniaczami operacyjnymi i o odpowiednim sprzężeniu zwrotnym.

3.9. Rezystancje wejściowe dwuprądowego antysymetrycznego mostka 4R

Do pomiarów wieloparametrowych w mostkach dwuprądowych można też wykorzystywać zmiany ich rezystancji wyjściowych R_{AB}., R_{CD} oraz ponadto rezystancji wejściowych od strony ramion mostka R_{AC}, $R_{BD,}$ lub R_{AD}, R_{CB}.

Przy jednakowych źródłach zasilających $J_1 = J_3$ mostek dwuprądowy osiąga równocześnie równowagę w obu przekątnych gdy rezystancje początkowe są niesymetryczne, czyli $R_{20} = R_{40}$ i $R_{20} = R_{40}$, (tj. dla m = n). Wówczas zachodzą w nim następujące zależności: $R''_{CD0} = R''_{AB0} = 0{,}5(1+m)$, $R''_{AC0} = R''_{DB0} = (2m+1)/\,2(m+1)$ i $R''_{AD0} = R''_{CB0} = m\,(2+m)/2(1+m)$. Rezystancje zewnętrzne widziane z każdej pary zacisków takiego mostka poza równowagą podano poniżej w tabeli 3.5:

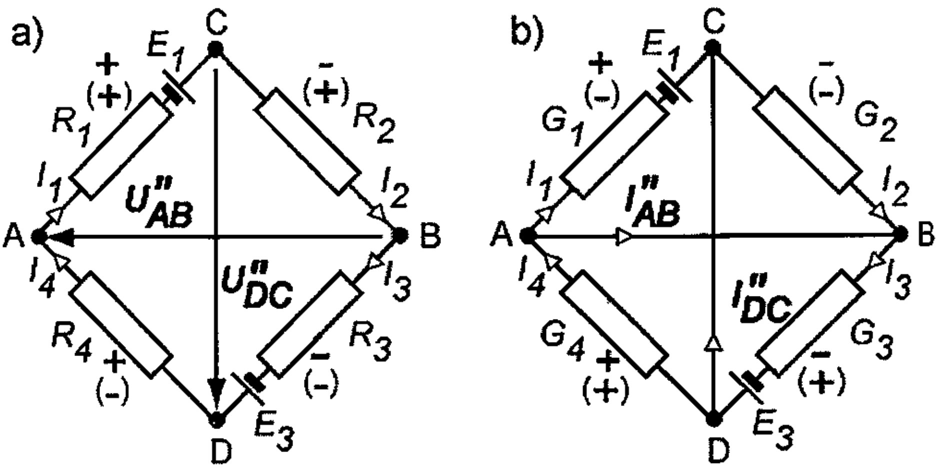
Tabela 3.5. Rezystancje wejściowe antysymetrycznego dwuprądowego mostka 4R ($m = n$)
Table 3.5. Terminal resistances of double current supplied antisymmetric 4R bridge ($m = n$)

$R''_{CD} = \frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{\sum R_i} = \frac{1+m}{2} R_{10}\, r''_{CD}(\varepsilon_i)$ (3.43)	$R''_{AB} = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{\sum R_i} = R_{10}\frac{1+m}{2} r''_{AB}(\varepsilon_i)$ (3.44)
gdzie: $r''_{CD}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_4}{1+m}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+m\varepsilon_2}{1+m}\right)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.43a)	gdzie: $r''_{AB}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3+m\varepsilon_4}{1+m}\right)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.44a)
$R''_{CB} = \frac{R_2(R_1+R_3+R_4)}{\sum R_i} = m\frac{2+m}{2(1+m)} R_{10}\, r''_{CB}(\varepsilon_i)$ (3.45)	$R''_{AD} = \frac{R_4(R_1+R_2+R_3)}{\sum R_i} = m\frac{2+m}{2(1+m)} R_{10}\, r''_{AD}(\varepsilon_i)$ (3.46)
$r''_{CB}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_4+\varepsilon_3}{2+m}\right)(1+\varepsilon_2)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.45a)	$r''_{AD}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2+m}\right)(1+\varepsilon_4)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.46a)
$R''_{DB} = \frac{R_3(R_1+R_2+R_4)}{\sum R_i} = m\frac{2m+1}{2(1+m)} R_{10}\, r''_{DB}(\varepsilon_i)$ (3.47)	$R''_{AC} = \frac{R_1(R_2+R_3+R_4)}{\sum R_i} = m\frac{2m+1}{2(1+m)} R_{10}\, r''_{AC}(\varepsilon_i)$ (3.48)
$r''_{DB}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2+m\varepsilon_4}{2m+1}\right)(1+\varepsilon_3)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.47a)	$r''_{AC}(\varepsilon_i) = \frac{\left(1+\frac{m\varepsilon_2+\varepsilon_3+m\varepsilon_4}{2m+1}\right)(1+\varepsilon_1)}{1+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+m(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2\,(1+m)}}$ (3.48a)

Wzory te upraszczają się dla $m = 1$. Przy małych przyrostach $\varepsilon_i \ll 1$ iloczyny $\varepsilon_i \varepsilon_j$ stają się pomijalne i liczniki zależności (3.43) – (3.48) linearyzują się. Mianownik wszystkich zależności jest taki sam i staje się równy 1, gdy drugi składnik stanowiący przyrost $\varepsilon_{\Sigma R}$ sumy rezystancji ramion mostka, jest równy 0 lub pomijalny. Przy dużych przyrostach niektóre z rezystancji wejściowych też mogą linearyzować się, gdy przyrosty rezystancji ramion będą powiązane zależnościami podanymi w tabeli 3.2.

3.10. Układy dwunapięciowe dualne do mostków dwuprądowych 4R

Z ogólnych właściwości układów elektrycznych wynika, że dla każdego układu pasywnego istnieje jego układ dualny. Mostkowi dwuprądowemu z rys. 3.2b(c) odpowiada prosty układ podany na rys. 3.6. Jest to rozbudowany o dwa rezystory układ stosowany do porównywania źródeł napięcia.



Rys. 3.6. Mostki zasilane dwoma źródłami -napięcia

a) z wyjściami napięciowymi o innych zależnościach niż w mostku 2J

b) z wyjściami w postaci prądów zwarcia, dualny przy zmianach przewodności do dwuprądowego mostka rezystancyjnego z rys. 3.2b. Podane znaki przyrostów rezystancji dla układu **a.** i konduktancji dla układu **b.** rozrównoważają oba wyjścia (dla AB znaki w nawiasach) w dodatnim kierunku

Fig. 3.6. Bridge circuits supplied by two voltage sources

a) of two voltage outputs and different balance equations then of 2J bridge

b) of two short currents outputs dual to 2J resistance bridge of Fig 3.2b(c) Signs of resistance increments given on Fig a and of conductance ones shown on Fig b (for AB in brackets) unbalance outputs of both bridges in positive direction.

Wzory dla napięć wyjściowych tego układu są następujące:

$$U''^{\infty}_{DC} = \frac{E_3(R_1 + R_4) - E_1(R_2 + R_3)}{\sum R_i} \tag{3.49a}$$

oraz

$$U''^{\infty}_{AB} = \frac{E_3(R_1 + R_2) - E_1(R_3 + R_4)}{\sum R_i} \tag{3.49b}$$

Stąd, dla $U''_{DC} = 0$ lub $U_{AB} = 0$ wynikają dwa warunki równowagi:

$$E_1(R_2 + R_3) = E_3(R_1 + R_4) \tag{3.50a}$$

oraz

$$E_1(R_3 + R_4) = E_3(R_1 + R_2) \tag{3.50b}$$

Jeśli ponadto, podobnie jak poprzednio, założy się, że źródła napięciowe w gałęziach przeciwległych tego układu są sobie równe, tj. $E_1 = E_3 \equiv E$ (bądź wyznacza się średni wynik z dwu pomiarów przy zamianie tych źródeł miejscami), to otrzyma się jeszcze prostsze zależności:

$$U''^{\infty}_{DC} = E\frac{R_1 - R_2 - R_3 + R_4}{\sum R_i} \tag{3. 51a}$$

oraz

$$U''^{\infty}_{AB} = E\frac{R_1 + R_2 - R_3 - R_4}{\sum R_i} \tag{3. 51b}$$

Wzory te mają inną postać niż poprzednie dla napięć mostków dwuprądowych, ale mostki z rys. 3,6a przy stałych napięciach źródłowych również można stosować do dwuparametrowych pomiarów przyrostów rezystancji. Jednakże mają one dodatkowe ograniczenia, podane nieco dalej.

Natomiast przy $E_1 = E_3$, gdy równocześnie obie rezystancje obciążenia $R_{L\,CD} = 0$, $R_{L\,AB} = 0$, to prądy zwarcia obu wyjść są następujące:

$$I''^{0}_{DC} = E\frac{G_1G_4 - G_2G_3}{\sum G_i} \tag{3.52a}$$

lub

$$I''^{0}_{DC} = E\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)} \tag{3.52b}$$

oraz dla wyjścia AB:

$$I^{0}_{AB} = E\frac{G_3G_4 - G_1G_2}{\sum G_i} \tag{3. 53a}$$

lub

$$I^{0}_{AB} = E\frac{R_1R_2 - R_3R_4}{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)} \tag{3. 53b}$$

Dla prądów zwarcia na wyjściach AB i DC tego układu otrzymuje się więc w funkcji przewodności wzory podobne w formie do poprzednich dla mostka dwuprądowego przy zmiennych rezystancjach. Układ z rysunku 3.6a jest natomiast dualny do mostka dwuprądowego o równoczesnych dwu wyjściach w postaci prądów zwarcia. Należy też zwrócić uwagę na to, że iloczyny w licznikach ostatnich czterech zależności mostka dwunapięciowego dotyczą też par sąsiednich ramion, ale w przeciwnych osiach niż dla wyjść mostka dwuprądowego.

Układ z rys. 3.6b nadaje się też do wykorzystania w pomiarach dwu wielkości, w tym opartych na przyrostach konduktancji. Na jego wyjściach trzeba wówczas stosować przetworniki prądu o sprzężeniu zwrotnym zapewniającym pomijalnie małe rezystancje wejściowe. Oba układy z rys. 3.6 nie są natomiast przydatne do badania schematów zastępczych obiektów o nierozłączalnej strukturze, gdyż wymagają włączania źródeł napięciowych szeregowo z dwoma konduktancjami gałęzi. Ponadto, przy zasilaniu napięciowym, jak i przy wyjściu z mostka w postaci prądu zwarcia, na sygnał wyjściowy wpływają rezystancje doprowadzeń.

Można też podać układy mostkowe dwuźródłowe ze źródłami niejednorodnymi, tj. jednym prądowym, a drugim napięciowym. Wzory ich sygnałów wyjściowych są też dość proste, ale autor nie dotarł jeszcze do sensownego praktycznie potencjalnego obszaru ich zastosowań w pomiarach dwu- i wieloparametrowych i dlatego ich tu nie omawia.

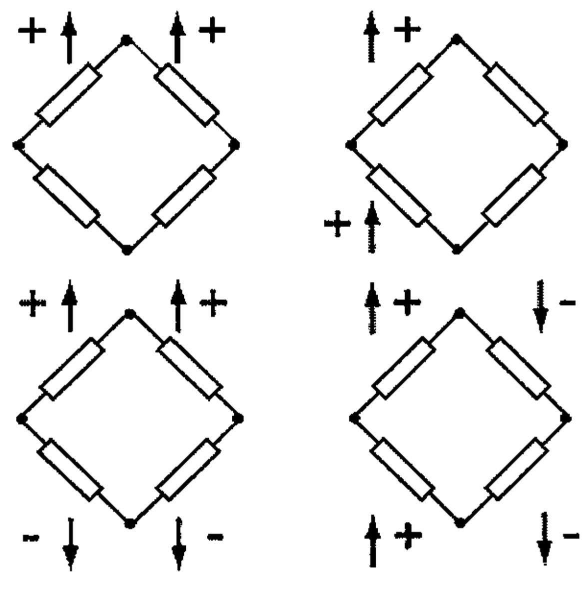
3.11. Niektóre wnioski o mostkach dwuprądowych

Z przedstawionych tu opisów działania i właściwości mostków dwuprądowych wynika szereg następujących wniosków ogólnych i szczegółowych:

- Pomiarowe układy immitancyjne o strukturze mostkowej, zasilane obocznie z dwu źródeł prądowych i nazywane przez autora mostkami dwuprądowymi (lub we wcześniejszych publikacjach – antymostkami), stanowią nowy, dotychczas niestosowany rodzaj układów pomiarowych.
- Układy te mają szereg oryginalnych właściwości metrologicznych.
- Łączą one w sobie właściwości układów mostkowych i układów kompensacji prądów, gdyż można je zrównoważyć zmianą składowych zarówno impedancji, jak i któregoś z prądów zasilających.
- Przy jednakowych wydajnościach źródeł prądowych dwa różne warunki równowagi upraszają się do równości iloczynów immitancji w ramionach przyległych do każdej z przekątnych wyjściowych tego mostka.
- Mostek dwuprądowy może pracować jako zrównoważony, niezrównoważony (odchyłowy) i o sprzężeniu zwrotnym.
- Dwuprądowy mostek niezrównoważony ma dwa sygnały wyjściowe w różny sposób zależne od iloczynów impedancji gałęzi przyległych mostka. Umożliwia to ich zastosowanie do pomiarów dwuparametrowych przy prądzie stałym, a przy prądzie zmiennym - nawet czteroparametrowych.
- W rozdziale 5 autor przedstawia też możliwość zastosowania mostka przy obu rodzajach zasilania prądu stałego, dwuprądowym i klasycznym, do pomiarów kilkuparametrowych.
- Obiecujące wydaje się zastosowanie mostków dwuprądowych przy prądzie zmiennym w pomiarach zarówno składowych impedancji, jak i ich przyrostów oraz do kondycjonowania sygnałów z czujników immitancyjnych.
- Realizacja sprzętowa mostków dwuprądowych nie jest obecnie zbyt trudna, pomimo iż wymagają one bądź dwu jednakowych źródeł prądowych, współbieżnych dla układów zrównoważonych lub stabilizowanych – dla niezrównoważonych, bądź też szybkiego przełączania dwu różnych lub nawet jednego takiego źródła oraz zapamiętywania i przetwarzania otrzymywanych kolejno próbek napięcia wyjściowego. Takie źródła są już produkowane jako analogowe układy scalone [22], zaś w układach kondycjonowania sygnałów jest też już stosowane szybkie przełączanie źródeł prądowych oraz zapamiętywanie i sumowanie otrzymywanych kolejno napięć wyjściowych przed dalszym ich przetwarzaniem [21, 23, 24].
- Mostki dwuprądowe można stosować zarówno przy wyjściu napięciowym, jak i prądowym

• Układy mostków dwuprądowych można będzie częściowo realizować wirtualnie, co stwarza zupełnie nowe, niepoznane dotąd możliwości budowy nie tylko wystarczająco dokładnych, ale i szybkich układów pomiarowych zarówno prądu stałego, jak i zmiennego.

• Warunki uzyskania maksymalnej czułości początkowej mostków dwuprądowych są inne niż dla prądowo zasilanego mostka Wheatstone'a. Początkowa czułość napięciowa T_0' mostka jednoprądowego przy wymuszonym prądzie zasilającym J = const. rośnie według funkcji homograficznej (gałęzi przesuniętej hiperboli równoosiowej) wraz z obu stosunkami m, jak i n rezystancji początkowych ramion przyległych. Natomiast czułości T_0'', T_0'' obu wyjść mostka dwuprądowego rosną podobnie tylko wraz z jednym z tych stosunków (dla ramion przyległych do wyjścia), a ich przebiegi względem drugiego z nich mają łagodne maksimum (np. dla wyjścia DC, gdy m= const. to $n_e = \sqrt{m}$).



Rys.3.7. Przyrosty rezystancji ramion mostka mierzalne dzięki zastosowaniu obocznego dwuprądowego zasilania

• W mostkach dwuprądowych można stosować czujniki pojedyncze oraz wielokrotne, np. podwójne, zarówno o przyrostach jednakowego znaku, jak i różnicowe, przy których uzyskuje się, podobnie jak dla mostków klasycznych, nie tylko 2-krotny (lub 4-krotny – dla dwu par czujników) sygnał wyjściowy, ale i znacznie lepszą liniowość przebiegu napięcia wyjściowego.

- Przy bardzo małych przyrostach względnych rezystancji ramion struktury mostkowej oraz przy przyrostach dużych, gdy dwie rezystancje ramion są stałe lub gdy ich przyrosty bezwzględne mają parami przeciwne znaki, uzyskuje się liniowy przebieg napięcia wyjściowego.

- Dwa czujniki w ramionach przeciwległych można dołączać za pomocą 4 zacisków przewodami o różniących się rezystancjach oraz mierzyć za pomocą pary czujników o takim samym znaku przyrostów rezystancji połączonych ze sobą, np. o uziemionym wspólnym zacisku. Tego nie zapewniają klasyczne mostki czteroramienne.

- W stanie równowagi mostka dwuprądowego o wyjściu napięciowym oraz przy dowolnym niezrównoważeniu dla wyjścia prądowego potencjały wyjścia i jednego zacisku każdego z zasilających źródeł prądowych są jednakowe. Zmniejsza to znacznie wpływ zakłóceń.

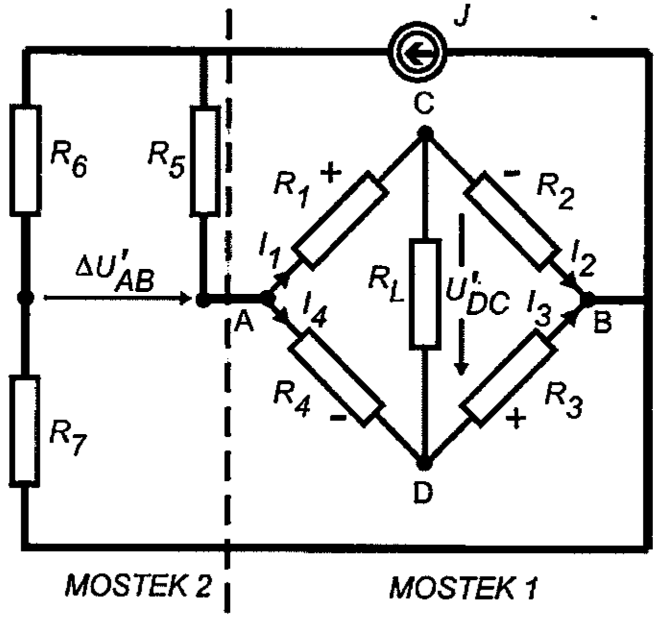
- mostek dwuprądowy niesymetryczny o jednakowych naprzeciwległych rezystancjach ($m=n$) jest zrównoważony równocześnie w obu przekątnych, a przy niezrównoważeniu ma dwa sygnały wyjściowe w różny sposób zależne od znaków przyrostów rezystancji gałęzi przyległych mostka – patrz rys. 3.7. Dzięki temu możliwe są pomiary dwuparametrowe.

- Za pomocą nieruchomej pary lub dwu par czujników, w układzie mostka dwuprądowego można zmierzyć składowe kierunkowe gradientu pola oddziałującego na te czujniki, zaś przy użyciu 4 elektrod ustawionych w wierzchołkach rombu – składowe kierunkowe rezystancji (lub konduktancji) właściwej materiału w obszarze między elektrodami oraz wpływ pola zewnętrznego np. magnetycznego lub temperatury na te składowe.

-.-

4. POMIARY PARAMETRÓW SPRZĘŻONYCH W MOSTKU JEDNOPRĄDOWYM 4R

4.1. Układ kaskadowy do pomiarów dwuparametrowych (2D) w jednoprądowym mostku 4R



Rys. 4.1. Układ dwu sprzężonych kaskadowo mostków klasycznych do pomiarów dwuparametrowych (mostek w mostku).

Fig. 4.1: Two coupled in cascade conventional bridges for use in two variable measurements (bridge in bridge). Basic relations: $R_5 >> R_{AB}$, $R_L >> R_{CD}$, balance conditions: bridge no 1 $R_{10}R_{30} = R_{20}R_{40}$, bridge no 2 $R_5R_7 = R_6R_{AB0}$.

Określimy teraz, które z pomiarów dwuparametrowych można dokonywać przy użyciu niezrównoważonych mostków klasycznych. W tym celu, poza napięciem wyjściowym U_{DC}' – patrz rys. 4.1, można mierzyć zmiany ich rezystancji wejściowej lub wyjściowej, które inaczej niż to napięcie zależą od kombinacji przyrostów rezystancji ramion mostka. Na rys. 4.1 przedstawiono układ, który autor zaproponował do takich pomiarów w publikacjach [38] i [39]. Powinien on spełniać następujące podstawowe zależności dla rezystancji: $R_5 >> R_{AB}$, $R_L >> R_{CD}$. Jego warunki równowagi są następujące:

$$\text{mostek 1 -} \qquad R_{10}R_{30} = R_{20}R_{40}$$

$$\text{mostek 2 -} \qquad R_5R_7 = R_6R_{AB0} \tag{4.1}$$

Podobne rozwiązanie układu wykorzystuje się już w praktyce, ale do innych celów i tylko przy pomiarach jednej wielkości, gdy przy jej zmianach przyrosty rezystancji pary, lub dwu par rezystancji ramion mostka są przeciwnego znaku [4, 9, 10]. Na przykład w przetwornikach zawierających mostki z różnicowymi czujnikami tensometrycznymi naprężeń zmiany rezystancji wejściowej służą do kompensacji lub korekcji temperaturowych zmian czułości. Przy jednakowych co do wartości, a różnych co do znaku, niewielkich, zależnych od naprężenia, przyrostach sąsiednich rezystancji, na przykład R_1, R_2 lub /i R_3, R_4, rezystancja wejściowa R_{AB} mostka 1 będzie zależeć tylko od temperaturowych właściwości tensometrów. Dla małych przyrostów rezystancji ramion dokładność określania temperatury w taki sposób nie jest zbyt duża, ale wystarczająca do celów korekcji jej wpływów. Wytworzenie zależnego od niej, osobnego sygnału wyjściowego wymaga dodatkowej rozbudowy układu pomiarowego. Może to być zrealizowane tak, jak w układzie z rys. 4.1. – mostek 2 poprzedza mostek główny 1, który to równocześnie od strony wejścia stanowi jego jedno ramię bądź jako dodatkowa gałąź z napięciem odniesienia równym napięciu wejściowemu mostka 1 przy jego równowadze w temperaturze początkowej.

Autor nie spotkał w literaturze opisu i wszechstronnej analizy wykorzystania mostka klasycznego w pomiarach dwuparametrowych przy dużych przyrostach rezystancji jego ramion. Tymczasem immitancje wielu rodzajów półprzewodnikowych czujników pomiarowych, takich jak magnetorezystory, piezorezystory i fotorezystory, zmieniają się w szerokim zakresie, zależą od temperatury i zazwyczaj nie są selektywne. Uzasadniło to podjęcie analizy i rozwiązania tego problemu przedstawionego poniżej.

4.2. Pomiary przy dwóch ramionach zmiennych

Założymy, że w mostku 1 z rys. 4.1 zmieniają się tylko dwie sąsiednie rezystancje np. $R_1(x_1, x_2)$, $R_2(x_1, x_2)$. Na podstawie pomiarów U_{DC}' oraz zmian rezystancji wejściowej R_{AB} lub wyjściowej R_{CD}, można znaleźć ich wartości ε_1, ε_2, a z nich, poprzez przekształcenie odwrotne – wielkości x_1, x_2.

Ze wzorów (2.7) i (2.8) z tabeli 2.1' w rozdz. 2, przy założeniu $R_{20} = mR_{10}$, $R_{40} = nR_{10}$, wynika:

$$U'_{DC} = JR_{10} \frac{mn}{(1+m)(1+n)} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}} \tag{4.2}$$

oraz

$$R_{AB} = R_{10} \frac{n(1+m)}{(1+n)} \frac{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{(1+m)}}{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}} \cdot \tag{4.3}$$

Z (4.3) otrzymuje się przyrost względny rezystancji wejściowej mostka:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{n(\varepsilon_1 + m\varepsilon_2)}{(1+n)(1+m) + \varepsilon_1 + m\varepsilon_2} \tag{4.4}$$

gdzie: $\varepsilon_{AB} \equiv \frac{R_{AB} - R_{AB0}}{R_{AB0}}$

Ze wzorów (4.3) i (4.4) wynika:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(1+m)(1+n)}{m(n - \varepsilon_{AB})} \frac{U_{DC}}{JR_{10}} \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 = \frac{(1+m)(1+n)\varepsilon_{AB}}{n - \varepsilon_{AB}} \tag{4.6}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań liniowych otrzymuje się:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+n}{n - \varepsilon_{AB}} \left(\varepsilon_{AB} + \frac{U'_{DC}}{JR_{10}} \right) \tag{4.7a}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+n}{n - \varepsilon_{AB}} \left(\varepsilon_{AB} - \frac{U'_{DC}}{mJR_{10}} \right) \tag{4.7b}$$

Wzory (4.7a), (4.7b) upraszczają się dla małego sumarycznego przyrostu rezystancji dwu zmiennych gałęzi w stosunku do sumy rezystancji mostka, czyli gdy $|\Delta R_1 + \Delta R_2| << \sum R_{i0}$, tj. gdy $|\varepsilon_1 + m\varepsilon_2| << (1+n)(1+m)$; oraz również dla przypadków szczególnych gdy: $m = n$, $m = 1$, lub $n = 1$. Dwa, trzy lub wszystkie z tych warunków mogą zachodzić równocześnie.

Gdy zachodzi tylko $|\Delta R_1 + \Delta R_2| << \sum R_{i0}$, to $\varepsilon_{AB} << n$ i wówczas:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+n}{n}\left(\varepsilon_{AB} + \frac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right) \tag{4.8a}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+n}{n}\left(\varepsilon_{AB} - \frac{U'_{DC}}{m\,JR_{10}}\right) \tag{4.8b}$$

Gdy ponadto $m = n = 1$ otrzymuje się:

$$\varepsilon_1 = 2\left(\varepsilon_{AB} + \frac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right) \tag{4.9a}$$

$$\varepsilon_2 = 2\left(\varepsilon_{AB} - \frac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right) \tag{4.9b}$$

Ze wzorów (4.7) –(4.9) można wyznaczyć wartości przyrostów składowych $\varepsilon'(x_1)$, $\varepsilon''(x_2)$, a z nich za pomocą funkcji odwrotnych, otrzymać już wielkości mierzone x_1, x_2. Na przykład dla przypadku 3° (podanego w punkcie 1.4) jest:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB} + \frac{m-1}{m}\,\frac{U'_{DC}}{2JR_{10}}\right) \tag{4.10a}$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\,\frac{1+m}{m}\,\frac{U'_{DC}}{2JR_{10}} \tag{4.10b}$$

Ze wzorów przybliżonych (4.8a) i (4.8b) otrzymuje się:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{1+n}{n}\left(\varepsilon_{AB} + \frac{m-1}{m}\frac{U'_{DC}}{2JR_{10}}\right) \tag{4.11a}$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{1+n}{n}\frac{1+m}{m}\frac{U'_{DC}}{2JR_{10}} \tag{4.11b}$$

Jeśli rezystancje obu ramion są jednakowe, czyli $m = 1$ (symetria początkowa względem przekątnej CD), to względny przyrost rezystancji wejściowej ε_{AB} jest funkcją tylko wielkości x_1, zaś napięcie wyjściowe U'_{DC} – tylko wielkości x_2.

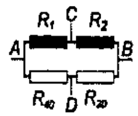
Szereg wzorów dla różnych przypadków mostka jednoprądowego o ramionach R_1, R_2, zmiennych zestawiono w tabeli 4.1. Podobne zależności, jak tu omówione, zachodzą dla przyrostów pary rezystancji R_3, R_4. Wzory dla parametrów zewnętrznych różnych postaci nieobciążonego mostka rezystancyjnego zestawiono w tabelach 2.1' i 2.1", a w tabeli 2.3 – parametry robocze dla dowolnego rodzaju współpracy tego mostka z obwodami zewnętrznymi.

Dla par rezystancji ramion R_1, R_4 lub R_2, R_3 należy mierzyć przyrost ε_{DC} rezystancji wyjściowej R_{DC} mostka, gdyż we wzorach na ε_{AB} występują iloczyny przyrostów $\varepsilon_i\varepsilon_j$ komplikujące istotnie rozwiązanie układu równań. W tym celu na wyjściu mostka trzeba mierzyć zarówno napięcie bez obciążenia, jak i prąd zwarcia lub drugi raz napięcie wyjściowe przy włączeniu określonej rezystancji obciążenia, a następnie z obu tych pomiarów znaleźć mierzone przyrosty. Bardziej wygodnym, alternatywnym rozwiązaniem jest zamiana wejścia z wyjściem, jeśli jest to możliwe, i wykorzystanie układu z rys. 4.1.
Dla par rezystancji naprzeciwległych R_1, R_3 lub R_2, R_4 komplikują się zarówno wzory na ε_{AB}, jak i na ε_{DC}. Przy małych przyrostach ε_i można stosować wówczas wzory przybliżone, zaś przy dużych – rozwiązanie numeryczne układu równań lub mostki o powiązanych parami zmianach rezystancji ramion, co umożliwia linearyzację zależności nawet dwu ich parametrów zewnętrznych. Opisano to w następnym punkcie. Wzory dla różnych stosunków dwu rezystancji ramion mostka i ich przyrostów zestawiono w tabeli 4.1.

4.3. Pomiary przy czterech ramionach zmiennych

Napięcie wyjściowe mostka przy czterech zmieniających się rezystancjach ramion w ogólnym wypadku zależy nieliniowo od wszystkich ich przyrostów ε_i oraz od rezystancji zastępczych obwodów źródła i obciążenia. W

Tabela 4.1: Parametry nieobciążonego mostka jednoprądowego dla zmiennych rezystancji ramion R_1, R_2 - w wartościach względnych
Table 4.1. Unloaded classic resistance bridge parameters as functions of variable two resistances R_1, R_2 given in related values

Nr	Parametr mostka	Symbol	Mostek o dowolnym *m* i *n*		Mostek podwójnie symetryczny: $m=n=1$	
			a) Przyrosty rezystancji: dowolne	Przyrosty rezystancji	Przyrosty rezystancji	
			 $R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2=mR_{10}(1+\varepsilon_2)$ $R_4=nR_{10}$ $R_3=mnR_{10}$, Zasilanie: $I_{AB}=J$	b) bardzo małe 1)	c) dowolne	d) bardzo małe 1)
				1) $\lvert\Delta R_1+\Delta R_2\rvert \ll \sum R_{i0}$ tj. $\lvert\varepsilon_1+m\varepsilon_2\rvert \ll (1+m)(1+n) \rightarrow$		2) $\varepsilon_{AB} \ll n$
1	**Napięcie wyjściowe**	U'_{DC}	$T'_0 \dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}} \equiv T'_0 \dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{M}$	$\approx T'_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$	$T'_0 \dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+0{,}25\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx T'_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$
	czułość początkowa	T'_0	$T'_0 = JR_{10}\dfrac{mn}{(1+m)(1+n)}$		$T'_0 = \dfrac{JR_{10}}{4}$	
2	**Rezystancja wejściowa:**	R_{AB}	$= \dfrac{R_{AB0}}{M}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}\right)$	$\approx R_{AB0}\left[1+n\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}\right]$	$R_{10}\dfrac{1+0{,}5\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+0{,}25\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx R_{10}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$
	w równowadze	R_{AB0}	$R_{AB0} = R_{10}\dfrac{n\,(1+m)}{(1+n)}$		R_{10}	
	jej przyrost względny:	ε_{AB}	$\dfrac{n(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}$	$\approx \dfrac{n(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{(1+n)(1+m)}$	$\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$	$\approx \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}$
3	**Rezystancja wyjściowa**	R_{CD}	$\dfrac{R_{CD0}}{M}(1+\dfrac{\varepsilon_1}{1+n})\,(1+\dfrac{\varepsilon_2}{1+n})$	$\approx R_{CD0}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1+n}\right)$	$R_{10}\dfrac{(1+0{,}5\,\varepsilon_1)(1+0{,}5\,\varepsilon_2)}{1+0{,}25\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx R_{10}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$
	w równowadze	R_{CD0}	$R_{CD0} = R_{10}\dfrac{m\,(1+n)}{1+m}$;		R_{10}	
	jej przyrost względny:	ε_{CD}	$\dfrac{m\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\dfrac{1+m}{1+n}}{(1+n)(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}$	$\approx \dfrac{m\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(1+n)(1+m)}$	$\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2}{4+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$	$\approx \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}$
4	**Względny przyrost rezystancji ramion**	ε_1	$\dfrac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB}+\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$	$\approx \dfrac{1+n}{n}\left(\varepsilon_{AB}+\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$ 2)	$\dfrac{2}{1-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB}+\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$	$\approx 2\left(\varepsilon_{AB}+\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$
5		ε_2	$\dfrac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB}-\dfrac{U'_{DC}}{mJR_{10}}\right)$	$\approx \dfrac{1+n}{n}\left(\varepsilon_{AB}-\dfrac{U'_{DC}}{mJR_{10}}\right)$ 2)	$\dfrac{2}{1-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB}-\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$	$\approx 2\left(\varepsilon_{AB}-\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$
6	$0{,}5\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$	ε'	$\dfrac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}(\varepsilon_{AB}+\dfrac{m-1}{m}\dfrac{U'_{DC}}{2JR_{10}})$	$\approx \dfrac{1+n}{n}(\varepsilon_{AB}+\dfrac{m-1}{m}\dfrac{U'_{DC}}{2JR_{10}})$ 2)	$\dfrac{2\varepsilon_{AB}}{1-\varepsilon_{AB}}$	$\approx 2\varepsilon_{AB}$
7	$0{,}5\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$	ε''	$\dfrac{U_{DC}}{2JR_{10}}\dfrac{(1+m)(1+n)}{m(n-\varepsilon_{AB})}$	$\approx \dfrac{U_{DC}}{2JR_{10}}\dfrac{(1+m)(1+n)}{mn}$ 2)	$2\dfrac{U'_{DC}}{JR_{10}}$	$\approx \dfrac{2\,U'_{DC}}{JR_{10}}$

punkcie 2.2.3 podano, że napięcie wyjściowe nieobciążonego mostka jednoprądowego U'_{CD} – wzór (2.5), staje się funkcją liniową jeśli przyrosty te są powiązane jedną z następujących dwu ogólnych zależności:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_4 = m(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \tag{4.12}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = n(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \tag{4.13}$$

Dla przyrostów bezwzględnych warunki te mają następujące postacie:

$$n(\Delta R_1 + \Delta R_2) = \Delta R_3 + \Delta R_4 \tag{4.12a}$$

$$m(\Delta R_1 + \Delta R_4) = \Delta R_2 + \Delta R_3 \tag{4.13a}$$

Można je łatwo sprawdzić po podstawieniu do wzoru (2.5). Aby spełnić któryś z tych warunków co najmniej jeden z przyrostów musi zależeć od pozostałych. Powyższe dwie pary wzorów ujmują też jako przypadek szczególny zmian w dwu tylko ramionach mostka, w tym przykład rozpatrywany poprzednio gdy $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$.

Zależności powyższe można wykorzystać w pomiarach kilku parametrów. Gdy spełniony jest pierwszy warunek (4.12) to prądy w ramionach mostka 1 z rys.4.1 są stałe. Jego napięcie wyjściowe U'_{DC} wynosi:

$$U'_{DC} = JR_{10}\frac{n}{1+n}(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \tag{4.14}$$

a względny przyrost rezystancji wejściowej wg(2.18b) równa się:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m}$$

Do wyznaczenia wszystkich trzech występujących tu przyrostów ε_i niezbędne jest jeszcze jedno równanie. Przyrost ε_{DC} rezystancji wyjściowej jest jednak nieliniową funkcją przyrostów $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ - patrz np. dalej wzory na ε_{CD}.

Natomiast przy pomiarach co najwyżej tylko dwu wielkości x_1, x_2 przyrosty ε_i > -1 mogą spełniać jeden z warunków (4.12) lub (4.13) i być jeszcze dodatkowo ze sobą powiązane parami wskutek ich wspólnych zależności od tychże wielkości, np.:

$$\varepsilon_1 = m\varepsilon_3, \qquad \varepsilon_4 = m\varepsilon_2 \tag{4.15}$$

Wówczas równanie napięcia U'_{DC} jest liniowe i jest spełnione nawet i przy $\varepsilon_1 > 1$, a ze wzoru (4.15) wynika ponadto, że:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{1+m} \tag{4.16}$$

Z pomiarów U'_{DC} i ε_{AB} oraz z zależności (4.14) i (4.15a) można już teraz łatwo wyznaczyć przyrosty $\varepsilon_1, \varepsilon_4$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0{,}5\left(1+m\right)\varepsilon_{AB} + 0{,}5\frac{1+n}{n}\frac{U'_{DC}}{JR_{10}} \equiv w_E\ \varepsilon_{AB} + w_U\ U'_{DC} \\ \varepsilon_4 &= 0{,}5\left(1+m\right)\varepsilon_{AB} - 0{,}5\frac{1+n}{n}\frac{U'_{DC}}{JR_{10}} \equiv w_E\ \varepsilon_{AB} - w_U\ U'_{DC} \end{aligned} \tag{4.17 a, b}$$

gdzie współczynniki: $w_E \equiv 0{,}5\left(1+m\right)$; $\qquad w_U \equiv 0{,}5\dfrac{1+n}{n}\dfrac{1}{JR_{10}}$.

Wielkości x_1, x_2 wyznacza się z funkcji odwrotnych przyrostów $\varepsilon_1, \varepsilon_4$.

Przy $m = 1$ ze wzoru (4.15) otrzymuje się $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ oraz $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$ i wówczas

$$\varepsilon_{AB} = 0{,}5\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_4\right).$$

Warunek (4.12) jest również spełniony gdy:

$$\varepsilon_1 = -m\varepsilon_2, \qquad \text{oraz} \qquad \varepsilon_4 = -m\varepsilon_3 \tag{4.18}$$

czyli:

$$\Delta R_1 = -\Delta R_2, \qquad \text{oraz} \qquad \Delta R_3 = -\Delta R_4 \tag{4.18a}$$

Nie jest tu jednak możliwe znalezienie $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ dotychczasową metodą, gdyż rezystancja R_{AB} jest zawsze stała, tj. $\varepsilon_{AB} = 0$. Przy warunku (4.18) zmierzyć można jedynie:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{(\varepsilon_1 + n\varepsilon_4)\left[1 - \frac{1}{m}\left(1 + \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n}\right)\right]}{1+n} \qquad (4.19)$$

Przy $m = 1$ otrzymuje się nieco prostszą zależność:

$$\varepsilon_{CD} = -\left(\frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n}\right)^2 \qquad (4.19a)$$

Trzeba jednak zaznaczyć, że dokładność wyznaczenia przyrostów rezystancji na podstawie tego równania kwadratowego jest znacznie mniejsza niż poprzednio - z równania liniowego. Ponadto spełnienie warunków (4.18) następuje tylko, gdy: $|\varepsilon_i| \leq 1$. Są to więc istotne ograniczenia możliwości mostka jednoprądowego w pomiarach dwuparametrowych.

Łatwo jest zauważyć, że zależność (4.12a) i (4.18a) spełnia na przykład mostek składający się dwu potencjometrów o stosunku rezystancji n i o wyjściu z ich suwaków. Zaś zależność (4.13a) zachodzi w podobnym mostku po zamianie wejścia z wyjściem i parametru n na m.

Jeśli zaś przyrosty spełniają warunek (4.13), to:

$$U'_{DC} = JR_{10}\frac{m}{1+m}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (4.20)$$

oraz:

$$\varepsilon_{DC} = \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n} \qquad (4.21)$$

Ponadto gdy $\varepsilon_1 = n\varepsilon_3$, wtedy z (4.21) wynika, że $\varepsilon_2 = n\varepsilon_4$, a stąd:

$$\varepsilon_{DC} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1+n} \qquad (4.21a)$$

Należy tu mierzyć przyrost ε_{DC}, gdyż rezystancja R_{AB} jest nieliniową funkcją przyrostów ε_i.

Podane powyżej warunki (4.12) i (4.13) na linearyzację przebiegu napięcia wyjściowego mostka jednoprądowego można też wykorzystać i przy pomiarach tylko jednej wielkości układem kilku czujników. Przez odpowiedni dobór dodatkowych rezystancji szeregowych trzech ramion mostka dla czterech czujników o różniących się rezystancjach początkowych uzyskuje się napięcie wyjściowe będące liniową funkcją dużych przyrostów rezystancji tych czujników.

Na przykład dla względnych wartości rezystancji w stanie równowagi: $r_{10} = 1; r_{20} = 0{,}8; r_{30} = 1{,}4; r_{40} = 1{,}2$ oraz jednakowych bezwzględnych wartości przyrostów $|\varepsilon_i| \equiv \varepsilon$, ale przeciwnych ich znaków w ramionach sąsiednich, aby spełnić warunek (4.18a) powinno być: m = 1,07; n = 1,5 oraz mn=1,61. Wynika stąd, że do czujników trzeba szeregowo dołączyć rezystancje stałe o wartościach względnych $\Delta r_{20} = 0{,}27; \ \Delta r_{30} = 0{,}31; \ \Delta r_{40} = 0{,}3$.
Wówczas: $U'_{DC} = JR_{10}\,\varepsilon$.

Cztery przyrosty powiązane ze sobą parami zwiększają też, nawet dwukrotnie, czułość układu w stosunku do tylko dwu ramion zmiennych.

Układ z rys. 4.1 umożliwia dwuparametrowe pomiary przyrostów rezystancji, dzięki temu że składa się z dwu sprzężonych ze sobą mostków klasycznych (mostek w mostku). Mierzy się napięcia wyjściowe obu mostków. Jeśli rezystancje mostków spełniają warunki podane w opisie rys. 1, to oba mostki pracują przy wymuszeniu prądowym. Na podstawie wzoru (4.4) uzyskuje się następujące proste wzory na napięcia wyjściowe:

$$U'_{DC} = T'_{10} f'(\varepsilon_i)$$

$$\Delta U'_{AB} = T'_{20}\, f_2(\varepsilon_{AB}) \qquad (4.22)$$

Czułości początkowe T'_{01}, T'_{02} opisane są następującymi wzorami:

$$T'_{10} = I_{AB\,0} \frac{R_{10} R_{30}}{\sum R'_{i0}} = J\, T'_{20} \frac{R_6 + R_7}{R_5 R_7} \frac{R_{10} R_{30}}{\sum R'_{i0}} \qquad (4.23)$$

$$T'_{20} = J \frac{R_5 R_7}{\sum R'_{j0}} \qquad (4.24)$$

gdzie: $\sum R'_{i0} = R_{10} + R_{20} + R_{30} + R_{40}$

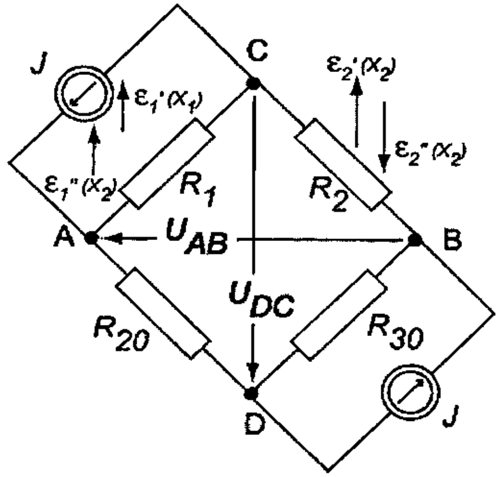
$$\sum R'_{J0} = R_{AB0} + R_5 + R_6 + R_7$$

Jeśli mostek podwójny z rys. 4.1 spełnia podane już na wstępie, następujące podstawowe zależności $R_5 >> R_{AB}, R_L >> R_{CD}$, to prąd wejściowy I_{AB} mostka 1 jest praktycznie stały i można stosować wzory dla mostka jednoprądowego, omówione w tym rozdziale. Napięcie wyjściowe mostka 2 służy natomiast do bezpośredniego pomiaru zmian rezystancji wejściowej mostka 1. Z tych wzorów wyznacza się zależności pomiędzy przyrostami rezystancji ramion mostka, a z nich – obie pośrednio mierzone wielkości. Wzory (4.22) linearyzują się dla bardzo małych przyrostów., zaś dla dużych przyrostów linearyzuje się U'_{DC} i ε_{AB} przy spełnianiu warunków linearyzacji.

Autor uważa też, że układ dwumostkowy o strukturze kaskadowej z rys.4.1 mógłby też być stosowany do równoczesnych pomiarów przemiennoprądowch składowych kilku impedancji przy przetwarzaniu fazoczułym sygnałów wyjściowych. Jest to bardzo obszerne zagadnienie, wykraczające poza ramy tej monografii.

5. ZASTOSOWANIE DWUPRĄDOWYCH REZYSTANCYJNYCH MOSTKÓW 4R W POMIARACH WIELOPARAMETROWYCH

5.1. Zasada pomiarów dwuparametrowych (2D) niezrównoważonym dwuprądowym mostkiem 4R o dwu wyjściach



Rys. 5.1. Zasada pomiarów dwu parametrów x_1, x_2 mostkiem dwuprądowym antysymetrycznym – o zrównoważonych obu wyjściach przy początkowych rezystancjach $R_{40} = R_{20}$.
Fig. 5.1. Principle of two variable x_1, x_2 measurements by the antisymmetric double current bridge of, $R_{10} = R_{30}$, $R_{40} = R_{20}$.

Możliwości zastosowania niezrównoważonych rezystancyjnych mostków dwuprądowych w pomiarach dwuparametrowych autor opisał w kilku publikacjach [27 – 38, 42]. Można do tego celu wykorzystywać zarówno mostek zasilany z dwu jednakowych źródeł prądowych, jak i metodę wyznaczania jego średniego napięcia wyjściowego z dwu pomiarów przy zamianie miejscami dwu niejednakowych źródeł zasilających – układ z rys. 3.5a, a nawet układ z rys 3.5b z przełączanym tylko jednym źródłem. Mostek powinien spełniać równocześnie warunki równowagi w obu przekątnych. Zachodzi to gdy $m = n$ (czyli dla $R_{20} = R_{40}$ i $R_{30} = R_{10}$). Niech zmieniają się w nim tylko dwa sąsiednie ramiona R_1, R_2 ($\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$). Ich zmiany mogą być opisywane różnymi funkcjami. Przyjmiemy, że przyrosty względne ε_1, ε_2 mają po dwie składowe, pokazane na rys. 5.1 i opisane zależnościami (1.2a). Z (3.15b) i (3.15c) wynika, że napięcia wyjściowe na przekątnych takiego mostka dwuprądowego wynoszą:

$$U''_{DC} = T_0 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{2(1+m)}} \tag{5.1}$$

$$U_{AB} = T_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{2(1+m)}} \tag{5.2}$$

gdzie: $T_0 = JR_{10} \frac{m}{2(1+m)}$ – początkowa czułość napięciowa, jednakowa dla obu wyjść.

Ze wzorów (5.1) i (5.2) wynika, że podany na rys. 5.1 mostek dwuprądowy antysymetryczny, przy $m = n$, ma dla obu napięć wyjściowych jednakowe początkowe czułości, ich funkcje niezrównoważenia (drugie czynniki) różnią się tylko licznikami. Dla przykładu dla mostka podwójnie symetrycznego w równowadze, tj. gdy: $m = 1$, mamy: $T_0 = 0{,}25\, JR_{10}$.

przy $m=1$, $\varepsilon_1=1{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}5$ otrzymuje się: $U''_{DC} = \frac{11}{24} JR_{10}$ i $U_{AB} = \frac{1}{6} JR_{10}$

Przy małych wartościach bezwzględnych przyrostów $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, takich że: $|\varepsilon_1\varepsilon_2| << |\varepsilon_1+\varepsilon_2|$ oraz $|\varepsilon_1 + m\varepsilon_2| << 2(1+m)$, czyli dla bezwzględnych przyrostów $|\Delta R_1 + \Delta R_2| << 2(R_{10} + R_{20})$, wzory (5.1) i (5.2) upraszczają się następująco:

$$U''_{DC} = T_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{5.1a}$$

$$U_{AB} = T_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{5.2a}$$

Tak więc jedno z napięć jest wówczas proporcjonalne do sumy, a drugie – do różnicy względnych przyrostów rezystancji sąsiednich ramion R_1, R_2 mostka. Po rozwiązaniu układu równań (5.1) i (5.2) dla dowolnych wartości przyrostów otrzymuje się:

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{m} \frac{U''_{DC} + U_{AB}}{JR_{10} - U_{AB}} \tag{5.3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{m+1}{m} \frac{U''_{DC} - U_{AB}}{JR_{10} + U_{AB}} \tag{5.4}$$

Jedynie ujemne wartości tych przyrostów mają następujące ograniczenia: $\varepsilon_1 \geq -1$, $\varepsilon_2 \geq -1$, wynikające z oczywistego warunku by wartości pasywnych rezystancji R_1, R_2 były dodatnie.

Dla mostka podwójnie symetrycznego w równowadze, tj. gdy $m=n=1$, pierwszy mnożnik w obu wzorach wynosi 2.

Poprawność wzorów (5.3) i (5.4) można łatwo sprawdzić przez podstawienie do nich wartości napięć U_{AB}, U_{DC}'', na przykład wyznaczonych w podanym powyżej przykładzie liczbowym przy $m=1$. Powraca się wówczas do przyjętych tam wartości przyrostów: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0,5$.

Przy małych przyrostach, tj. spełniających takie same dwa warunki jak dla wzorów (5.1a) i (5.2a), otrzymuje się:

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC} + U_{AB}}{JR_{10}} \tag{5.5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC} - U_{AB}}{JR_{10}} \tag{5.6}$$

Natomiast dla wartości pośrednich, jeśli spełniony jest tylko pierwszy z warunków $|\varepsilon_1\varepsilon_2| << |\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$, mamy:

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC} + U_{AB}}{JR_{10} - \frac{m+1}{m}U''_{DC} - \frac{1-m}{2m}U_{AB}} \tag{5.7}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC} - U_{AB}}{JR_{10} - \frac{m+1}{m}U''_{DC} - \frac{1-m}{2m}U_{AB}} \tag{5.8}$$

Dla mostka podwójnie symetrycznego w równowadze $m = n = 1$ i wzory te upraszczają się do postaci

$$\varepsilon_1 = 2\,\frac{U''_{DC} + U_{AB}}{JR_{10} - 2U''_{DC}} \tag{5.7a}$$

$$\varepsilon_2 = 2\,\frac{U''_{DC} - U_{AB}}{JR_{10} - 2\,U''_{DC}} \tag{5.8a}$$

Rozpatrzymy teraz podane w punkcie 1.4 trzy szczególne postacie zależności przyrostów rezystancji od przyrostów wielkości mierzonych: $\varepsilon_1(x_1,x_2)$, $\varepsilon_2(x_1,x_2)$.

Przypadek 1°: oba czujniki są selektywne: $\varepsilon_1 = f_1(x_1)$, $\varepsilon_2 = f_2(x_2)$.
Dla przyrostów ε_1, ε_2 otrzymanych ze wzorów (5.3), (5.4), z ich funkcji odwrotnych wyznacza się bezpośrednio:

$$x_1 = f_1^{-1}(\varepsilon_1), \qquad x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon_2).$$

Przypadek 2°: tylko drugi czujnik jest selektywny, a zależność przyrostu ε_1 od obu jego składowych jest liniowa, np.:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'(x_1) \pm \varepsilon''(x_2), \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon''(x_2)$$

stąd

$$\varepsilon' = \varepsilon_1(x_1) \mp \varepsilon_2(x_2); \qquad \varepsilon'' = \varepsilon_2(x_2)$$

Po uwzględnieniu wzorów (5.5) i (5.6) otrzymuje się:

$$\varepsilon'_- = \frac{m+1}{m}\,\frac{2U_{AB}\left(U''_{DC} + JR_{10}\right)}{\left(JR_{10}\right)^2 - U_{AB}^2} \tag{5.9a}$$

lub:

$$\varepsilon'_+ = \frac{m+1}{m}\,\frac{JR_{10}U''_{DC} + U_{AB}^2}{\left(JR_{10}\right)^2 - U_{AB}^2} \tag{5.9b}$$

oraz:

$$\varepsilon'' = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC} - U_{AB}}{JR_{10} + U_{AB}} \tag{5.9c}$$

Z wartości tych przyrostów i ich funkcji odwrotnych wyznacza się:

$$x_1 = f_1^{-1}(\varepsilon'), \qquad x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon'').$$

Przypadek 3°: Wielkość x_1 jednakowo wpływa na oba względne przyrosty ε_1, ε_2, zaś wpływy wielkości x_2 mają jednakowe wartości, lecz są przeciwnego znaku, czyli :

$$\varepsilon'_1(x_1) = \varepsilon'_2(x_1) \equiv \varepsilon' \qquad \varepsilon''_2(x_2) = -\varepsilon''_1(x_2) \equiv \varepsilon''.$$

wówczas:

$$\varepsilon' = 0{,}5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2); \qquad \varepsilon'' = 0{,}5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Ze wzorów (5.1) i (5.2) wynika, że:

$$U''_{DC} = 2T_0 \frac{\varepsilon' + \dfrac{(\varepsilon')^2 - (\varepsilon'')^2}{2}}{1 + \dfrac{\varepsilon'}{2} + \dfrac{\varepsilon''(1-m)}{2(1+m)}} \tag{5.10}$$

$$U_{AB} = 2T_0 \frac{\varepsilon''}{1 + \dfrac{\varepsilon'}{2} + \dfrac{\varepsilon''(1-m)}{2(1+m)}} \tag{5.11}$$

Oba te napięcia różnią się tylko licznikami. Sygnały na przekątnych AB, CD mostka dwuprądowego z rys. 5.1 są więc różnymi funkcjami obu składowych ε' i ε'' przyrostów ε_1 i ε_2. Rozwiązując powyższy układ równań, można wyznaczyć te składowe, a z nich - wielkości mierzone x_1 i x_2.

Przy bardzo małych wartościach składowych przyrostów, tj. gdy $\varepsilon' \ll 1$, $\varepsilon'' \ll 1$, pomijalne są ich kwadraty oraz drugi i trzeci składnik mianowników we wzorach (5.10) i (5.11), a wzory te upraszają się do następujących postaci:

$$U''_{DC} = JR_{10} \frac{m}{1+m} \varepsilon'(x_1) \tag{5.12}$$

$$U_{AB} = J R_{10} \frac{m}{1+m} \varepsilon''(x_2) \tag{5.13}$$

Każde z napięć obu przekątnych mostka dwuprądowego zależy wówczas liniowo i wyłącznie od składowej przyrostu rezystancji wywołanej tylko jedną z wielkości wpływających.

Bezpośrednio ze wzorów (5.10) i (5.11), otrzymuje się:

$$\varepsilon' = \frac{m+1}{m}\,\frac{JR_{10}U''_{DC} + U^2_{AB}}{(JR_{10})^2 - U^2_{AB}} \tag{5.14}$$

$$\varepsilon'' = \frac{m+1}{m}\,\frac{U_{AB}\left(U''_{DC} + JR_{10}\right)}{(JR_{10})^2 - U^2_{AB}} \tag{5.15}$$

Składowe ε' *i* ε'' przyrostów ε_1 i ε_2 są w ogólnym wypadku od siebie niezależne, lecz muszą spełniać następujące warunki: $\varepsilon' + \varepsilon'' \geq -1$, oraz $\varepsilon' - \varepsilon'' \geq -1$. Na płaszczyźnie ($\varepsilon''$, ε') powinny więc one znajdować się w obszarze pomiędzy dwoma prostymi o nachyleniu ± 1, powyżej ich punktu przecięcia $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = 0$. Wynika to z oczywistego, podanego już wcześniej wymagania, by rezystancje R_1 i R_2 były dodatnie.

Dla bardzo małych przyrostów ε_1 i ε_2 wzory te upraszczają się następująco:

$$\varepsilon' = \frac{m+1}{m}\,\frac{U''_{DC}}{JR_{10}} \tag{5.14a}$$

$$\varepsilon'' = \frac{m+1}{m}\,\frac{U_{AB}}{JR_{10}} \tag{5.15a}$$

Obie składowe przyrostów mają wówczas ten sam współczynnik proporcjonalności, a każda z nich zależy rozdzielnie tylko od jednego z dwu napięć wyjściowych mostka dwuprądowego.

Tak, jak w przypadku 2°, z wartości ε', ε'' za pomocą ich funkcji odwrotnych można i tu wyznaczyć:

$$x_1 = f_1^{-1}(\varepsilon'), \qquad x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon'').$$

Dla mostka podwójnie symetrycznego tj. $m = n = 1$, wzory (5.10) i (5.11) przyjmują prostsze postacie:

$$\frac{U''_{DC}}{2T_0} \equiv u''_{DC} = \varepsilon' - \frac{(\varepsilon'')^2}{2 + \varepsilon'} \tag{5.16}$$

$$\frac{U_{AB}}{2T_0} \equiv u_{AB} = \frac{2\varepsilon''}{2+\varepsilon'} \tag{5.17}$$

gdzie: $T_0 = \frac{1}{4} JR_{10} = \frac{1}{2} U_{10}$;

U_{10} – napięcie na rezystancji R_{10} przy równowadze układu.

W pierwszym z napięć wyjściowych dominujące znaczenie ma ε', a w drugim – ε''. Ze wzoru (5.16) wynika, że zmiana wartości ε'' powoduje nieliniowo malejące wraz z ε', przesunięcie charakterystyki $U''_{DC}(\varepsilon')$ do dołu. Na przykład dla $\varepsilon' = 0$ i przy $|\varepsilon''| \leq 0{,}1$ nie przekracza ono 0,005, co stanowi około 4,5 % napięcia wyjściowego przy maksymalnej wartości $\varepsilon' = 0{,}1$. Natomiast w zależności (5.17) przyrost ε' zmienia tylko nachylenie prostej $U_{AB}(\varepsilon'')$. Np. dla $\varepsilon' = 0{,}1$ wpływ ten wynosi –4,7 %. Przy wartościach bezwzględnych przyrostów $|\varepsilon'|$, $|\varepsilon''|$ malejących poniżej 0,1, obie zależności stają się coraz bardziej zbliżone do liniowych.

Rozwiązując układ równań (5.16) i (5.17) otrzymuje się:

$$\varepsilon' = \frac{u''_{DC} + \frac{1}{2}u^2_{AB}}{1 - \frac{u^2_{AB}}{4}} \tag{5.18}$$

$$\varepsilon'' = \frac{1 + \frac{u''_{DC}}{2}}{1 - \frac{u^2_{AB}}{4}} u_{AB} \tag{5.19}$$

Są to inne, ze względu na stosowane tu oznaczenia, postacie wzoru (5.16) i (5.17) dla $m = 1$.

Jeśli $(\varepsilon'')^2 << (2 + \varepsilon')$ to wzór (5.16) upraszcza się dalej do bardzo prostej postaci: $u''_{DC} = \varepsilon'$, a wszystkie składniki zawierające u_{AB}^2 we wzorach (5.18) i (5.19) stają się pomijalne.

Dla omówionego układu, w taki niezbyt skomplikowany sposób **można zrealizować równoczesny pomiar dwu wielkości w jednym układzie mostka dwuprądowego, mierząc tylko napięcia na jego przekątnych i dalej odpowiednio je przetwarzać wg podanych tu wzorów.**

Podobne zależności zachodzą przy zmianach dwu innych ramion mostka dwuprądowego, w tym – naprzeciwległych. Wzory rozdziału 5 dotyczące różnych przypadków pomiarów dwuparametrowych mostkiem dwuprądowym zestawiono w tabeli 5.1.

Można też w mostku dwuprądowym mierzyć dwa parametry przy czterech ramionach zmiennych, gdy dwie pary ich rezystancji mają przeciwne znaki dla składowych zależnych od każdej z wielkości mierzonych, a więc różnią się tak jak na rys. 5.1. Możliwe są też podobne pomiary jak omówione w rozdziale 4 dla mostka jednoprądowego, gdy korzysta się tylko z jednego napięcia wyjściowego i dodatkowo mierzy się zmianę odpowiedniej rezystancji wyjściowej R_{AB} lub R_{CD}, np. przez pomiar prądu zwarcia na wyjściu. Te zmiany rezystancji można też wykorzystać w pomiarach więcej niż dwu wielkości. Ze wzorów (3.15a – c) wynika ponadto, że podobne zależności można też uzyskać z dwu pomiarów przy użyciu układu mostkowego a) wraz z jednym z układów b) lub c). Wymaga to jednak odpowiedniego przełączania zasilających źródeł prądowych, realizowanego bezstykowo i automatycznie, na przykład podobnie jak to opisano w publikacji [21] dla mostka tensometrycznego.

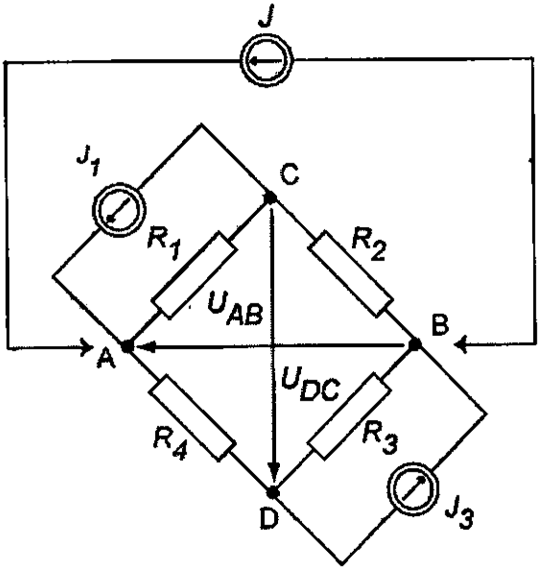
5.2. Pomiary trzech rezystancji mostkiem 4R równoważonym przy obu rodzajach zasilania[1]

Na rys. 5.2 pokazano łącznie oba warianty zasilania: jednoprądowe i dwuprądowe tego samego mostka, które dołącza się do niego kolejno. Równoważąc mostek np. przez regulację R_3 przy zasilaniu dwuprądowym dla każdego wyjścia AB i DC osobno i dodatkowo przy klasycznym prądowym zasilaniu ponownie dla wyjścia DC, można zmierzyć dowolne trzy, połączone ze sobą szeregowo rezystancje. W tym celu należy z nich i z regulowanej wzorcowej rezystancji stworzyć zamknięty kontur mostka. Rezystancja regulacyjna powinna mieć wymaganą w danych pomiarach dokładność i rozdzielczość. Może być ona ustawiana ręcznie - np. poprzez regulację opornika o wielu dekadach lub automatycznie cyfrowo - poprzez przełączanie specjalnego układu rezystorów, np. w postaci drabinki, takiego jak w przetwornikach kompensacyjnych a/c.

Z trzech warunków równowagi (2.6), (3.12a) i (3.13a) wynika, że z trzech zrównoważeń otrzyma się w ogólnym wypadku różne wartości rezystancji R_{3a}, R_{3b}, R_{3c} [33, 36]. Wstawiając je do następujących wzorów:

$$R_1 = \sqrt{R_{3b} R_{3c}} \qquad R_2 = \sqrt{R_{3b} R_{3a}} \qquad R_4 = \sqrt{R_{3a} R_{3c}} \tag{5.20}$$

[1] Metody te po raz pierwszy zostały omówione przez autora w pracach [33] – [36].



Rys. 5.2. Warianty zasilania mostka ze źródeł prądowych w pomiarach trzech i czterech przyrostów rezystancji: klasyczne jednoprądowe – AB, wyjście DC; dwuprądowe - zasilanie AC i BD, wyjścia DC lub AB.

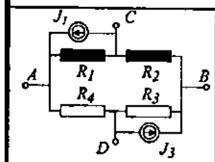
Fig. 5.2. Cases of supply of the bridge from current sources when three or four its resistance increments are measured.

wyznacza się trzy mierzone rezystancje. Jeśli pomiary takie wykona się dla stanu początkowego tych rezystancji, a następnie dla dowolnego ich stanu, to można również określić ich przyrosty. Proces pomiarowy jest dość rozbudowany, wymaga przełączeń zasilania i wyjść. Powinien więc wraz z obliczaniem wyników zostać zautomatyzowany cyfrowo. Można by wówczas tą metodą wykonywać też pośrednie pomiary takich trzech wielkości, które w różny sposób wpływają na te trzy mierzone rezystancje.

5.3. Pomiary przyrostów trzech i czterech rezystancji w mostku niezrównoważonym 4R

Inny rodzaj pomiarów wieloparametrowych występuje w mostkach wtedy, gdy trzeba znać osobno wartości każdego z czterech przyrostów jego rezystancji. Dla mostka o jednakowych rezystancjach początkowych, np. składającego się z takich samych czujników i co najmniej z jednym dostępnym do rozłączania węzłem (5 zacisków) wygodnie byłoby użyć prądową pętlą Andersona [16], jeśli się nią dysponuje. Gdy jednak mostek ten jest nierozłączalny lub zawiera elementy o różniących się rezystancjach

Tabela 5.1. Podstawowe zależności dwuprądowego nieobciążonego mostka antysymetrycznego ($R_{10}=R_{30}$, $R_{20}=R_{40}$) przy zmianach rezystancji dwu jego ramion R_1, R_2.
Table 5.1. Basic relations in related values of the double current antisymmetric resistance bridge ($R_{10}=R_{30}$, $R_{20}=R_{40}$) of two variable arms R_1, R_2.

Nr	Parametr mostka	Symbol	Przypadek ogólny	Przypadki szczególne			
			 $R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2=mR_{10}(1+\varepsilon_2)$ $R_3=R_{10}$, $R_4=mR_{10}$ Zasilanie: $I_{AC}=I_{BD}=J$	Mostek o antysymetrycznych rezystancjach: ($m=n$)		Mostek podwójnie symetryczny ($m=n=1$)	
				1) Małe przyrosty – pomijalne tylko ich iloczyny: $\lvert\varepsilon_1\varepsilon_2\rvert << \lvert\varepsilon_1+\varepsilon_2\rvert$, 2) Bardzo małe przyrosty t.j. $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 << 4(1+m)^2$ czyli: $\lvert\Delta R_1+\Delta R_2\rvert << \sum R_{i0}$.			
			a. Dowolne przyrosty	b. Małe przyrosty 1).	c. Bardzo małe przyrosty 2)	d. Duże przyrosty	e. Małe przyrosty 1)
1	Napięcia wyjściowe	U''_{DC}	$T_0\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}}$	$\approx T_0\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}}$	$\approx T_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$	$T_0\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}}$	$\approx T_0\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}}$
2		U_{AB}	$T_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}}$	$T_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}}$	$\approx T_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$	$T_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}}$	$T_0\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}}$
3	Początkowa czułość napięciowa	T_0	$JR_{10}\dfrac{m}{2(1+m)}$			$\dfrac{1}{4}JR_{10}$	
4	Rezystancja wyjścia AB	R_{AB}	$\dfrac{(1+m)(1+m+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{2(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}R_{10}$	$\approx R_{AB0}\left[1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}\right]$		$R_{10}\dfrac{1+0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx R_{10}[1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]$
5	Rezystancja wyjścia CD	R_{CD}	$\dfrac{(1+m+\varepsilon_1)(1+m+m\varepsilon_2)}{2(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2}R_{10}$	$\approx R_{CD0}\left(1+0{,}5\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+m}\right)$		$R_{10}\dfrac{(1+0{,}5\varepsilon_1)(1+0{,}5\varepsilon_2)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx R_{10}[1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]$
6	Rezystancje wyjść w równowadze	R_{AB0} R_{CD0}	$\dfrac{1+m}{2}R_{10}$			R_{10}	
7	Względne przyrosty rezystancji: Wyjś-cie AB	ε_{AB}	$\dfrac{0{,}5(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{1+m+0{,}5(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}$	$\dfrac{0{,}5(\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}{1+m}$		$\dfrac{0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx 0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$
8	Względne przyrosty rezystancji: Wyjś-cie DC	ε_{CD}	$\dfrac{2m\varepsilon_1\varepsilon_2}{(1+m)[2(1+m)+\varepsilon_1+m\varepsilon_2]}$	$\approx\dfrac{m\varepsilon_1\varepsilon_2}{(1+m)^2\left(1+\dfrac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{2(1+m)}\right)}$	$\approx\dfrac{m\varepsilon_1\varepsilon_2}{(1+m)^2}$	$\dfrac{0{,}25\varepsilon_1\varepsilon_2}{1+0{,}25(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$	$\approx 0{,}25\varepsilon_1\varepsilon_2$
9	Względne przyrosty rezystancji: Ramię R_1	ε_1	$\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}+U_{AB}}{JR_{10}-U_{AB}}$	$\approx\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}+U_{AB}}{JR_{10}}$	$\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}+U_{AB}}{JR_{10}-\dfrac{m+1}{m}U''_{DC}-\dfrac{1-m}{2m}U_{AB}}$	$2\,\dfrac{U''_{DC}+U_{AB}}{JR_{10}-2\,U''_{DC}}$	$2\,\dfrac{U''_{DC}+U_{AB}}{JR_{10}}$
10	Względne przyrosty rezystancji: Ramię R_2	ε_2	$\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}-U_{AB}}{JR_{10}+U_{AB}}$	$\approx\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}-U_{AB}}{JR_{10}}$	$\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{U''_{DC}-U_{AB}}{JR_{10}-\dfrac{m+1}{m}U''_{DC}-\dfrac{1-m}{2m}U_{AB}}$	$2\,\dfrac{U''_{DC}-U_{AB}}{JR_{10}-2\,U''_{DC}}$	$2\,\dfrac{U''_{DC}-U_{AB}}{JR_{10}}$

początkowych, zadanie takie trzeba rozwiązywać inaczej. Można np. mierzyć rezystancje wejściowe między różnymi parami zacisków mostka – przy rozwartych lub zwartych pozostałych zaciskach. Rezystancja zwory powinna być wówczas wielokrotnie mniejsza od najmniejszej z rezystancji ramion. Dla czterogałęziowej struktury mostkowej wystarczają cztery takie pomiary. Można też mierzyć zmiany napięć na poszczególnych ramionach mostka. W obu wypadkach trzeba następnie rozwiązać dość skomplikowany układ równań, nieliniowy względem przyrostów rezystancji. W literaturze podano metody wyznaczania z pomiarów na zaciskach układu nT przewodności jego schematu zastępczego w postaci wieloboku zupełnego jak i wyznaczanie z takich pomiarów elementów macierzy przewodności układu 2n-wrotnika [8]. Wartości impedancji i konduktancji w schematach zastępczych układu 4T zawierających węzły wewnętrzne można znaleźć ze wzorów opisujących kolejne transformacje układu podane na rys. 1.1. Podobną metodę autor i następnie Galiński wykorzystywali przy badaniu zmian elementów schematu zastępczego hallotronu jako układu 4T [26]. Metody te nie zapewniają jednak wystarczająco dużej dokładności przy wyznaczaniu wartości każdego z małych przyrostów ε_i rezystancji ramion mostka.

Dzięki odkryciu mostków dwuprądowych stało się możliwe również odmienne postępowanie, które może być bardziej przydatne, szczególnie przy małych przyrostach ε_i. Trzeba również wykonać cztery pomiary, lecz inne niż poprzednio, tj. zmierzyć zmiany napięć na obu przekątnych mostka przy jego konwencjonalnym zasilaniu prądowym po przekątnej oraz przy zasilaniu dwuprądowym obocznym. Do pierwszej pary pomiarów można użyć układu mostka dwuprądowego z rys. 5.1a, a do drugiej – układu mostka podwójnego z rys. 4.1. Pomiary te zilustrujemy na przykładzie mostka podwójnie symetrycznego, tj. o jednakowych rezystancjach początkowych R_{i0} wszystkich ramion ($m = n = 1$). Wówczas równowaga zachodzi zarówno dla obu wyjść zasilania dwuprądowego, jak i przy zasilaniu jednoprądowym. Z czterech przyrostów napięć przekątnych mostka przy jego niezrównoważeniu wyznacza się wartości względnych przyrostów ε_i każdej z rezystancji ramion. Przyrosty te mogą być różne. Przy pomijalnie małych wszystkich możliwych kombinacjach iloczynów $\varepsilon_i \varepsilon_j$ otrzymuje się następujący układ równań:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \frac{4U_{DC}'}{JR_{10}}\left(1 + \frac{1}{4}\sum \varepsilon_i\right)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \frac{4U_{DC}''}{JR_{10}}\left(1 + \frac{1}{4}\sum \varepsilon_i\right)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \frac{4U_{AB}}{JR_{10}}\left(1 + \frac{1}{4}\Sigma\varepsilon_i\right)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \frac{4\varepsilon_{AB}}{1-\varepsilon_{AB}} \qquad (5.21\text{a-d})$$

Pierwsze trzy zależności tego układu wynikają ze wzorów na napięcia wyjściowe układów a), b) i c). Wynika z nich, że stosunki trzech przyrostów do jednego z nich np. ε_1, są powiązane prostymi liniowymi zależnościami napięć wyjściowych. Czwarte równanie uzyskuje się z pomiaru względnego przyrostu ε_{AB} rezystancji wejściowej R_{AB}, wyznaczanej np. dla układu a) na podstawie pomiaru zmiany napięcia $U_{AB}(\varepsilon_i)$ przy J = const.

Rozwiązując układ równań (5.21) i uwzględniając, że:

$$\varepsilon_{AB} \approx \frac{1}{4}\frac{\Sigma\varepsilon_i}{1+\frac{1}{4}\Sigma\varepsilon_i}$$

oraz

$$1+\frac{1}{4}\Sigma\varepsilon_i = \frac{1}{1-\varepsilon_{AB}} \qquad (5.22\text{a, b})$$

otrzymuje się następujące wzory na przyrosty poszczególnych rezystancji:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{U_{DC}' + U_{DC}'' + U_{AB}}{JR_{10}} + \varepsilon_{AB}\right)\frac{1}{1-\varepsilon_{AB}}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{-U_{DC}' + U_{DC}'' - U_{AB}}{JR_{10}} + \varepsilon_{AB}\right)\frac{1}{1-\varepsilon_{AB}}$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{U_{DC}' - U_{DC}'' - U_{AB}}{JR_{10}} + \varepsilon_{AB}\right)\frac{1}{1-\varepsilon_{AB}}$$

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{-U_{DC}' - U_{DC}'' + U_{AB}}{JR_{10}} + \varepsilon_{AB}\right)\frac{1}{1-\varepsilon_{AB}} \qquad (5.23\text{a-d})$$

Dla bardzo małych przyrostów ε_i lub jeśli te przyrosty są takie, że $\varepsilon_{AB} = 0$, powyższe wzory znacznie upraszczają się – do pierwszych ułamków we wszystkich nawiasach.

Do powyższych celów można też wykorzystać cztery inne pomiary, dokonywane tylko w mostku dwuprądowym. Należy zmierzyć zmiany obu jego napięć wyjściowych i obu jego prądów zwarcia. Nie wymaga to przełączania zasilających źródeł prądowych, jeśli źródła te są jednakowe. Wtedy otrzymuje się jednak bardziej skomplikowany układ równań, w ogólnym wypadku nieliniowy względem ε_i. W szczególnym wypadku jedna z rezystancji może być stała, np. o wartości początkowej w stanie równowagi, i stanowić odniesienie. Wówczas mierzy się poszczególne przyrosty rezystancji trzech pozostałych ramion mostka, np. składowe pola naprężeń rozetą tensometryczną.

Przedstawioną powyżej metodą można też mierzyć pośrednio takie cztery wielkości, z których każda wpływa na rezystancję tylko jednego ramienia, bądź różnie na rezystancje każdego z ramion, np. podobnie jak to omówiono w poprzednich punktach. Metoda ta może też służyć do diagnostyki działania poszczególnych czujników w mostku, bez jego rozłączania, zaś przy użyciu zespołu dwu, trzech lub czterech czujników – do badania składowych kierunkowych rozkładu pól lub rozkładu właściwości materiałów.

5.4. Wnioski dotyczące pomiarów kilkuparametrowych w mostkach

Treść tej i poprzednich prac autora, podanych w części B1 Bibliografii, pozwala na sformułowanie szeregu poniższych wniosków szczegółowych.

- Niezrównoważone czterogałęziowe układy mostkowe zarówno o zasilaniu klasycznym – z pojedynczego źródła, jak i o zasilaniu niekonwencjonalnym – z dwu obocznie dołączonych do ramion naprzeciwległych źródeł prądowych, jednakowych lub przełączanych wzajemnie, można z powodzeniem stosować pojedynczo w – pośrednich pomiarach dwuparametrowych przy różnej wielkości i określonych znakach względnych przyrostach rezystancji ramion oraz łącznie – w pomiarach trój- i czteroparametrowych.
- W pomiarach tych wyznacza się bezpośrednio tylko przyrosty rezystancji (lub konduktancji) ramion mostka bądź pośrednio – inne wielkości, które niejednakowo wpływają na poszczególne przyrosty.
- W tym celu w mostku klasycznym mierzy się napięcie wyjściowe i jedną jego rezystancję: wejściową lub wyjściową. Parametry te są różnymi funkcjami przyrostów rezystancji ramion mostka od ich wartości w stanie równowagi.
- W mostku dwuprądowym niesymetrycznym, tj. o jednakowych naprzeciwległych rezystancjach początkowych ($m = n$), uzyskuje się dwa różne napięciowe sygnały wyjściowe (lub prądy zwarcia) z obu przekątnych, które

zależą różnie od przyrostów rezystancji ramion mostka. Dzięki temu możliwe są pomiary dwuparametrowe.

- Przy niezbyt trudnych do spełnienia dodatkowych warunkach dla obu rodzajów mostków, przyrosty ich rezystancji stają się prostymi funkcjami parametrów mostka mierzonych na jego zaciskach.. W przypadkach szczególnych i przy małych przyrostach zależności te upraszczają się, a nawet stają się rozdzielne.

- Można rozszerzyć zastosowanie mostka klasycznego na pomiary dwuparametrowe przy dużych przyrostach względnych rezystancji ramion z zachowaniem liniowości przebiegu funkcji jego napięcia wyjściowego,

- Liniową zależność tego napięcia wyjściowego od przyrostów względnych rezystancji ramion uzyskuje się nie tylko dla bardzo małych ich wartości, ale też i dla przyrostów dużych, gdy zmieniają się tylko określone dwie rezystancje ramion, lub gdy przyrosty te są odpowiednio do siebie parami proporcjonalne.

- Mostki dwuprądowe umożliwiają pomiary przy takich samych znakach przyrostów immitancji pary czujników połączonych trwale ze sobą (patrz rys. 3.7). Tego nie zapewniają czteroramienne mostki klasyczne, które w takim wypadku dla jednakowych przyrostów względnych pozostają w równowadze.

- Mostki do pomiarów kilku parametrów lub do diagnostyki, zarówno klasyczne jak i dwuprądowe, o małych wartościach rezystancji, powinny mieć wierzchołki zaopatrzone w dwa zaciski – prądowy i napięciowy. Wówczas można by również korzystać z pomiarów napięć poszczególnych ramion mostka.

- Metoda obocznego dwuprądowego zasilania mostka nadaje się też dobrze do diagnostyki zmian rezystancji jego ramion przy stosowaniu dwuprzewodowej magistrali według standardu IEEE 1149.4 [84], gdyż źródła wymuszające i napięcie wyjściowe mają zacisk wspólny – masę układu.

- Za pomocą mostka dwuprądowego i nieruchomej pary, lub dwu par czujników, można na przykład zmierzyć składowe kierunkowe gradientu pola, zaś przy użyciu 4 elektrod, ustawionych w wierzchołkach rombu – składowe kierunkowe rezystancji materiału w obszarze między tymi elektrodami oraz wpływy na te składowe pola zewnętrznego, np. magnetycznego lub temperatury.

- Dwuprądowe zasilanie można wykorzystać do rozdzielnego wyznaczania przyrostów poszczególnych rezystancji ramion mostka, bez jego rozłączania. Umożliwiają to pomiary zmian napięć pomiędzy wierzchołkami mostka przy zastosowaniu po kolei obu rodzajów zasilania. Dla małych przyrostów tych rezystancji w mostku symetrycznym uzyskuje się bardzo proste wzory opisujące te pomiary.

- Realizacja sprzętowa mostków dwuprądowych nie jest obecnie zbyt trudna, szczególnie przy prądzie stałym, pomimo iż wymagają one zasilania z dwu jednakowych źródeł prądowych, współbieżnych – dla układów zrównoważonych, oraz stabilizowanych – dla układów odchyłowych. Takie podwójne źródła są już nawet produkowane jako analogowe układy scalone [22]. Można też mierzyć przy dwu różniących się źródłach prądowych, zamieniając je miejscami, a nawet przełączać tylko jedno źródło. W tym celu należy zsumować otrzymywane dwa kolejne napięcia wyjściowe przed dalszym ich przetwarzaniem.

- Do tworzenia układów zawierających mostki dwuprądowe można też wykorzystać dwa odizolowane kanały programowalnych uniwersalnych kondycjonerów sygnału czujników [21, 23, 24] dysponujące wewnętrznymi źródłami prądowymi.

- Stosowane do pomiarów kilku parametrów układy z mostkami dwuprądowymi można też będzie w przyrządach realizować częściowo wirtualnie.

6. SCHEMATY ZASTĘPCZE HALLOTRONU JAKO NIEODWRACALNEGO CZUJNIKA 4T

Systemy pomiarów, monitoringu i diagnostyki zawierają wiele różnych układów czterozaciskowych, w tym czujników immitancyjnych oraz ich zestawów pasywnych i aktywnych, o budowie monolitycznej lub scalonych. Ich najbardziej ogólnym schematem zastępczym jest nieodwracalny układ 4T. Celem tego rozdziału jest przedstawienie na przykładzie hallotronu, pełnych i uproszczonych schematów zastępczych rzeczywistych nieodwracalnych elementów 4T, uwzględniających ich niedoskonałości i główne zjawiska pasożytnicze. Jest on ich reprezentatywnym przykładem jako element pasywny 4T sterowany polem magnetycznym. Może pracować jako analogowy mnożnik pola magnetycznego i prądu wejściowego, czujnik o parametrach zależnych od tego pola oraz być obiektem mierzonym przy badaniu wartości parametrów schematu zastępczego - aby określić ich zależności od pola magnetycznego lub temperatury (nie pożądane) lub właściwości wewnętrzne półprzewodnika, np. niejednorodność. Schematy zastępcze są użyteczne w praktyce, gdyż nie tylko ułatwiają analizę właściwości układów, ale i ich syntezę z punktu widzenia optymalizacji parametrów metrologicznych w bardzo wielu różnych zastosowaniach. Wiele schematów zastępczych hallotronów autor omówił syntetycznie po raz pierwszy w rozdziale 6 monografii *Technika hallotronowa* [26].. Poniżej dołożył starań aby te rozważania uaktualnić do potrzeb i możliwości obecnego poziomu techniki pomiarowej oraz uczynić użytecznymi do rozwiązywania zagadnień wiodącego tematu tej monografii – stworzenia podstaw teoretycznych i nowych rozwiązań układów kondycjonujących sygnały powstające równocześnie w układzie przy kilku parametrach zmiennych i sprzężone ze sobą.

Hallotrony pracują przede wszystkim jako czwórniki zasilane prądowo. Jako wprowadzenie zostaną więc opisane składowe napięcia wyjściowego nieidealnych hallotronów tak zasilanych, w innym ujęciu niż zazwyczaj spotykane. Następnie, opierając się na ogólnych równaniach nieodwracalnego układu liniowego o n końcówkach (zaciskach), określi się schematy zastępcze samego hallotronu o 4 wyprowadzeniach jako układu 4T i jego schemat pełny z uwzględnieniem napięć pasożytniczych. Schematy te obejmują oba istniejące obecnie rodzaje konstrukcji hallotronów, tj. zarówno ich rozwiązania klasyczne – czułe na pola prostopadłe do płaskiej płytki półprzewodnikowej, jak i powstałe stosunkowo niedawno, jako wynik odwzorowań konforemnych, hallotrony reagujące na pole wzdłuż jednego z boków płaskiej struktury półprzewodnikowej z 5 elektrodami na powierzchni. Ich dwie elektrody wyprowadzające prąd są połączone ze sobą poza strukturą bezpośrednio lub poprzez rezystor do kompensacji napięcia początkowego. Na zewnątrz są więc tu też tylko 4 końcówki i obowiązuje ten sam schemat zastępczy 4T. Następnie omawia się metody pomiaru parametrów schematu zastępczego hallotronu oraz schematy uproszczone, odpowiadające szczególnym przypadkom jego pracy, w tym jako czwórnika (dwuwrotnika).

6.1. Składowe napięcia wyjściowego rzeczywistych hallotronów

Napięcie wyjściowe u_y rzeczywistego, tj. nieidealnego hallotronu (rozważanego zarówno samodzielnie jak i łącznie ze współpracującymi z nim obwodami) opisujc ogólnie wzór

$$u_y = \gamma B_z i_x + \sum_{i=1}^{n} u_{yi} \tag{6.1}$$

gdzie: γ (B_Z, T) – iloczynowa robocza czułość hallotronu (lub układu hallotronowego)

i_x – prąd sterujący

B_z – składowa indukcji magnetycznej w kierunku największej czułości hallotronu

$\sum_{i=1}^{n} u_{yi}$ – suma napięć pasożytniczych hallotronu.

Rozwijając czułość γ w szereg potęgowy względem indukcji B_z, wokół punktu $B_Z = 0$ i przy stałej temperaturze wnętrza hallotronu T, otrzymuje się

$$\gamma = \gamma_0(T)\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i B_z^i\right) \tag{6.2}$$

przy czym: $\gamma_0(T)$ – początkowa czułość iloczynowa hallotronu

$k_i(T)$ – współczynniki rozwinięcia czułości γ w szereg.

Drugi składnik w nawiasie wzoru (6.2) charakteryzuje nieliniowość hallotronów względem pola magnetycznego. Dla hallotronów pomiarowych wynosi ona zazwyczaj poniżej procenta w całym wykorzystywanym w praktyce metrologicznej zakresie indukcji, dla innych – nie przekracza kilku procent. Hallotron, jako czwórnik zasilany prądowo, można więc traktować w praktyce jako dość dokładny, analogowy czterokwadrantowy mnożnik wartości chwilowych dwu sygnałów, tj. prądu sterującego i_x i składowej indukcji pola magnetycznego B_z, Sygnały te mogą być różnymi funkcjami czasu. Wynik mnożenia obu sygnałów wejściowych halotronu nie zależy od ich częstotliwości w dużym zakresie, poczynając od prądu stałego (DC). Ograniczenia od góry pasm częstotliwościowych obu sygnałów B_z oraz i_x wynikają z wpływu zjawisk towarzyszących np. z indukcyjności obwodu wytwarzającego indukcję magnetyczną, z indukowanych przez zmiany indukcji prądów wirowych w płytce i napięć w obwodzie wyjściowym oraz z wpływu parametrów biernych układu współpracującego z hallotronem i z indukcyjności sprzęgającej jego obwód wejściowy i wyjściowy oraz z jego szczątkowych pojemności i innych zjawisk. Niektóre z tych wpływów dają się dość skutecznie skompensować [26].

Podstawowy sygnał wyjściowy rzeczywistego hallotronu występuje przy pomijalnych lub skompensowanych napięciach pasożytniczych. Może to być jego napięcie rozwarciowe u^{∞}_{yH} bądź robocze napięcie wyjściowe u_{yH} (lub prąd i_y) przy podanej przez producenta rezystancji obciążenia R_L, na przykład zapewniającej największą liniowość napięcia wyjściowego w określonym zakresie indukcji B_z [26]. Jako ***sygnał znamionowy*** przyjmuje się zazwyczaj jeden z iloczynów:

dla hallotronu nieobciążonego

$$\gamma_0^{\infty} B_z i_x \equiv u^{\infty}_{yH0} \tag{6.3a}$$

przy określonej rezystancji obciążenia R_L

$$\gamma_{Zn} B_z i_x \equiv u_{yHZn} \tag{6.3b}$$

W obu definicjach (6.3a,b), zamiast czułości γ_0, jako czułość znamionową γ_{Zn} stosuje się też inną jej wartość dla określonego zakresu B_z i obciążenia R_L, np. średnią $\gamma_{śr}$ otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów lub w inny sposób.

W rzeczywistych hallotronach, przy zmianie kierunku indukcji B na przeciwny napięcie wyjściowe nie tylko zmienia znak, ale i nieco różni się wartościami. Można więc w nim wydzielić dwie składowe, zależne od parzystych i nieparzystych potęg tej indukcji:

$$u_y \equiv u_{ya} + u_{ys} = \gamma B i_x \tag{6.4}$$

Składowe te spełniają następujące zależności

$$u_{ya}(-B) = -u_{ya}(B) \tag{6.4a}$$

$$u_{ys}(-B) = u_{ys}(B) \tag{6.4b}$$

Dominuje składowa nieparzysta u_{ya}, zmieniająca znak przy zmianie kierunku pola na przeciwny. Dlatego też można ją nazywać *składową niesymetryczną* sygnału wyjściowego. Jest ona właściwym napięciem Halla.

Napięcie u_{ys}, które nie zmienia znaku przy zmianie kierunku pola na przeciwny, jest *składową symetryczną* sygnału wyjściowego, zwykle znacznie mniejszą niż u_{ya}. Związane jest ono z niesymetrią geometryczną i niejednorodnościami hallotronu i pola magnetycznego **B** w obrębie hallotronu oraz ze zjawiskiem magnetorezystancyjnym.

Składowym tym odpowiada następujący podział czułości iloczynowej γ

$$\gamma = \gamma_a + \gamma_s \tag{6.5}$$

Na podstawie rozwinięcia napięcia u_y hallotronu w szereg względem indukcji B wg (6.2) otrzymuje się:

$$\gamma_a = \gamma_0(T)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} k_{2m} B_z^{2m}\right) \tag{6.5a}$$

oraz

$$\gamma_s = \gamma_0(T) \sum_{m=1}^{\infty} k_{2m-1} B_z^{2m-1} \tag{6.5b}$$

przy czym m – liczba naturalna.

Przy pomijalnie małych napięciach pasożytniczych, tj. gdy $\sum u_{yi} << \gamma B_z i_x$ oraz dla $B = B_z$ zachodzi:

$$u_{ya} = \gamma_a B i_x \equiv u_{yH} \tag{6.6a}$$

$$u_{ys} = \gamma_s B i_x \tag{6.6b}$$

W przedstawianych przez innych autorów wzorach na napięcie wyjściowe obciążonego hallotronu jako czwórnika nieodwracalnego, zrównoważonego początkowo dla $B = 0$, występuje tylko składowa u_{ya}. Zależność czułości γ_a tej składowej od indukcji pola magnetycznego B opisuje współczynnik G (patrz [26] – rozdz. 2 i 3) w postaci iloczynu dwu wyrażeń: zależnego od zmian rezystywności wraz z indukcją pola magnetycznego B oraz zależnego od kształtu i względnych wymiarów płytki i elektrod. Jego postać analityczna jest wyznaczona jedynie dla hallotronów z płytek półprzewodnikowych o dwu osiach symetrii (np. dla hallotronów prostokątnych lub krzyżowych) wykonanych z materiału izotropowego i jednorodnego oraz umieszczonych w równomiernym polu magnetycznym.

Zależności składowych $u_{ya}(B)$ i $u_{ys}(B)$ dla danego egzemplarza hallotronu można wyznaczyć eksperymentalnie, wykonując pomiary przy dwu kierunkach pola magnetycznego B.

Na podstawie zależności opisujących napięcia pasożytnicze [26] otrzymuje się następujący pełny wzór na napięcie wyjściowe nieobciążonego rzeczywistego hallotronu jako czwórnika:

$$u_y^{\infty} = \gamma_0^{\infty}(T) B_z i_x + \Delta u_{NL}^{\infty} + \sum_{i=1}^{n} u_{yi} \tag{6.7}$$

gdzie: $u_{yH0}^{\infty} = \gamma_0^{\infty}(T) B_z i_x$ (6.7a)

– sygnał znamionowy hallotronu nieobciążonego

$$\Delta u_{NL}^{\infty} = \left(\gamma_a^{\infty} - \gamma_0^{\infty} + \gamma_s^{\infty} \right) B_z i_x \tag{6.7b}$$

– składowa nieliniowa napięcia wyjściowego u_y^{∞}

$$\sum_{i=1}^{n} u_{yi} = r_0(T)\, i_x + S_0 \frac{\partial B_z}{\partial t} + M_0 \frac{\partial i_x}{\partial t} + u_{yT}\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{6.7c}$$

– suma napięć pasożytniczych.

Składowa Δu_{NL}^{∞} ujmuje łącznie zniekształcenia liniowości, nieparzyste $\left(\gamma_a^{\infty} - \gamma_0^{\infty} \right) B_z i_x$ i parzyste $\gamma_s^{\infty} B_z i_x$ względem indukcji B.

Główne napięcia pasożytnicze podane we wzorze (6.7c) to kolejno: napięcie asymetrii hallotronu, napięcie indukowane przez indukcję w obwodzie wyjściowym, napięcie ze sprzężenia magnetycznego obu obwodów oraz różnicowe napięcie termoelektryczne na wyjściu.

Wszystkie takie jak powyżej podane napięcia pasożytnicze mogą wystąpić w dowolnym elemencie przewodzącym prąd elektryczny i zanurzonym w zmiennym polu magnetycznym, którego elektrody wyjściowe nie znajdowały się na jednej linii ekwipotencjalnej, a ich wyprowadzenia wraz z obiektem tworzą pętle, przez które przenika pole zmienne – zewnętrzne bądź od prądów w obiekcie.

Właściwości nieodwracalne wynikają z prawa Lorenca i występują tylko w elementach, które podlegają zasadzie Onsagera [26]. Dla hallotronu umieszczonego w polu B i zasilanego prądem od strony wyjścia pojawia się na wejściu napięcie o przeciwnym kierunku, niż w układach odwracalnych, w

Tabela 6.1. Częstotliwość składowych napięcia wyjściowego u_y hallotronów przy różnych częstotliwościach prądu sterującego i_x i indukcji B
Table 6.1. Frequencies of components of Hall sensor output voltage for different frequencies of control current i_x and induction B

Lp.	Rodzaje przebiegów i_x, B w funkcji czasu	Sygnał podstawowy $u_{yH0} = \gamma_0 i_x B$	Napięcia od nieliniowości		Napięcia pasożytnicze				
			$u_{ya}-u_{yH0} = (\gamma_a-\gamma_0)Bi_x$	$u_{ys} = \gamma_s Bi_x$	$u_{yB} = S_0 \frac{\partial B}{\partial t}$	$u_{yo} = r_0 i_x$	u_{yT}	$u_{yw} = k_w i_x^2$	$u_{yM} = M_0 \frac{\partial i_x}{\partial t}$
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	$i_x = I_x (\omega_1 = 0)$ $B = B (\omega_2 = 0)$	0	0	0	–	0	0	0	–
2	$i_x = I_{x\,max} \sin \omega_1 t$ $B = B (\omega_2 = 0)$	ω_1	ω_1	ω_1	–	ω_1	0	$2\omega_1$	ω_1
3	$i_x = I_x (\omega_1 = 0)$ $B = B_{max} \sin \omega_2 t$	ω_2	ω_2 $3\omega_2$ ...	0 $2\omega_2$ ...	ω_2	0	0	0	–
4	$i_x = I_{max} \sin \omega_1 t$ $B = B_{max} \sin \omega_1 t$ $\omega_2 = \omega_1$	0 $2\omega_1$	0 $2\omega_1$ ...	ω_1 $3\omega_1$ ...	ω_1	ω_1	0	$2\omega_1$ 0	ω_1
5	$i_x = I_{x\,max} \sin \omega_1 t$ $B = B_{max} \sin \omega_2 t$ $(\omega_2 \neq \omega_1)$	$\omega_1-\omega_2$ $\omega_1+\omega_2$ ...	$\omega_1-3\omega_2$ $\omega_1+3\omega_2$ ...	ω_1 $\omega_1-2\omega_2$ $\omega_1+2\omega_2$ ...	ω_2	ω_1	0	$2\omega_1$ 0	ω_1

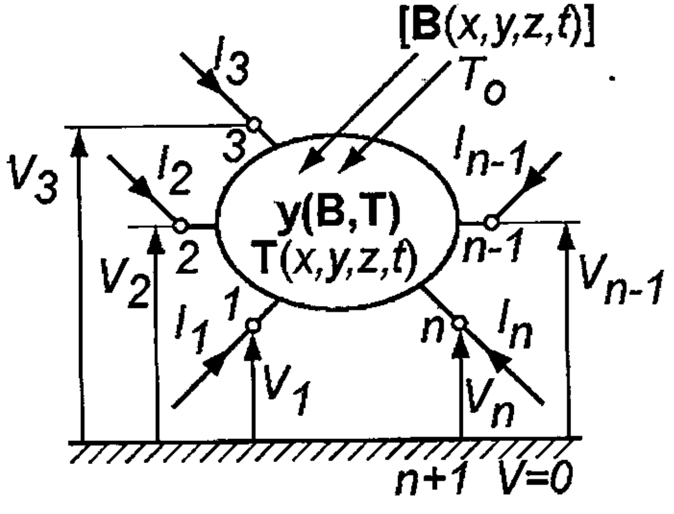
których obowiązuje zasada wzajemności, np. dla mostków składających się z magnetorezystorów. Przejawia się to w tym, że rezystancja wejściowa hallotronu w polu B wzrasta wraz z prądem obciążenia, natomiast dla niezrównoważonego mostka przy obciążaniu maleje.

Wszystkie składniki wzorów (6.7a-c) zależne od wartości chwilowej prądu i_x, są względem tego prądu nieparzyste. Napięcia indukowane przez indukcję lub przez prąd mają tę samą częstotliwość jak one i nie pojawiają się, gdy wielkości te nie zmieniają się w czasie (DC). Częstotliwości napięć występujących na wyjściu hallotronu podano w tabeli 6.1. Przy sygnałach wejściowych o różnej częstotliwości podstawowy sygnał na wyjściu ma dwie składowe o częstotliwościach równych ich sumie i różnicy. Jest to najkorzystniejsza sytuacja z punktu widzenia eliminacji sygnałów pasożytniczych o innych częstotliwościach. Jeśli częstotliwości obu sygnałów wejściowych są takie same, to sygnał wyjściowy ma składową stałą. Wykorzystuje się to m.in. w hallotronowych przetwornikach do pomiaru mocy czynnej.

Składowe czułości hallotronu i dwa napięcia pasożytnicze są też funkcją temperatury T jego wnętrza. Jest ona większa od temperatury otoczenia T_o o przyrost ΔT zależny od mocy $P_x = I_x^2 R_x$ wydzielanej w hallotronie przez prąd o wartość skutecznej I_x oraz od współczynnika chłodzenia obudowy i warunków otoczenia wg wzoru: $T = T_0 + \Delta T(P_x)$.

6.2. Macierz admitancyjna i schematy zastępcze liniowego n-końcówkowego układu hallotronowego

Zostaną teraz omówione ogólne zależności, występujące w hallotronie lub układzie hallotronowym 4T jako elemencie na który oddziałują pola dwu wielkości: indukcji B i temperatury T. Zjawiska galwanomagnetyczne przebiegają bez poboru energii z wywołującego je pola magnetycznego, gdyż element galwanomagnetyczny czerpie całą energię z obwodu zasilającego. Gdy ponadto pomijalny jest wpływ grzania własnego (ciepła Joule'a od prądów płynących w elemencie) i wpływ własnego pola magnetycznego, to wówczas napięcia między końcówkami elementu galwanomagnetycznego są liniowo zależne od prądów tych końcówek i ponadto zależą od wartości i rozkładu indukcji pola magnetycznego B oraz od temperatury otoczenia T_o. Z punktu widzenia teorii układów elektrycznych każdy element galwanomagnetyczny stanowi więc bierny i liniowy układ sterowany polem magnetycznym o parametrach zależnych też od drugiej wielkości – temperatury T wnętrza hallotronu. Jest to przypadek szczególny dowolnego układu liniowego z n końcówkami, przedstawiony na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Ogólny schemat liniowego układu galwanomagnetycznego

Fig. 6.1. Generalized scheme of the linear galvanomagnetic circuit

Taki liniowy układ odosobniony z n końcówkami i o parametrach skupionych (gdy długość fali przebiegu elektrycznego jest znacznie większa niż wymiary geometryczne elementów układu) można opisać następującym równaniem macierzowym w postaci admitancyjnej:

$$\mathbf{I} = \mathbf{y}(B, T) \cdot \mathbf{V} \tag{6.8}$$

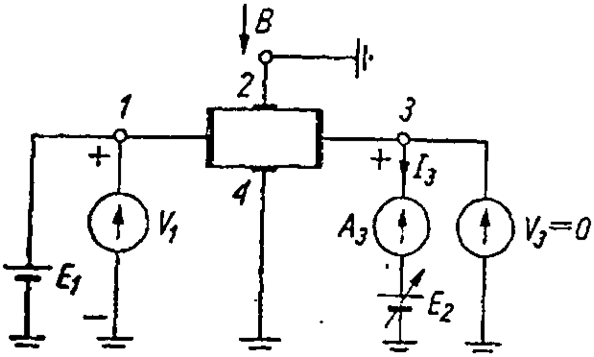
w którym:

I – macierz kolumnowa prądów wpływających do układu przez jego końcówki

y – macierz admitancyjna nieoznaczona, w której suma elementów w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest równa zeru (wynika to z praw Kirchoffa dla układu jako całości)

V – macierz kolumnowa różnic potencjałów między każdą z końcówek a punktem odizolowanym od układu o potencjale przyjętym umownie za 0.

Macierz y ma wymiary n × n, a jej elementy oznacza się jako y_{jk}. Zjawiska galwanomagnetyczne przejawiają się jako zależność elementów tej macierzy od indukcji magnetycznej pola B, przy czym dla $B \neq 0$ elementy symetryczne względem głównej przekątnej są różne, tj. $y_{kj}(B) \neq y_{jk}(B)$. Oznacza to, że w układach opisanych macierzą y nie obowiązuje zasada wzajemności. Wartości elementów tej macierzy można określić za pomocą pomiarów.



Rys. 6.2. Pomiar parametru y_{31} macierzy y hallotronu (spadek napięcia na rezystancji amperomierza jest skompensowany przez E_2).
Fig. 6.2. Measurement of the y_{31} element of Hall sensor matrix (voltage drop on ampermeter resistance is eliminated by E_2).

Jako przykład na rys. 6.2 pokazano metodę pomiaru y_{31} dla hallotronu przy prądzie stałym z amperomierzem A_3 o niepomijalnej rezystancji wewnętrznej. Pomocnicze regulowane źródło E_2 służy do wytworzenia na jego rezystancji napięcia przeciwnego niż pochodzące od prądu z układu. Woltomierz V_3 wskaże wówczas 0. Przy takiej kompensacji końcówka 3 ma potencjał 0. Odpowiada to włączeniu idealnego amperomierza, który mierzy prąd I_3 przy potencjałach V_2, V_3, V_4 równych zeru. Jeśli dysponuje się przyrządem z przetwornikiem prądu o równej zeru rezystancji wejściowej (ze wzmacniaczem operacyjnym i bez bocznika na wejściu), to woltomierz V_3 nie jest potrzebny. Wartość elementu y_{jk}, np. y_{31} wg rys. 6.2, określa wzór:

$$y_{31}(\mathrm{B}) = \left.\frac{-I_3}{E_1}\right|_{\substack{V_2=0\\ V_3=0\\ V_4=0}} \tag{6.8a}$$

Przy pomiarze y_{13} końcówki 1 i 3 należy zamienić miejscami. Taką parę pomiarów należy wykonać dla każdej wybranej wartości indukcji pola B.

Macierz y można też przedstawić jako sumę dwóch macierzy: symetrycznej **g** i antysymetrycznej **β** jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\beta} \tag{6.9}$$

Elementy macierzy **g** i **β** określa się następująco:

$$g_{jk} = \frac{1}{2}\left(y_{jk} + y_{kj}\right) \tag{6.9a}$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{2}\left(y_{jk} - y_{kj}\right) \tag{6.9b}$$

przy: $j \in (1, n)$, $k \in (1, n)$

Dla elementów na głównych przekątnych obu macierzy składowych, tj. gdy $k = j$, otrzymuje się

$$g_{jj} = y_{jj} \tag{6.9c}$$

$$\beta_{jj} = 0 \tag{6.9d}$$

Ze wzoru (6.9a) wynika, że elementy macierzy **g** rozmieszczone symetrycznie względem głównej przekątnej są jednakowe. Macierzy tej odpowiada układ elektryczny odwracalny, którego schematem zastępczym jest układ o n wierzchołkach, składający się z n(n - 1)/2 gałęzi o admitancjach $Y_{jk} = Y_{kj} = -g_{jk}$ (dla $k \neq j$) połączonych w wielobok zupełny. Przy prądzie stałym dla hallotronu w szerokim zakresie częstotliwości są to konduktancje.

Konsekwencją zmian składowych tensora rezystywności elementów galwanomagnetycznych w polu magnetycznym według zasady Onsagera jest to, że macierz niesymetryczna **β** składa się tylko z elementów rzeczywistych β_{jk} rozmieszczonych parami symetrycznie względem głównej przekątnej. Pary te są co do modułu jednakowe, lecz mają przeciwne znaki. Każdej takiej parze można przyporządkować trzykońcówkowy nieodwracalny element obwodu stanowiący liniowy bezstratny czwórnik zwany żyratorem o schemacie podanym rys. 1.3b. Dla dowolnego układu hallotronowego 4T otrzymuje się w ogólnym wypadku układ czworoboku zupełnego z trzema żyratorami, taki jak przedstawiony na rys. 1.4. Wszystkie elementy obu macierzy składowych zależą różnie od pól wielkości obu wpływających, tj. od pola indukcji magnetycznej B i pola temperatury T.

6.3. Pełne schematy zastępcze hallotronów czterozaciskowych

Do symulacji pracy hallotronu jako układu czterokońcówkowego (4T) należy znać postacie macierzy symetrycznej **g** i niesymetrycznej **β** opisujące go przy dowolnej indukcji B^{I}, oraz odpowiadające tym macierzom schematy zastępcze. Przy podziale macierzy admitancyjnej **y** na składowe według wzoru (6.9) admitancje Y_{jk} mogą być tylko parzystymi funkcjami indukcji magnetycznej B, a konduktancje żyracji β_{jk} – tylko nieparzystymi funkcjami tej indukcji. Przy dowolnym, lecz stacjonarnym w płaszczyźnie płytki hallotronu, rozkładzie pola magnetycznego B zachodzą zależności:

$$Y_{jk}(B) = Y_{jk}(-B) \tag{6.10a}$$

$$\beta_{jk}(B) = -\beta_{jk}(-B) \tag{6.10b}$$

W rzeczywistych hallotronach wpływ składowych urojonych ich admitancji Y_{jk} (wskutek szczątkowych indukcyjności i pojemności) jest praktycznie niemal zawsze pomijalny i to nawet przy dosyć dużych częstotliwościach. Można więc przyjąć, że:

$$Y_{jk}(B) \rightarrow G_{jk}(B) \tag{6.10c}$$

gdzie: $G_{jk}(B)$ – konduktancje schematu zastępczego hallotronu przy prądzie stałym i indukcji B.

Dla układu 4T pasywnego SLS (stacjonarnego liniowego skupionego) otrzymuje się następującą macierz nieoznaczoną **g**:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} G_{12}+G_{13}+G_{14} & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ -G_{12} & G_{12}+G_{23}+G_{24} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{13} & -G_{23} & G_{13}+G_{23}+G_{34} & -G_{34} \\ -G_{14} & -G_{24} & -G_{34} & G_{14}+G_{24}+G_{34} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Admitancje żyracji β_{jk} hallotronów są rzeczywiste w szerokim zakresie częstotliwości, tj. są konduktancjami [26].

[1] dla klarowności rozważań i uproszczenia wzorów, w dalszych rozważaniach można założyć, że pole magnetyczne B i pole temperatury T są równomierne w rozpatrywanym hallotronie lub układzie, chociaż nie jest to warunek konieczny.

Dla rzeczywistych hallotronów w słabych i średnich polach magnetycznych można założyć, że są spełnione następujące zależności:

$$y_{31}(B) = y_{13}(B) \qquad y_{24}(B) = y_{42}(B) \tag{6.12}$$

Dopuszczalność takiego założenia w szerokim zakresie indukcji B stosowanych w praktyce technicznej została potwierdzona doświadczalnie z wystarczająco dużą dokładnością m.in. we wcześniejszych pracach autora i następnie doktoracie Galińskiego [26]. Wówczas $\beta_{12} = 0$ oraz $\beta_{24} = 0$ i z równej zeru sumy elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy nieoznaczonej $\boldsymbol{\beta}$ wynika jej następująca postać

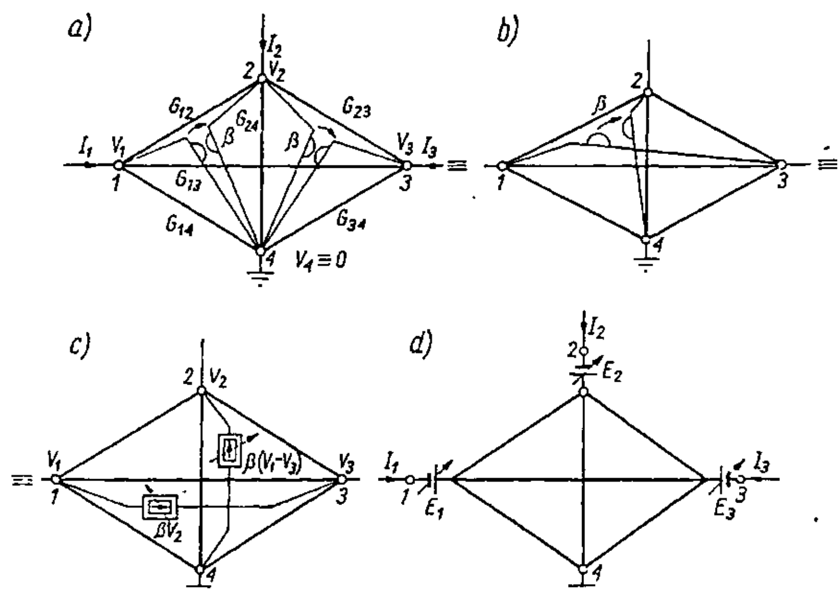
$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & -\beta \\ -\beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

Przy uziemieniu któregoś węzła, skreśla się jego wiersz i kolumnę w macierzy nieoznaczonej. Gdy jest to np. czwarty węzeł, otrzymuje się następującą macierz niesymetryczną

$$\boldsymbol{\beta}_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{6.13a}$$

Macierzy $\boldsymbol{\beta}$ odpowiadają dwa żyratory trzykońcówkowe o jednakowych konduktancjach żyracji β lub jeden żyrator czterokońcówkowy o niepołączonych ze sobą obwodach wejściowym i wyjściowym. Stąd wynika schemat zastępczy hallotronu dla macierzy $\mathbf{y} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\beta}$. Ma on postać układu z dwoma żyratorami jak na rys. 6.3a bądź z jednym żyratorem o niepołączonych ze sobą obwodach – rys. 6.3b [26]. Przewodności oznaczono tu liniami ciągłymi.

Zamiast żyratorów można też zastosować prądowe źródła sterowane i przekształcić schemat do postaci z rys. 6.3c. Natomiast po przedstawieniu w



Rys.6.3. Schematy zastępcze hallotronu czterokońcówkowego w małych i średnich polach magnetycznych

Fig. 6.3. Equivalent schemes of Hall devices in small and medium magnetic fields

podobny sposób macierzy odwrotnej $(\mathbf{y}_4^4)^{-1}$ jako sumy dwóch macierzy i po wprowadzeniu napięciowych źródeł sterowanych otrzymuje się schemat podany na rys. 6.3d. Obowiązują w nim następujące zależności:

$$
\begin{aligned}
&E_2 = E_{24} = \gamma_a B \frac{I_1 - I_3}{2} \\
&E_1 - E_3 = E_{13} = \gamma_a B \frac{I_2 - I_4}{2} = \gamma_a B \left(I_2 + \frac{I_1 + I_3}{2} \right)
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

w których: γ_a – składowa niesymetryczna czułości hallotronu – wzór (7.2a).

Napięcia źródłowe E_1, E_2, E_3 zmieniają znak zarówno przy równoczesnej zmianie kierunków prądów w każdym ze wzorów (6.14) na przeciwne, jak i przy zmianie kierunku indukcji B na przeciwny. Jedynie przy $B = 0$ konduktancje układu z rys. 6.3d są takie same, jak dla pozostałych układów z tego rysunku.

Obliczenie wartości parametrów obu tych schematów wymagałoby w ogólnym przypadku rozwiązania dla każdej wartości indukcji B układu aż 7 niezależnych równań otrzymanych na podstawie wyników pomiaru współczynników y_{jk}. Dla bardzo małych pól magnetycznych przewodności G_{jk}, β nie zależą w praktyce od wartości indukcji B i układ równań wystarczyłoby rozwiązać tylko jeden raz. Nawet w tym przypadku byłoby to dosyć uciążliwe w praktyce, a ponadto, gdy przyrosty rezystancji schematu zastępczego wywołane głównymi oddziałującymi wielkościami, tj. indukcją B i temperaturą, różnią się niewiele, wtedy dotychczas stosowane metody, oparte na osobnych pomiarach wartości każdej z admitancji, wskutek operacji odejmowania, prowadzą do dużych błędów przy określaniu małych zmian tych parametrów.

Parametry hallotronu mierzy się zazwyczaj tylko przy jego pracy jako czwórnika, a pełne jego schematy zastępcze jako układu 4T mogą służyć do rozważań jakościowych w innych rodzajach ich pracy, np. do wyboru układu kompensacji zera skutecznego w szerokim zakresie zmian temperatury i indukcji oraz wyjaśnienia kształtu przebiegu napięcia niezrównoważenia.

Zależność elementów macierzy **g** i **β** od temperatury T jest inna niż od indukcji B. Otrzymuje się:

$$g_{jk}(T) = g_{kj}(T) = -Y_{jk}(T) \tag{6.15a}$$

$$\beta_{kj}(T) = -\beta_{jk}(T) \tag{6.15b}$$

Wszystkie składniki rozwinięcia w szereg potęgowy zależności tych elementów od temperatury, np. wokół temperatury znamionowej, wpływają tu w podobny sposób – wraz z ich znakami.

Przeanalizujmy zachowanie się hallotronu gdy zmiany konduktancji G_{jk} są parzystymi funkcjami indukcji B oraz zależą od temperatury T, oddzielnie lub równocześnie.

Zakres zastosowania schematów zastępczych można rozszerzyć uzależniając przyrosty ich konduktancji nie tylko od indukcji pola magnetycznego B, lecz także od temperatury otoczenia i wartości prądów w hallotronie (zjawiska nieliniowe wywołane np. grzaniem własnym i nierównomiernym chłodzeniem, które powodują powstanie gradientów temperatury i lokalnych zmian konduktywności). Napięcia termoelektryczne wymagają włączenia w układzie dodatkowych źródeł napięcia U_{yT}, a napięcie indukowane U_{yB} – źródła napięcia zmiennego $S_0 \frac{dB}{dt}$. Sprzężenie między obwodami sterującym i wyjściowym można uwzględnić, włączając indukcyjność wzajemną M_0 z dopuszczalnym uproszczeniem, że sprzęgają się tylko obwody 24 i 13 (patrz rys. 6.8a i 6.9c).

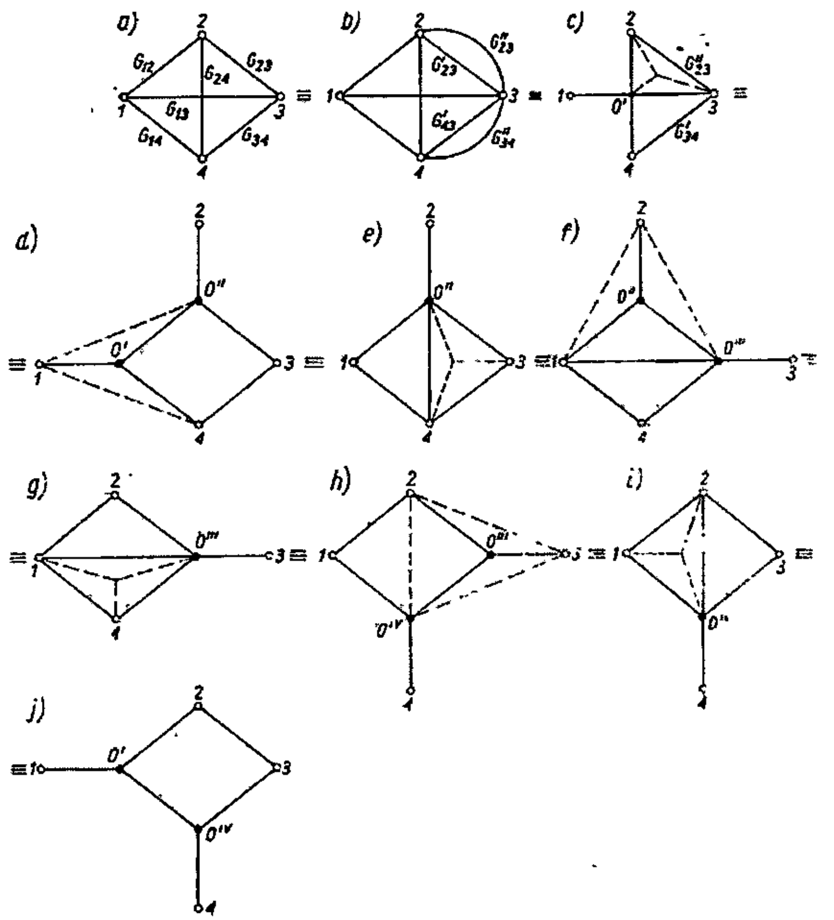
Korzystając ze schematów na rys. 6.3 i 6.4 i uwzględniając główne napięcia pasożytnicze otrzymuje się schematy zastępcze hallotronu jako układu 4T, które proponuje się nazywać *schematami pełnymi*. Na przykład planarny schemat zastępczy dla hallotronu przy prądzie stałym podano na rys. 6.5. Schemat ten jest dogodny do interpretacji zachodzących w hallotronie zjawisk fizycznych i umożliwia wyciągnięcie szeregu wniosków. I tak składowa napięcia wyjściowego $U_{ys}(B)$ parzysta względem indukcji B — wzór (6.1b), jest równa zeru, gdy mostek wewnętrzny o wierzchołkach 1, 2, 3, 4 pozostaje w równowadze, tj. gdy jego rezystancje spełniają warunek

$$\frac{r_{12}(B,T)}{r_{14}(B,T)}=\frac{r_{23}(B,T)}{r_{34}(B,T)}$$

Dwójniki o konduktancjach G_{jk} tworzą układ w postaci czworoboku zupełnego, narysowanego na rys. 6.4 liniami ciągłymi pogrubionymi. Czworoboku tego (rys. 6.4a) wewnątrz powierzchni ograniczonej jego końcówkami nie udaje się przedstawić jako układu planarnego (układu bez przecięć). Aby osiągnąć tak rozumianą planarność, należy zmienić strukturę topologiczną sieci, tj. dokonać jej transfiguracji, zachowując przy tym taką samą liczbę końcówek układu oraz wartości prądów i napięć. W ogólnym przypadku czworoboku zupełnego nie udaje się bezpośrednio przekształcić w gwiazdę czteroramienną. Przekształcenie takie wymaga spełnienia dodatkowego warunku (1.10), aby iloczyny par rezystancji dwójników niełączących się ze sobą bezpośrednio były sobie równe. Dla przewodności można to zapisać jako następującą równość podwójną:

$$G_{12}\,G_{34}=G_{13}\,G_{24}=G_{14}\,G_{23}$$

Taka podwójna zależność w hallotronach jednak w ogólnym przypadku nie zachodzi. We wszystkich obecnie produkowanych hallotronach najmniejszy jest środkowy z tych iloczynów przewodności (największy iloczyn dla rezystancji) [26]. Dwie konduktancje, tj. po jednej wziętej dowolnie z każdego z pozostałych iloczynów, np. G_{23} oraz G_{34}, można przedstawić jako dwie gałęzie połączone równolegle (rys. 6.4b) i tak dobrane, że G'_{23} i G'_{34} łącznie z pozostałymi konduktancjami spełniają ten warunek. Po transfiguracji tego nowego. czworoboku w gwiazdę czteroramienną otrzymuje się schemat płaski przedstawiony na rys. 6.4c. Po dokonaniu w nim dalszych transfiguracji trójkąt – gwiazda otrzymuje się schematy jak na rys. 6.6d – j. Wzory do obliczeń wartości elementów transfiguracji n-ramienna gwiazda – wielobok zupełny



Rys. 6.4. Struktury układów części odwracalnej schematu zastępczego hallotronu jako układu 4T

Fig. 6.4. Structures of the reciprocal part of the Hall device equivalent 4T circuit

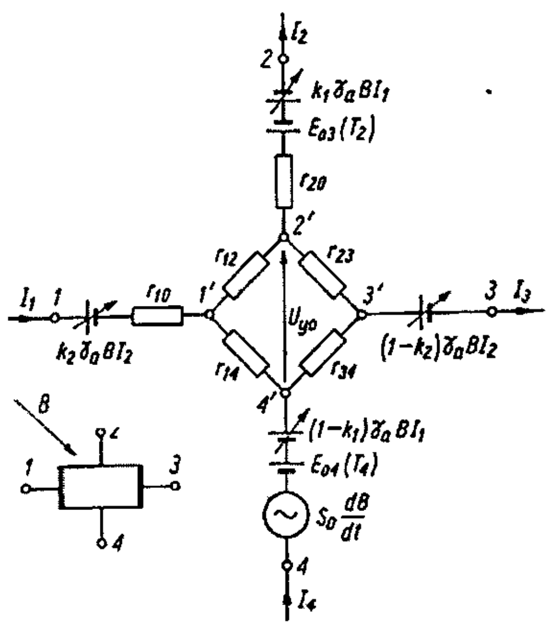
trudno jest znaleźć w najnowszej literaturze z teorii obwodów, występują jedynie w klasycznym dziale z elektrotechniki teoretycznej [74].

Liniowy układ czterokońcówkowy zbudowany z większej liczby elementów odwracalnych daje się w wyniku przekształceń zawsze sprowadzić do każdego ze schematów podanych na rys. 6.4 lub do ich przypadków szczególnych. Dla każdego egzemplarza hallotronu wszystkie wartości elementów schematu zastępczego są określone, lecz w ogólnym przypadku – różne. Konduktancjom schematu zastępczego nie należy jednoznacznie przyporządkowywać jakiejś części hallotronu, gdyż rezystywność w każdym punkcie płytki wpływa na wartości wszystkich elementów schematu zastępczego z określoną wagą. Niemniej jednak można intuicyjnie założyć, że największy udział w każdej z tych wartości ma odpowiadająca jej geometrycznie część płytki. Warunkiem wystarczającym, by w napięciu wyjściowym hallotronu nie zjawiła się składowa parzysta względem indukcji B, jest istnienie dla przyrostów względnych konduktancji w jego schemacie zastępczym przynajmniej jednej osi symetrii dla przyrostów względnych konduktancji w jego schemacie zastępczym przynajmniej jednej osi symetrii – patrz np. wzór (7.11). Ze wzoru (6.15) wynika też, że na wyjściu hallotronu nie pojawi się dodatkowe napięcie, gdy przyrosty rezystancji schematu zastępczego wywołane innymi przyczynami (jak grzanie własne czy zmiany rozkładu pola temperatury zewnętrznej T_a) mają przynajmniej jedną oś symetrii.

Schematy zastępcze umożliwiają też interpretację i analizę większości zjawisk pasożytniczych towarzyszących zjawisku Halla. I tak, np. napięcie nierównowagi mostka z rys. 6.5 to rezystancyjne napięcie asymetrii U_{y0}. Ze schematu wynika, że zależy ono od rezystancji, które z kolei są funkcjami wartości i rozkładu przestrzennego indukcji pola magnetycznego i temperatury. Na podstawie schematu zastępczego można również analizować wyniki współpracy kilku hallotronów (przejawiające się we wzajemnym obciążaniu się hallotronów) przy różnych sposobach ich łączenia. Ze schematu na rys. 6.5 wynika też, że zmiany względne rezystancji wyjściowej i rezystancji wejściowej hallotronu w funkcji pola magnetycznego lub temperatury mogą być niejednakowe nawet dla hallotronów o dwóch osiach symetrii, ze względu na występowanie rezystancji r_{10}, r_{20}.

Wartości rezystancji i współczynników żyracji występujące w schematach zastępczych dla danego egzemplarza hallotronu można wyznaczyć na podstawie pomiarów konduktancji każdej pary jego końcówek przy zwarciu pozostałych, tj. metodą jak na rys. 6.,2 bądź przez pomiary impedancji wyjściowych dla stanu rozwarcia pozostałych końcówek i odpowiednie przekształcenia macierzowe. Postępowanie takie jest bardzo żmudne zarówno ze względu na obliczenia, jak i na kłopoty przy wykonywaniu pomiarów, gdyż trzeba zmierzyć bardzo dokładnie wartości elementów macierzy w warunkach pracy hallotronu w polu magnetycznym i przy stałej jego temperaturze.

Dokładniejsze wyniki otrzymuje się na podstawie pomiarów rezystancji wejściowej, rezystancji wyjściowej i napięć między końcówkami hallotronu dla dwu kierunków prądu i indukcji. W zasadzie jednak pełne schematy zastępcze



Rys. 6.5. Planarny schemat zastępczy hallotronu jako układu 4T przy stałych prądach zasilających z uwzględnieniem obu napięć Halla i napięć pasożytniczych (przy $I_1 = I_3$ oraz $I_2 = I_4$)
Fig. 6.5. Planar equivalent scheme of Hall device as 4T circuit for DC supplied currents including Hall voltage and distortion voltages (when $I_1 = I_3$ and $I_2 = I_4$)

są przydatne przede wszystkim do rozważań jakościowych przy analizie skuteczności układów kompensacji napięć pasożytniczych – patrz p. 7.2 w [26].

6.4. Uproszczone schematy zastępcze hallotronów

W praktyce korzysta się często z uproszczonych schematów zastępczych hallotronu. Gdy nie ma potrzeby uwzględniania wszystkich parametrów macierzy hallotronu, jest to dogodniejsze i daje zadowalające wyniki. Schematy uproszczone tworzy się także, gdy brakuje dostatecznej liczby danych pomiarowych do utworzenia schematu pełnego.

6.4.1. Schematy zastępcze z pięcioma rezystorami

Na rys. 6.6 podano dwa przykłady uproszczonych schematów zastępczych hallotronu, jako układu 4T, zawierających po pięć rezystorów.

Wyznaczmy wartości ich elementów gdy są dane jedynie następujące wielkości: I_{13}, $R_x(B)$, $R_y(B)$, $U_{24}\{\pm B\}$, $U_{12}\{\pm B\}$, $R_{12}\{\pm B\}$ otrzymane z pomiarów przy prądzie stałym oraz indukcyjność M_0 otrzymana z pomiarów przy prądzie przemiennym lub w stanach przejściowych. Napięcia $U_{24}(\pm B)$ i $U_{12}(\pm B)$ zmierzono przy zasilaniu hallotronu prądem I_{13} przy nieobciążonych końcówkach 2, 4 i przy dwu kierunkach indukcji B. Na podstawie tych danych najłatwiej można otrzymać elementy schematu przedstawionego na rys. 6.6a według następujących zależności:

$$\gamma_a = \frac{U_{24}(+B)-U_{24}(-B)}{2I_{13}B}$$

$$k'\gamma_a = \frac{U_{12}(+B)-U_{12}(-B)}{2I_{13}B} \qquad (6.16a)$$

$$r_0(B) = \frac{U_{24}(+B)+U_{24}(-B)}{2I_{13}}$$

$$r_1(B) = \frac{U_{12}(+B)+U_{12}(-B)}{2I_{13}}$$

$$r_2(B) = R_{12}(B) - r_1(B) \qquad (6.16b)$$

$$r_3(B) = R_x(B) - r_1(B) - r_0(B)$$

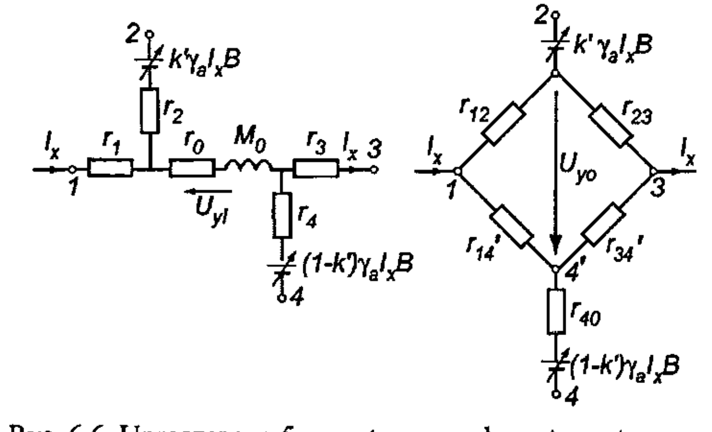
$$r_4(B) = R_y(B) - r_2(B) - r_0(B)$$

Pojawia się tu pytanie, kiedy nie można stosować uproszczonego schematu z rys. 6.6a. Należy zauważyć, że zwieranie końcówek 3, 4 nie wpływa na napięcie U_{12} między końcówkami 1, 2 i na odwrót. Taki wpływ występuje w rzeczywistym hallotronie. W danych początkowych brakowało rezystancji między końcówką 4, a którąś z końcówek 1, 3. Schematu nie można więc stosować, gdy poza hallotronem istnieje inne galwaniczne połączenie między końcówką 4 a przynajmniej jedną z elektrod prądowych. Schemat ten nie uwzględnia też ani tzw. wtórnego zjawiska Halla (powstawanie napięcia Halla w obwodzie wejściowym hallotronu w wyniku współdziałania pola B z prądem wyjściowym I_y), ani napięcia U_{yB} indukowanego przez indukcję B. Zjawisko wtórne można uwzględnić przez dwa źródła napięciowe sterowane prądem I_y (jak w schemacie z rys. 6.5) lub przez dwa dodatkowe przyrosty rezystancji, które dla obciążenia R_L wynoszą:

$$\Delta r_1 = k_2'' \frac{(\gamma_a B)^2}{R_L + R_y} \; ; \qquad \Delta r_3 = (1-k_2'') \frac{(\gamma_a B)^2}{R_L + R_y}$$

Należy je włączyć w szereg z rezystancjami r_1 i r_3 z rys. 6.6a.

Jeśli zamiast $R_{12}(B)$ jako parametr wejściowy będzie dane napięcie $U_{21}(\pm B)$ występujące przy prądzie $I_{24} \neq 0$, gdy $I_1 = 0$, wówczas obliczona na tej (6.14) można otrzymać ujemną wartość rezystancji r_0. Odpowiada to zamianie



Rys. 6.6. Uproszczone 5-rezystorowe schematy zastępcze hallotronów: a) układ dwugwiazdowy, b) układ mostkowy.
Fig. 6.6. Simplified 5- resistors schemes of Hall device a) two-stars circuit, b) bridge circuit.

znaku napięcia asymetrii na zaciskach 2 i 4. Sprzężenie magnetyczne między obwodami uwzględnia się przez indukcyjność M_0 włączoną szeregowo z rezystancją r_o. Schemat z rys. 6.6a nie umożliwia pełnej interpretacji zjawisk w polach nierównomiernych poprzecznie do kierunku prądu I_x. Trudności tych pozwala uniknąć schemat mostkowy z rys. 6.6b. Przy tych samych danych wejściowych z pomiarów co poprzednio, jego elementy można wyznaczyć w podobny sposób. Rezystancje górnych i dolnych gałęzi mostka mają podobny poziom. Daje on poprawne wyniki, gdy zasilanie jest prądowe lub zbliżone. Schematy z rys. 6.6a i b mają też jeszcze po kilka równoważnych im układów, które można otrzymać za pomocą transfiguracji trójkąt -gwiazda. Na przykład gwiazdę rezystancji $r_{14'}$, $r_{34'}$, r_{40} z rys. 6.6b można przekształcić w trójkąt, otrzymując mostek z przekątną r_{13}. Przy pracy czwórnikowej wystarcza mostek czterogałęziowy ($r_{40} = 0$). Napięcia Halla odwzorowują dwa napięciowe źródła sterowane w obwodzie wyjściowym. Jeśli rezystancje wejściowe hallotronu R_X, R_Y znacznie różnią się od siebie, to mostek ten ma istotnie różniące się też wartości rezystancji gałęzi. Gdy dane są tylko rezystancje R_x, R_y hallotronu przy indukcji $B = 0$, wówczas dla wyznaczenia rezystancji początkowych mostka z rys. 6.6b w równowadze (napięcie $u_0 = 0$) trzeba założyć nie tylko określoną wartość rezystancji r_{40}, np $r_{40} = 0$, ale jeszcze i rezystancję jednego z ramion mostka. Przy tych założeniach ze wzorów (2.15a,b) można wyznaczyć jego pozostałe rezystancje mostka.

Przykład

Przy $R_{xo}=2R_{yo}=10\Omega$ ze wzorów (2.16a,b) wynika, że dla $r_{12}=5\Omega$ oraz $r_{12}=10\Omega$ nie ma rozwiązań.

Przy $r_{12}=20\Omega$ otrzymuje się $r_{23}=10\Omega/3$, $r_{14}=15\Omega$ oraz $r_{43}=2{,}5\Omega$.

Przy $R_x=R_y=0{,}5r_{12}$ otrzymuje się $r_{12}=r_{14}=0{,}5r_{12}$, $r_{43}=2{,}5r_{12}$.

Natomiast przy $R_{xo}=R_{yo}=r_{12}$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań powiązanych zależnością $r_{23}r_{14}=R_{xo}^2$, w tym mostek podwójnie symetryczny, tj. o jednakowych rezystancjach gałęzi równych R_{xo}.

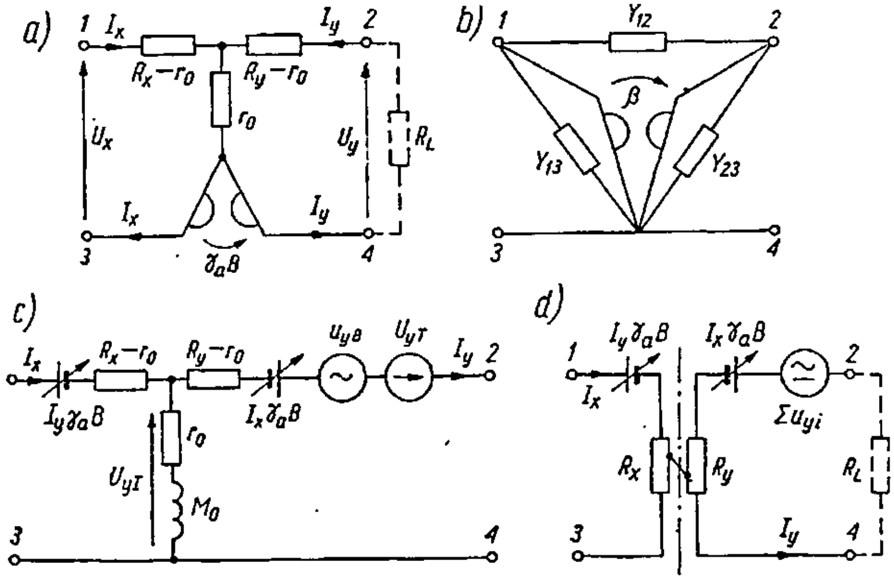
Dla obu powyższych danych odbiega to znacznie od intuicyjnego schematu mostka symetrycznego zastępującego jednorodną izotropową płytkę prostokątną. Dla uzyskania w schemacie zastępczym takiego mostka musi istnieć w obwodzie prądowym lub napięciowym rezystancja szeregowa. Dla uzyskania symetrii można podzielić ją nadmiarowo na dwie umieszczone przy obu zaciskach obwodu zewnętrznego.

Natomiast dla układu z rys. 6.6a, przy $u_y=0$ i danych jak poprzednio tylko R_X, R_Y otrzymuje się $r_0=0$ i krzyż o takich jak R_x R_y sumach rezystancji ramion naprzeciwległych. Do określenia wartości poszczególnych ramion i rezystancji sterującej źródła należy zmierzyć napięcia pomiędzy różnymi zaciskami przy dwu kierunkach pola B.

6.4.2. Schematy zastępcze w postaci czwórników i dwójników

Jeżeli w całym układzie współpracującym z hallotronem nie ma połączeń bocznych między obwodem wyjściowym a obwodem wejściowym hallotronu (lub jeżeli hallotron jest rozważany łącznie z przyłączonymi doń układami do kompensacji napięć pasożytniczych), to prądy końcówek łączących go z układem współpracującym spełniają warunki $I_3=-I_1$, $I_4=-I_2$. Hallotron można wówczas traktować jako nieodwracalny czwórnik liniowy pasywny o parametrach czysto rezystancyjnych. Jeśli przez i_y oznaczy się prąd wypływający z hallotronu, a pasożytnicze napięcia indukowane i termoelektryczne są pomijalne, to w szerokim zakresie częstotliwości opisuje go równanie macierzowe o postaci impedancyjnej

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(B) & r_0+\gamma^{\infty}B \\ -r_0+\gamma^{\infty}B & R_y(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} \tag{6.17}$$



Rys. 6.7. Schematy zastępcze hallotronu jako czwórnika

Fig. 6.7. Equivalent schemes of Hall device as two-port

Taką macierz impedancyjną ma układ w postaci czwórnika z jednym żyratorem o rezystancji żyracji γB i rezystancji asymetrii r_0, przedstawiony na rys. 6.7a. Schemat ten można też otrzymać przekształcając układ z rys. 6.3d. Warto zauważyć, że przy zasilaniu tylko od strony zacisków 1 i 3 oraz gdy $u_{yB} = 0$ i $U_{yT} = 0$, napięcie wyjściowe $U_y = 0$, gdy $r_0 = \gamma_a B$, tj. dla takiej indukcji, gdy napięcia wyjściowe czwórnika pasywnego i żyratora są przeciwne. Warunek ten nie zależy od prądu I_x i można go wykorzystywać w pomiarach.

Jeśli hallotron jest w pełni symetryczny i jednorodny lub rozpatruje się go łącznie z układem skutecznej kompensacji [26], to współczynnik asymetrii $r_0 = 0$ i przy pracy w układzie czwórnika jego macierz impedancyjna ze wzoru (6.17) upraszcza się do postaci:

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} R_x(B) & \gamma^{\infty} B \\ +\gamma^{\infty} B & R_y(B) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Macierz admitancyjną $\mathbf{Y}_R$ symetrycznego hallotronu otrzymuje się z zależności macierzowej $\mathbf{Y}_R = \mathbf{Z}_R^{-1}$:

$$Y_R \equiv \begin{bmatrix} G_x(B) & \beta \\ \beta & G_y(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_x} \dfrac{1}{1-\dfrac{\left(\gamma^{\infty}B\right)^2}{R_x R_y}} & \dfrac{1}{\gamma^{\infty}B} \dfrac{1}{1-\dfrac{R_x R_y}{\left(\gamma^{\infty}B\right)^2}} \\ \dfrac{1}{\gamma^{\infty}B} \dfrac{1}{1-\dfrac{R_x R_y}{\left(\gamma^{\infty}B\right)^2}} & \dfrac{1}{R_y} \dfrac{1}{1-\dfrac{\left(\gamma^{\infty}B\right)^2}{R_x R_y}} \end{bmatrix}. \qquad (6.19)$$

Inny schemat zastępczy hallotronu przedstawiono na rys. 6.7b o elementach, których wartości można wyznaczyć na podstawie przekształceń macierzy admitancyjnej **y** hallotronu jako układu 4T ze wzoru (6.11) lub z pomiarów parametrów hallotronu jako czwórnika. Jego użyteczność w zagadnieniach praktycznych jest mniejsza ze względu na mniej oczywistą interpretację fizyczną i bardziej skomplikowane powiązanie z podawanymi przez producentów rezystancyjnymi parametrami wejścia i wyjścia.

Zastępując żyrator z rys. 6.7a napięciowymi źródłami sterowanymi otrzymuje się schemat jak na rys. 6.7c. Uwzględniono w nim również przez włączenie dodatkowych źródeł stacjonarnych wypadkowe napięcie termoelektryczne U_{yT} i napięcie u_{yB} indukowane przez indukcję $B(t)$, a za pomocą M_0 – sprzężenie magnetyczne między obwodami wejścia i wyjścia.

Schemat z rys. 6.7c można przekształcić w postać jak na rys. 6.7d, szczególnie dogodną do stosowania dla hallotronu o pomijalnie małej rezystancji asymetrii hallotronu lub dla hallotronu łącznie z układem skutecznie kompensującym napięcie asymetrii. W takim wypadku pozostałe napięcia pasożytnicze zastępuje się napięciem źródłowym $\sum u_{yi} \approx u_{yM} + U_{yT} + u_{yB}$. Schemat ten jest nieco bliższy fizycznie rzeczywistemu hallotronowi przy jego pracy jako czwórnika niż schematy z rys. 6.7a – c, gdyż uwidocznia, że oba obwody nie mają wspólnej końcówki, mimo galwanicznego połączenia wejścia z wyjściem. Różnice potencjałów pomiędzy zaciskami odwzorowują natomiast układy z rys 6.7 po dodaniu dwu źródeł w obwodzie wejściowym uwzględniających wtórne zjawisko Halla (od prądu i_y), dołączonych tak jak w schemacie pełnym z rys. 6.5.

Jeśli przeprowadza się interpretację zjawisk tylko w jednym z obwodów hallotronu, wyjściowym lub wejściowym, może wystarczyć schemat w postaci dwójnika. Na przykład analizę obwodu wyjściowego przy wymuszonym prądzie sterującym I_x umożliwia dwójnik w postaci źródła napięciowego i rezystancji wewnętrznej sterowanych polem magnetycznym – prawa strona schematu z rys. 6.7d. Do analizy wpływu rezystancji obciążenia R_L na obwód wejściowy hallotronu, czyli traktowania go jako magnetorezystor, wystarczy dwójnik, którego rezystancja jest rosnącą parzystą funkcją wielomianową indukcji $|B|$.

6.4.3. Inne schematy zastępcze hallotronów

Można również utworzyć schematy zastępcze posługując się innymi niż podane powyżej, idealnymi elementami układów elektrycznych. W komputerowych programach do analizy i syntezy układów elektronicznych stosuje się np. unistory, a dla modelowania wzmacniaczy operacyjnych również nulatory, noratory itp.[79]. Programy te mogą być użyteczne w praktyce dla aktywnych układów hallotronowych.

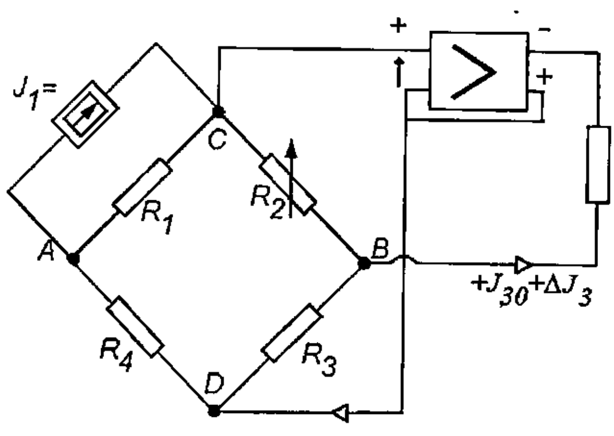
W jednej z wcześniejszych prac autora – patrz bibliografia w [26], omówiony też został schemat zastępczy hallotronu w postaci układu tylko z 6 rezystorami modulowanymi polem magnetycznym. Układ taki można stosować w ograniczonym zakresie i stałych kierunkach prądu sterującego I_x i indukcji B. Tamże są też schematy zastępcze uproszczone hallotronów z 5 elektrodami i zastosowano je do analizy układów kompensacji napięć asymetrii. W takim samym celu uproszczone schematy wykorzystywał Galiński, który rozważając pracę hallotronu z 4 elektrodami przy pomiarach bardzo małych przemiennych napięć wyjściowych (wpływ szczątkowych indukcyjności i pojemności pasożytniczych nie jest wówczas pomijalny) używał schematu w postaci układu z 5 końcówkami uwzględniającego sprzężenia pojemnościowe i upływności hallotronu do ziemi lub do metalowej obudowy stosowanej przy mierzeniu pól wolnozmiennych. Podstawowe wyniki tej pracy są opisane w monografii [26].

Podane tu schematy zastępcze hallotronu jako układu 4T umożliwiły autorowi wytłumaczenie działania i opracowanie nowych układów skutecznej kompensacji składowej symetrycznej jego napięcia wyjściowego, tj. niemal całkowitego zrównoważenia tej składowej w funkcji zmian temperatury lub prądu sterującego. Dzięki tym schematom zostało rozwiązane też kształtowanie przebiegu charakterystyki hallotronu oraz wymienność hallotronów i przeprowadzona wnikliwa analiza ich błędów. Umożliwiło to z kolei budowę teslomierzy, militeslomierzy i przetworników hallotronowych ze sprzężeniem zwrotnym o dużej czułości, rozdzielczości i dokładności [25, 26]. Autor widzi możliwość zastosowania tych układów również w kondycjonowaniu sygnałów różnych innych czujników 4T i galwanomagnetycznych mikrostruktur scalonych, ostatnio opracowywanych przez laboratoria technologii elektronowej na świecie. Tematyka ta wykracza jednak poza ostatecznie przyjęte ramy pracy.

7. PRZYKŁADY INNYCH DWUPRĄDOWYCH UKŁADÓW 4T: aktywny mostek stałoprądowy i mostki przemiennoprądowe RC

7.1. Samorównoważący się aktywny mostek dwuprądowy 4R

Oryginalną właściwością układów dwuprądowych 4T, w stosunku do pasywnych mostków klasycznych o pojedynczym zasilaniu, pracujących w układzie otwartym, jest możliwość ich równoważenia również poprzez zmianę jednego z prądów. Dzięki temu, podobnie jak w układach aktywnych zawierających mostek [21, 24], można tworzyć układy samokompensujące się. Przykład takiego układu o prądowym ujemnym sprzężeniu zwrotnym podano na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Samo-równoważący się mostek dwuprądowy w układzie o niezerowym wyjściu prądowym

Fig. 7.1. Self- balancing double current bridge of the zero shifted output current

Jest to układ z wymuszonym prądowym sygnałem wyjściowym, różnym od zera dla początku zakresu. Układy o takim znormalizowanym wyjściu stosuje się dość powszechnie w pomiarach i automatyce przemysłowej z kilku podstawowych powodów, takich jak:

- niezależność sygnału od zmian rezystancji obciążenia w szerokich granicach
- możliwość zasilania układu od strony odbiornika linią dwuprzewodową oraz
- rozróżnienie przerwy w obwodzie wyjściowym od sygnału dla początku zakresu.

W układzie tym wzmacniacz, dzięki ujemnemu sprzężeniu zwrotnemu, doprowadza do stanu równowagi mostek dwuprądowy włączony na wejściu i wówczas napięcie $U_{DC} \rightarrow 0$. Początkowy prąd wyjściowy J_{30} wynosi:

$$J_{30} = J_1 \frac{R_{10}(R_{20} + R_{30})}{R_{30}(R_{10} + R_{40})} \tag{7.1}$$

Podobne równanie opisuje też dowolny prąd wyjściowy J przy innych wartościach rezystancji mostka:

$$J \equiv J_{30} + \Delta J_3 = J_1 \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_3(R_1 + R_4)} \tag{7.2}$$

Z (7.1) i (7.2) otrzymuje się:

$$\Delta J_3 = J_1 \frac{R_1 R_2 - R_3 R_4}{R_3(R_1 + R_4)} \tag{7.3}$$

Licznik tego równania jest taki sam jak w dwuprądowym mostku pasywnym. Mierząc przyrost wyjściowego prądu, można więc uzyskać podobne jak poprzednio rezultaty zarówno przy pomiarach przyrostów pojedynczej rezystancji, jak i kombinacji kilku przyrostów. Na przykład przy R_1 = const., R_3 = const., R_4 = const. dla bezwzględnych przyrostów ΔR_2 rezystancji:R_2 otrzymuje się :

$$\Delta J_3 = J_1 \frac{\Delta R_2}{R_3 + R_{20}} \tag{7.4a}$$

lub dla przyrostów względnych ε_2

$$\Delta J_3 = J_1 \frac{R_{20}}{R_3 + R_{20}} \varepsilon_2 \tag{7.4b}$$

Prąd wyjściowy w tym układzie ma jeden kierunek. Czułość układu reguluje się poprzez zmianę wartości stabilizowanego prądu wejściowego J_1 lub dobór rezystancji R_3 i R_{20} wraz z regulacją początku zakresu innym rezystorem mostka. Zmiany zera umożliwia też dodatkowe źródło prądu stałego, dołączane równolegle do gałęzi R_3. Źródła tego nie uwidoczniono na rysunku. Ponieważ budowa układu nie wymaga rozłączania mostka wejściowego, to układ ten nadaje się również do badania obiektów o schemacie zastępczym w postaci mostka. Układem tym można przeprowadzać także pomiary dwuparametrowe. W tym celu trzeba wykorzystać dodatkowo napięcie drugiej przekątnej AB, które wynosi:

$$U_{AB} = J_1 \frac{R_1(R_4 - R_2)}{R_1 + R_4} \tag{7.5}$$

Powyższy układ autor przedstawił po raz pierwszy w styczniu 2000 roku na dorocznym seminarium Komisji Kształcenia Komitetu Metrologii PAN w Ośrodku Ministerstwa Edukacji Ustroń k. Wieruszowa i opublikował ostatnio w pracy [41]. Takiego układu nie podawano wcześniej w literaturze.

7.2. Dwuprądowe pasywne układy 4T prądu przemiennego (AC)

7.2.1. Równania podstawowe dwuprądowego mostka prądu przemiennego

Jednym z największych i wielce perspektywicznych obszarów zastosowania idei dwuprądowego zasilania są nowe rozwiązania układów 4T prądu zmiennego o strukturze mostkowej. Nazwiemy je w skrócie dwuprądowymi mostkami prądu przemiennego.

W szczególności przy prądzie przemiennym o jednej częstotliwości napięcia wyjściowe na przekątnych mostka czteroramiennego o impedancjach Z_i, zasilanego dwuprądowo lub z jednym przełączanym źródłem J, są opisane wyprowadzonymi w rozdziale 3 i przytoczonymi poniżej następującymi ogólnymi równaniami zmiennej zespolonej:

$$U_{DC} = J \frac{Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} \tag{3.7}$$

oraz

$$U_{AB} = J \frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} \tag{3.8}$$

Zaś ich warunki równowagi są następujące:

$$Z_1 Z_2 = Z_3 Z_4 \tag{3.7a}$$

oraz

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \tag{3.8a}$$

Iloczyny dotyczą impedancji ramion sąsiadujących z zaciskami danego wyjścia. Każdy z tych warunków zespolonych sprowadza się do dwóch warunków rzeczywistych w postaci równości składowych bądź prostokątnych bądź biegunowych obu jego stron. Na przykład dla równania (3.7a) otrzymuje się:

$$Re(Z_1 Z_2) = Re(Z_3 Z_4) \quad (7.6a')$$

$$Im(Z_1 Z_2) = Im(Z_3 Z_4) \quad (7.6a'')$$

bądź

$$|Z_1||Z_2| = |Z_3||Z_4|$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4 \quad (7.6b'')$$

a dla równania (3.8a)

$$Re(Z_1 Z_4) = Re(Z_2 Z_3) \quad (7.7a')$$

$$Im(Z_1 Z_4) = Im(Z_2 Z_3) \quad (7.7a'')$$

bądź

$$|Z_1||Z_4| = |Z_2||Z_3| \quad (7.7b')$$

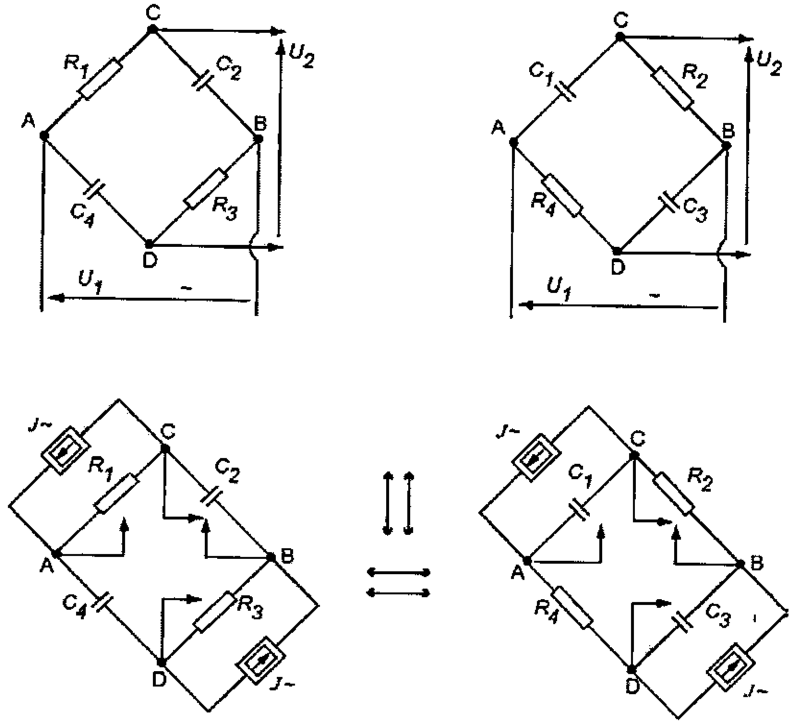
$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4 \quad (7.7b'')$$

Wszystkie inne wzory i zależności podane dla prądu stałego w poprzednich rozdziałach, na przykład dotyczące warunków linearyzacji napięć wyjściowych mostka, obowiązywać tu będą w postaciach zespolonych. Ze względu na podobieństwo formy wzorów na napięcie wyjściowe. Proces równoważenia mostków dwuprądowych przy prądzie przemiennym (AC) będzie przebiegał podobnie jak dla mostków klasycznych AC, tj. przy zmianie składowej immitancji gałęzi, potencjały jej końców na wykresie wskazowym przesuwają się po okręgach.

W celu bliższego poznania specyfiki dwuprądowych układów 4T prądu przemiennego rozpatrzymy jako przykład mostki zbudowane z elementów RC, począwszy od układów najprostszych o ramionach jednoelementowych.

7.2.2. Porównanie klasycznych i dwuprądowych mostków o jednoelementowych gałęziach RC

Na rys. 7.2 u góry przedstawiono dwa warianty prostego przesuwnika fazy RC. Przy klasycznym zasilaniu dołączonym do zacisków AB układ ten strukturalnie nie spełnia fazowego warunku równowagi mostka, gdyż suma faz dla pary rezystancji przeciwległych zawsze równa jest zeru, a dla pary kondensatorów: -180^0. Na przykład dla pierwszego z tych układów, przy



Rys. 7.2. Proste przesuwniki fazy RC (u góry) i odpowiadające im dwa mostki dwuprądowe

Fig. 7.2. Simple RC phase shifters (upper figures) and two AC double current bridges coresponding to them.

jednakowych rezystancjach $R_1=R_3\equiv R$ oraz jednakowych kondensatorach $C_2=C_4\equiv C$ napięcie wyjściowe wynosi:

$$U_2 = U_1 \, e^{2j \, arctg \, \omega RC} \tag{7.8}$$

Amplitudy napięcia wyjściowego i wejściowego są tu takie same, a ich przesunięcie fazy zależy od iloczynu ωRC. Dla $\omega RC = 1$ napięcia te są prostopadłe na wykresach wskazowych obydwu układów przesuwnika fazy RC. Natomiast w umieszczonych na dole tego rysunku takich samych mostkach jednoelementowych RC, ale zasilanych już dwuprądowo, warunki równowagi dla obu przekątnych są następujące:

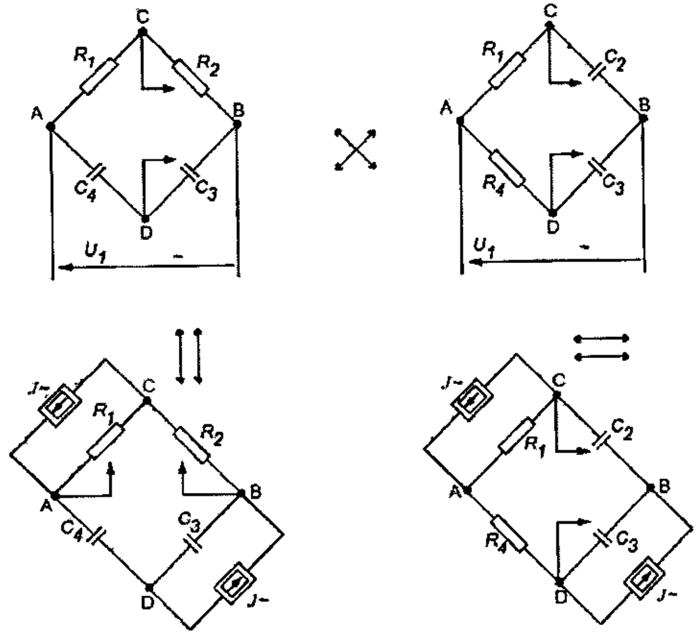
dla $U_{DC} = 0$

$$R_1C_4 = R_3C_2 \qquad \text{oraz} \qquad R_4C_1 = R_2C_3 \tag{7.9a,b}$$

dla $U_{AB} = 0$

$$R_1 C_2 = R_3 C_4 \qquad \text{oraz} \qquad R_2 C_1 = R_4 C_3 \tag{7.9c,d}$$

Są one różne dla obu przekątnych, ale warunek fazowy jest zawsze spełniony. Taką samą czwórkę warunków otrzymuje się, gdy źródła prądowe będą dołączone równolegle do obu pojemności.



Rys. 7.3. Mostki klasyczne jednoelementowe RC i odpowiadające im dwa, z czterech możliwych układów dwuprądowo zasilanych

Fig. 7.3. Conventional singles element arms' bridges RC and corresponded to them two from four possible double current circuits

Ze wzorów (7.9a, b, c, d) wynika, że przy równości stosunków odpowiednich par rezystancji R i pojemności C układy te są w ciągłej równowadze i to w obu przekątnych oraz bez względu na częstotliwość.

Na rys. 7.3 podano proste jednoelementowe mostki RC, a poniżej ich odpowiedniki dwuprądowe. Strzałki umieszczone obok schematów pokazują położenie immitancji układu wchodzących do iloczynów warunku równowagi, a strzałki wychodzące z wierzchołków – użyteczne, równoważące się wyjścia.

Warunki równowagi podanych tu mostków klasycznych (przy $U_{DC} = 0$) są następujące:

$$R_1 C_4 = R_2 C_3 \tag{7.10a}$$

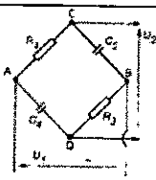
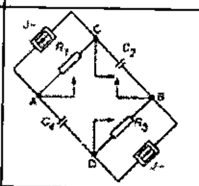
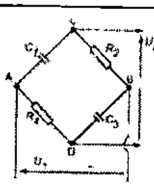
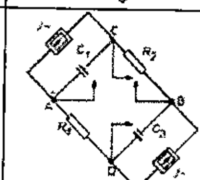
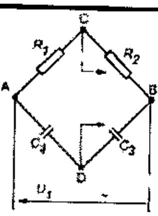
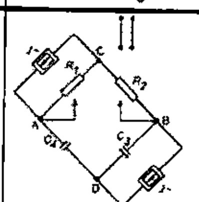
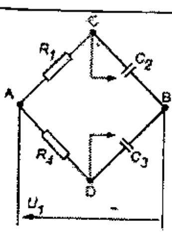
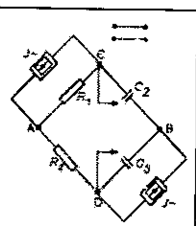
oraz

$$R_1C_2 = R_4C_3 \tag{7.10b}$$

Nie zależą one od częstotliwości.

Tabela 7.1. Porównanie warunków równowagi mostków 4R klasycznych i dwuprądowych o jednoelementowych gałęziach R i C

Table 7.1. Comparison of balance conditions of 4R conventional and double current bridges of arm's single element R or C

Zasilanie klasyczne			**Zasilanie dwuprądowe**		
Nr	Schemat	U_{CD}	Nr	Schemat	Warunki równowagi
2a		$\underline{U_{CD}\neq 0}$ $U_2 = U_1 e^{2j\,\mathrm{arctg}\,\omega RC}$ (7.8a)	2c		$\underline{U_{CD}=0}$ $R_1C_4=R_3C_2$ (7.9a) $\underline{U_{AB}=0}$ $R_1C_2=R_3C_4$ (7.9b)
2b		$\underline{U_{CD}\neq 0}$ $U_2 = U_1 e^{2j\,\mathrm{arctg}\,\omega RC}$ (7.9b)	2d		$\underline{U_{CD}=0}$ $R_4C_1=R_2C_3$ (7.10a) $\underline{U_{AB}=0}$ $R_2C_1=R_4C_3$ (7.10b)
3a		$\underline{U_{CD}=0}$ $R_1C_4=R_2C_3$ (7.11)	3c		$\underline{U_{CD}\neq 0}$ $R_1R_2\neq\frac{1}{(j\omega)^2C_3C_4}$ (7.13a) $\underline{U_{AB}=0}$ $R_1C_3=R_2C_4$(7.13b)
3b		$\underline{U_{CD}=0}$ $R_1C_2=R_4C_3$ (7.12)	3d		$\underline{U_{CD}=0}$ $R_1C_3=R_4C_2$ (7.14a) $\underline{U_{CD}\neq 0}$ $R_1R_4\neq\frac{1}{(j\omega)^2C_2C_3}$ (7.14b)

Te same układy RC przy zasilaniu z dwu jednakowych źródeł prądowych J mają inne warunki równowagi:

dla $U_{DC} = 0$:

$$R_1 R_2 = \frac{1}{(j\omega)^2 C_3 C_4} \quad \text{oraz} \quad R_1C_3 = R_4C_2 \qquad (7.11a,b)$$

i dla $U_{AB} = 0$:

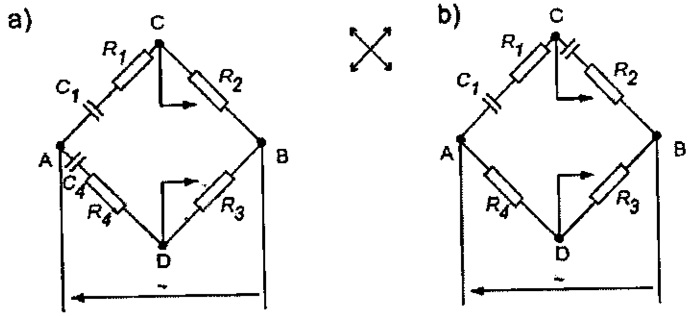
$$R_1C_3 = R_2C_4 \quad \text{oraz} \quad R_1 R_4 = \frac{1}{(j\omega)^2 C_2 C_3} \qquad (7.11c,d)$$

W lewym mostku dwuprądowym może być spełniony tylko warunek równowagi (7.11c) dla wyjścia AB, a dla prawego układu – tylko warunek (7.11b) wyjścia DC. Podobnie jak poprzednio przy równości stosunków obu parametrów R oraz C układy są w ciągłej równowadze dla obu przekątnych i to niezależnie od częstotliwości.

Dla wygody porównywania jednoelementowych układów mostkowych RC przy zasilaniu klasycznym i dwuprądowym zestawiono je w tabeli 7.1.

7.2.3. Mostki o gałęziach szeregowych RC i R

Na kolejnym rys. 7.4 znajduje się mostek De Sauty'ego[1], z dwoma szeregowymi gałęziami RC, podłączony do zasilania na dwa sposoby. Chociaż przy opisie impedancyjnym gałęzi prostsze zależności uzyskuje się dla mostka Maxwella, ten układ wybrano tu dlatego, iż pierwszym historycznie prawdziwym mostkiem prądu przemiennego był podany przez Wiena mostek



Rys. 7.4. Mostek De Sauty'ego przy dwu wariantach połączenia gałęzi
Fig. 7.4. Two variants of de Sauty bridge

[1] Mostek ten różni się od mostka Wiena tylko szeregowym, a nie równoległym schematem zastępczym kondensatora ze stratami. Zazwyczaj w praktyce oba te mostki RC nazywa się mostkami Wiena.

do badania kondensatorów. We wcześniejszych rozwiązaniach mostków i układów służących do pomiarów parametrów C, L, M dokonywano kolejno dwu równoważeń: statycznego dla zasilania prądem stałym i dynamicznego – przy jego przełączaniu z wykorzystaniem galwanometru balistycznego.

Przy oznaczeniach jak na rys. 7.4 a) i b) dla mostków de Sauty'ego otrzymuje się:

$$(R_1 + j\omega C_1)R_3 = (R_4 + j\omega C_4)R_2 \tag{7.12}$$

$$(R_1 + j\omega C_1)R_3 = (R_2 + j\omega C_2)R_4 \tag{7.13}$$

A stąd pary warunków otrzymane z porównania składowych rzeczywistych i urojonych obu stron:

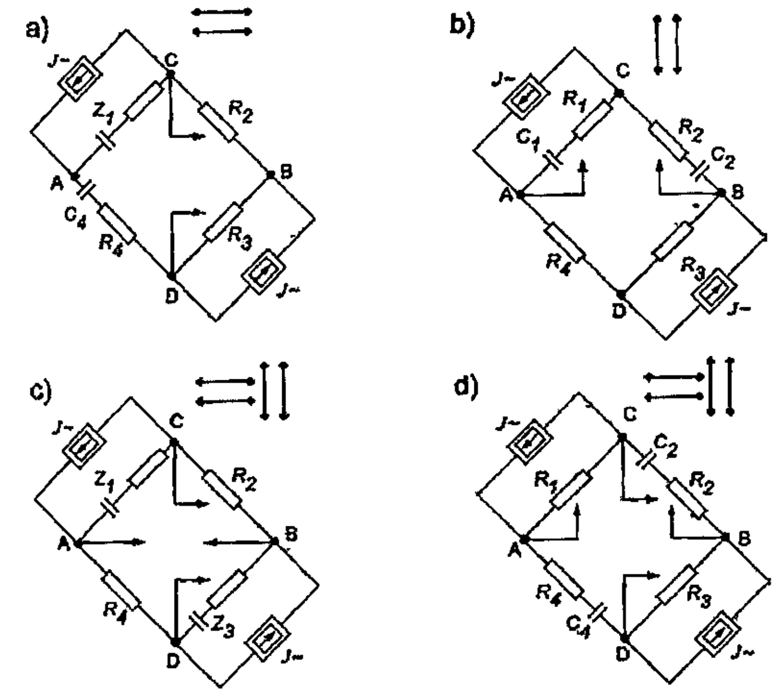
$R_1 R_3 = R_2 R_4$ (7.12') $\qquad R_1 R_3 = R_2 R_4$ (7.13')

$C_1 R_2 = R_2 C_4$ (7.12") $\qquad C_1 R_4 = C_2 R_3$ (7.13")

Przy takich samych wartościach składowych impedancji Z_1, oraz $R_2 = R_4$, w układzie a) uzyskuje się większą czułość napięciową niż w układzie b), największą, gdy $|Z_1| = R_2$. Dla pomiarów R_1, C_1 rozdzielny odczyt dla warunków (7.12', 7.12") otrzymuje się przy regulacji R_4 i C_4, a dla warunków (7.13', 7.13") przy R_2 i C_2.

Na kolejnym rysunku 7.5a – d podano po dwa dwuprądowe odpowiedniki mostków De Sauty'ego o szeregowych schematach impedancji ramion pojemnościowych. Możliwych wariantów jest łącznie sześć, po trzy dla źródeł prądowych dołączanych równolegle do gałęzi RC lub do gałęzi R. Z układów o pierwszym ramieniu w postaci samej rezystancji R_1 podano tylko układ d). Nie ma tu pozostałych dwu schematów o zamienionych miejscami immitancjami bądź ramion 2 i 4, bądź 2 i 3. Mają one takie same warunki równowagi jak układy a) i c), jedynie przy innych indeksach pochodzących od numeracji ramion. Zespolone warunki równowagi dla obu wyjść DC oraz AB wszystkich mostków 2RC – 2R z rysunków 7.5b – d wraz z parami warunków rzeczywistych zestawiono w dolnej części tabeli 7.2. Jej górna część zawiera dla porównania mostki klasyczne de Sauty'ego.

Rozpatrzmy bliżej warunki równowagi mostka dwuprądowego z rys 7.5a. ujęte wzorami (7.14a, b). Dla układu a) nie można spełnić warunku (7.14"b). Układ ten osiąga więc równowagę tylko dla jednego z wyjść. Podobnie dla układu b) nie da się spełnić warunku (7.15"a). Drugą, odmienną parę warunków

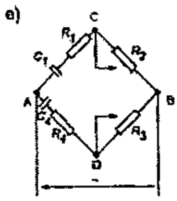
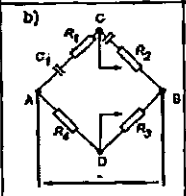


Rys 7.5. Mostki dwuprądowe prądu przemiennego odpowiadające mostkowi de Sauty'ego z rys 7.4 charakterem immitancji gałęzi.

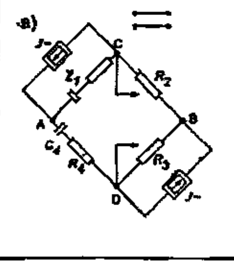
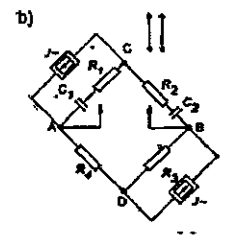
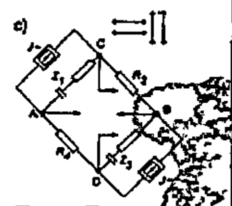
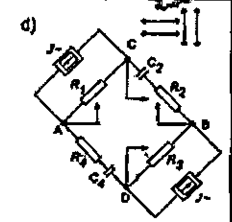
Fig 7.5. Double-current AC bridges corresponding by arm immitances to de Sauty bridges given on Fig 7.4.

Tabela 7.2. Porównanie warunków równowagi mostków de Sauty'ego i dwuprądowych mostków RC-R

Table 7.2. Comparison of balance conditions of de Sauty bridges and of double current RC-R bridges

Mostki de Sauty'ego					
Rys	Schemat	$U_{DC}=0$	Rys	Schemat	$U_{DC}=0$
7.4a		$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_3=\left(R_4+\frac{1}{j\omega C_4}\right)R_2$ (7.12) $R_1R_3 = R_2R_4$ (7.12') $C_1R_2 = R_3C_4$ (7.12") ($\mathrm{tg}\,\delta_1 = \omega C_3R_3$)	7.4b		$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_3=\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)R_4$ (7.13) $R_1R_3 = R_2R_4$ (7.13') $C_1R_4 = C_2R_3$ (7.13")

cd. tabeli 7.2

Mostki dwuprądowe 2RC - 2R			
Rys	Schemat	$U_{DC}=0$	$U_{AB}=0$
1	2	3	4
7.5a	a) 	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_2=\left(R_4+\frac{1}{j\omega C_4}\right)R_3$ (7.14a) $R_1R_2=R_3R_4$ (7.14a') $C_4R_2=C_1R_3$ (7.14a'')	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R_4+\frac{1}{j\omega C_4}\right)\neq R_2R_3$ (7.14.b) $R_1R_4-\frac{1}{\omega^2 C_1C_4}=R_2R_3$ (7.14.b') $\frac{R_4}{C_1}+\frac{R_1}{C_4}\neq 0$ (7.14.b'')
7.5b	b) 	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)\neq R_3R_4$ (7.15a) $R_1R_2-\frac{1}{\omega^2 C_1C_2}=R_3R_4$ (7.15a') $\frac{R_2}{C_1}+\frac{R_1}{C_2}\neq 0$ (7.15a'')	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_4=\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)R_3$ (7.15b) $R_1R_4=R_2R_3$ (7.15b') $C_2R_4=C_1R_3$ (7.15b'')
7.5c	c) 	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_2=\left(R_3+\frac{1}{j\omega C_3}\right)R_4$ (7.16a) $R_1R_2=R_3R_4$ (7.16a') $C_3R_2=C_1R_4$ (7.16a'')	$\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)R_4=\left(R_3+\frac{1}{j\omega C_3}\right)R_2$ (7.16b) $R_1R_4=R_2R_3$ (7.16b') $C_3R_4=C_1R_2$ (7.16b'')
7.5d	d) 	$R_1\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)=R_3\left(R_4+\frac{1}{j\omega C_4}\right)$ (7.17a) $R_1R_2=R_3R_4$ (7.17a') $C_2R_3=C_4R_3$ (7.17a'')	$R_1\left(R_4+\frac{1}{j\omega C_4}\right)=R_3\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)$ (7.17b) $R_1R_4=R_2R_3$ (7.17b') $C_2R_1=C_4R_3$ (7.17b'')

można by uzyskać dla obu tych układów po zmianie zasilania na klasyczne bez rozłączania mostka.

Natomiast układy c) i d) o jednakowym charakterze fazowym ramion przeciwległych, które nie równoważą się przy zasilaniu klasycznym, przy zasilaniu dwuprądowym równoważą się dla każdego z wyjść.

7.2.4. Pomiary trzech parametrów dwuprądowym mostkiem 2RC-2R dwukrotnie równoważonym

Postępując podobnie jak dla zrównoważonych mostków dwuprądowych (2J) prądu stałego (DC), tj. doprowadzając układ do równowagi kolejno dla każdego wyjścia, uzyskuje dwie różne pary nastaw, ale tylko trzy z nich są od siebie niezależne. Można więc wyznaczyć na tej podstawie wartości trzech parametrów układu. Rozpatrzymy to na przykładzie układu 7.5c). Regulując dwukrotnie do stanu równowagi parametry trzeciego ramienia, uzyskuje się pary nastaw R_{3a}, C_{3a} oraz R_{3b}, C_{3b} i stąd otrzymuje się:

$$R_1 = \sqrt{R_{3a} R_{3b}} \tag{7.18a}$$

$$C_1 = \sqrt{C_{3a} C_{3b}} \tag{7.18b}$$

$$R_2 = R_4 \sqrt{\frac{R_{3b}}{R_{3a}}} \tag{7.18c}$$

Poza nastawami trzeba więc znać wartość jeszcze tylko jednej z rezystancji R_4 lub R_2 jako rezystancji odniesienia. Dokonując obu pomiarów dwukrotnie, w tym dla wartości początkowych powyższych parametrów R i C, na podstawie tych wzorów można wyznaczyć też ich przyrosty bezwzględne i względne.

Podobną możliwość pomiarów trzech parametrów uzyskuje się, równoważąc ten mostek dwukrotnie na zaciskach CD, tj przy zasilaniu klasycznym jak na rys. 7.4a, i dwuprądowym z rys.7.5a, w obu przypadkach poprzez regulację elementów R_4 C_4. Otrzymuje się zależności dla trzech parametrów podobne w formie do poprzednich

$$R_1 = \sqrt{R_{4a} R_{4b}} \tag{7.19a}$$

$$C_1 = \sqrt{C_{4a} C_{4b}} \tag{7.19b}$$

$$R_3 = R_2 \sqrt{\frac{R_{4a}}{R_{4b}}} \tag{7.19c}$$

7.2.5. Dwuprądowy mostek niezrównoważony 2RC - 2R

Równoczesną równowagę mostka dwuprądowego w obu przekątnych uzyskuje się wtedy, gdy składowe początkowe immitancji ramion przeciwległych są jednakowe i spełniają warunek równowagi. Dotyczy to na przykład układów c) i d) z rys. 5. Dla pierwszego z nich, przy $Z_{10} = Z_{30}$ i $R_{20} = R_{40}$, z (7.6) i (7.7) otrzymuje się:

$$U_{DC}=J\frac{Z_{10}R_{20}}{2\left(Z_{10}+R_{20}\right)}\,\frac{\varepsilon_{R1}+\varepsilon_{R2}-\varepsilon_{R3}-\varepsilon_{R4}+j\varepsilon_{X1}-j\varepsilon_{X3}+\left(\varepsilon_{R1}+j\varepsilon_{X1}\right)\varepsilon_{R2}-\left(\varepsilon_{R3}+j\varepsilon_{X3}\right)\varepsilon_{R4}}{1+\dfrac{\sum\Delta_{Ri}+j\Delta_{X1}+j\Delta_{X3}}{2\left(Z_{10}+R_{20}\right)}} \tag{7.19}$$

oraz

$$U_{AB}=J\frac{Z_{10}R_{20}}{2\left(Z_{10}+R_{20}\right)}\,\frac{\varepsilon_{R1}-\varepsilon_{R2}-\varepsilon_{R3}+\varepsilon_{R4}+j\varepsilon_{X1}-j\varepsilon_{X3}+\left(\varepsilon_{R1}+j\varepsilon_{X1}\right)\varepsilon_{R4}-\left(\varepsilon_{R3}+j\varepsilon_{X3}\right)\varepsilon_{R2}}{1+\dfrac{\sum\Delta_{Ri}+j\Delta_{X1}+j\Delta_{X3}}{2\left(Z_{10}+R_{20}\right)}} \tag{7.20}$$

gdzie:

Z_{10}, R_{20} – impedancja Z_1 i rezystancja R_2 w stanie równowagi,

Δ_{Ri}, Δ_{Xi} – przyrosty bezwzględne składowych rzeczywistych i urojonych impedancji Z_i,

ε_{Ri}, ε_{Xi} – ich przyrosty względne określone w stosunku do składowych początkowych impedancji Z_{i0}.

Wzory te upraszczają się dla małych przyrostów składowych immitancji oraz gdy $\varepsilon_{R2} = 0$, $\varepsilon_{R4} = 0$, a ponadto – gdy niektóre z przyrostów są parami jednakowe bądź przeciwne lub są określone inne zależności fazowe. Cztery przyrosty, na przykład obu składowych impedancji Z_1, Z_3, albo też wielkości wywołujących te przyrosty, można wyznaczyć z fazoczułych pomiarów składowych napięć obu wyjść. Rozwiązania szczegółowe dla każdego przypadku przyrostów i wielu istniejących mostków prądu przemiennego wymagają szczegółowych indywidualnych opracowań przewidywanych jako kontynuację tej pracy.

7.3. Podsumowanie rozdziału 7

W rozdziale tym omówiono przykłady kilku innych niż mostki 4R rozwiązań układów dwuprądowo zasilanych, w tym samorównoważący się aktywny układ prądu stałego (DC) oraz dwuprądowe pasywne mostki prądu przemiennego (AC) zarówno o ramionach jednoelementowych R i C, jak i o dwu ramionach szeregowych RC i dwu rezystancjach R. Oryginalna, zaproponowana we wcześniejszych publikacjach autora [27 – 31] idea dwuprądowego zasilania (2J) układów pomiarowych zawierających mostki i jej alternatywa polegająca na uśrednianiu wyników dwu pomiarów przy przełączaniu dwu różnych lub nawet tylko pojedynczego źródła prądowego (2x2J), stwarza również przy prądzie przemiennym możliwości budowy wielu pasywnych i aktywnych dwuwyjściowych analogowych układów kondycjonowania sygnałów o nowych właściwościach metrologicznych, w tym do równoczesnych pomiarów kilku parametrów.

Dla każdego z istniejących rozwiązań mostków klasycznych prądu przemiennego można podać po dwa (a z permutacją ramion – aż nawet po 6) układów dwuprądowych. Przy takim niekonwencjonalnym zasilaniu mostki klasyczne można zrównoważyć w jednej z przekątnych. Natomiast układy, w których przy zasilaniu klasycznym impedancje strukturalnie nie spełniają warunku równości sumy faz w ramionach przeciwległych dają się zrównoważyć w obu przekątnych.– patrz wzory dla układów z rysunków 7.2c i 7.2d w tabeli 7.1 oraz dla układów z rys. 7.5c i 7.5d w tabeli 7.2.

Ze względu na podobieństwo formy wzorów (7.6) i (7.7) dla napięć niezrównoważenia mostków dwuprądowych i wzoru dla mostków klasycznych zasilanych prądowo, przebiegi amplitudy i fazy w funkcji przyrostów składowych immitancji ramion są też podobne, ale dotyczą innych ramion.

Układy dwuprądowe AC o dwu wyjściach mogą służyć do równoczesnych pomiarów kilku składowych immitancji wewnętrznych z zacisków tych układów oraz do pośrednich pomiarów kilku wielkości wpływających różnie na te składowe w nieselektywnych czujnikach immitancyjnych. Można też mierzyć przy jednej lub kilku częstotliwościach.

Wymuszone jednakowe zasilanie dwuprądowe (2J) prądu przemiennego (AC) trzeba zrealizować jako odseparowane galwanicznie, np. za pomocą dwu uzwojeń przekładnika prądowego o wymuszonym prądzie pierwotnym. Przy metodzie przełączania jednego źródła prądowego (2xJ) napięcia wyjściowe z dwu pomiarów trzeba dodawać wektorowo i przyłączać źródło na określoną liczbę okresów z każdej strony. Można w tym celu w układach stosować detektory fazoczułe. Zasilanie dwuprądowe można też stosować w układach prądu przemiennego z mostkami quasi-zrównoważonymi, z hallotronami i innymi mnożnikami sygnałów oraz w układach z wielokrotnym próbkowaniem w czasie jednego okresu i cyfrowym przetwarzaniem sygnałów(DSP).

Układy mostków 2J i 2xJ prądu przemiennego (AC) nadają się też do częściowej realizacji wirtualnej.

8. MIARY DOKŁADNOŚCI REZYSTANCYJNYCH UKŁADÓW 4T W POMIARACH WIELOPARAMETROWYCH

8.1. Wprowadzenie

W pomiarach wieloparametrowych trzeba mierzyć co najmniej tyle parametrów, ile jest badanych wielkości wpływających na te parametry i następnie odpowiednio kondycjonować i przetwarzać otrzymywane sygnały. Każdy wynik pomiarów, aby był wiarygodny, powinien zawierać nie tylko wartości zmierzonych wielkości, ale i oszacowanie miar ich dokładności. Badane parametry obiektu mogą być powiązane ze sobą poprzez wewnętrzne zależności i dostępne do pomiarów tylko pośrednio, a sygnały wyjściowe są też często ze sobą skojarzone, gdy powstają we wspólnym układzie pomiarowym. Wówczas też i miary błędów pomiarów poszczególnych parametrów mogą zależeć od siebie, w szczególności wywoływanych wspólną przyczyną. W praktyce pomiarowej, np. w technicznej diagnostyce, trzeba oceniać niedokładność nawet takich pomiarów, gdy niektóre sygnały są znacznie mniejsze od pozostałych i od zakłóceń. Immitancyjne wieloparametrowe układy pomiarowe wymagają więc opisu dokładności dla równoczesnych przyrostów ich parametrów w kilku gałęziach i o różnym poziomie wartości, np. przy:

- wykorzystywaniu wieloelementowych i scalonych czujników nieselektywnych o parametrach niejednakowo zależnych od wartości i rozkładu przestrzennego jednej lub kilku oddziałujących wielkości
- identyfikacji lub diagnostyce zmian elementów wewnętrznych układu z czterech jego zacisków (4T)
- badaniu właściwości kierunkowych ośrodków przewodzących oraz próbek materiałów za pomocą czterech elektrod romboidalnie rozmieszczonych.

Pomimo, że klasyczne mostki niezrównoważone omawia się w wielu podręcznikach techniki pomiarowej to tak istotne dla praktyki opisy niedokładności pomiarów tymi mostkami często są pomijane lub traktowane w sposób uproszczony – tylko dla stanów bliskich równowagi. Występuje też wiele nieścisłości i dowolności w ujęciu tych zagadnień. Niedokładność napięcia wyjściowego mostka omawiano między innymi w [63] oraz w [6, 10, 18, 19]. Dotyczyło to jednak pomiarów jednej wielkości i szczególnych postaci mostka częściowo lub całkowicie symetrycznego. W obszernej literaturze o mostkach i ich różnych zastosowaniach autor nie znalazł szczegółowej analizy błędów lub niepewności pomiarowych wszystkich trzech parametrów niezrównoważonego mostka klasycznego jako czwórnika przy dużych i niezależnych od siebie przyrostach immitancji jego ramion. Niedokładność niekonwencjonalnych mostków dwuprądowo zasilanych nie była jeszcze nigdy omawiana i rozważa się ją po raz pierwszy w tej pracy. Zagadnienia te wymagają gruntownego przedstawienia od podstaw w jednolitym ujęciu dla obu rodzajów mostków jako szczególnych postaci układu 4 T

Wyróżnia się dwa rodzaje zadań wyznaczania miar dokładności:

– „wprost" – przy danych miarach niedokładności parametrów wewnętrznych układu pomiarowego lub też i dla funkcji opisujących oddziaływania wielkości X_i na te parametry, należy ocenić przewidywaną dokładność parametrów na zaciskach układu. Dokonuje się tego np. przy projektowaniu mostków lub ich wyborze jako układów wejściowych systemów pomiarowych

– „odwrotne" – dla określonych wartości zmierzonych parametrów zewnętrznych układu i ich miar dokładności otrzymanych na podstawie danych metrologicznych użytych przyrządów i serii pomiarów trzeba oszacować dokładność badanych zmian jego parametrów wewnętrznych, bądź też i wywołujących je wielkości X_i wyznaczanych pośrednio z pomiarów.

Pierwszy rodzaj postępowania jest bardziej charakterystyczny dla konstruktora aparatury i przy jej wyborze do określonego zadania pomiarowego, drugi – dla jej użytkownika, przy wykonywaniu pomiarów. W obu rodzajach tych zadań do wyznaczania miar dokładności należy stosować ścisłe zależności wiążące parametry zewnętrzne układu z wartościami parametrów wewnętrznych i ich przyrostami nawet, gdy podstawowe równania pomiarów upraszczają się np. dla mostka niezrównoważonego wskutek zależności między jego rezystancjami w stanie równowagi oraz przy ich początkowej symetrii i współzależności przyrostów. Wynika to stąd, że np. dla rezystancji o jednakowych wartościach znamionowych, ich miary niedokładności mogą różnić się w dopuszczalnych granicach. Poniżej omówi się miary dokładności parametrów zewnętrznych mostka 4R przy różnych sposobach zasilania i dokładność pomiarów 2D w takim mostku.

Zasadnicza różnica pomiędzy szacowaniem niedokładności pomiarów jedno- i wieloparametrowych polega na tym, że dla pierwszych z nich wieloczujnikowy układ pomiarowy po wykonaniu, traktuje się już jako całość i opisuje się jego niedokładność wypadkowymi błędami lub niepewnościami pomiarowymi zera i nachylenia charakterystyki układu. Jest to dopuszczalne tylko wtedy, gdy pomiary można traktować jako punktowe, tj. można nie uwzględniać zmian rozkładu pola wielkości mierzonej w obrębie wymiarów geometrycznych zespołu czujników. Natomiast **w pomiarach wieloparametrowych** nadal **trzeba rozpatrywać zależności błędów lub niepewności poszczególnych czujników zestawu lub parametrów czujnika scalonego od każdej wielkości mierzonej i szacować ich graniczne wartości dla różnych kombinacji tych wielkości.**

Do analizy jako pierwszy wybrano mostek 4R pracujący klasycznie jako czwórnik typu X. W rozważaniach wykorzysta się podany już w tej pracy opis parametrów na zaciskach takiego mostka o zmiennych rezystancjach ramion w funkcji ich wartości początkowych w stanie równowagi i przyrostów od tego stanu. Wystarcza tu rozpatrzenie mostka 4R bez przekątnych, gdyż układy pasywne o innej strukturze wewnętrznej, przy pracy w postaci czwórnika, sprowadzają się do tego układu. Szacowania niedokładności parametrów zewnętrznych niezrównoważonego mostka dokona się dla wypadku ogólnego, tj. w funkcji niezależnych od siebie błędów systematycznych granicznych oraz błędów przypadkowych (lub niepewności pomiarowych) poszczególnych jego rezystancji. Następnie, korzystając z podobieństwa formy wzorów opisujących parametry zewnętrzne obu rodzaje mostków zasilanych prądowo (patrz rozdziały 1 – 3), po zamianie miejscami rezystancji we wzorach dla mostka jednoprądowego, otrzyma się zależności dla błędów obu wyjść mostka dwuprądowego. Otrzymane wzory stanowią podstawę do opracowywania ocen niedokładności różnych pomiarów, w których stosuje się mostki. Jako przykłady zagadnienia odwrotnego w pomiarach 2D omówi się ocenę dokładności dwu przyrostów rezystancji ramion mostka otrzymanych w mostku dwuprądowym z równoczesnych pomiarów jego napięć wyjściowych oraz w mostku jednoprądowym z pomiarów napięcia wyjściowego i przyrostu rezystancji wejściowej.

8.2. Opis niedokładności rezystancji zmiennych w szerokich granicach

Do opisu miar dokładności mostka o rezystancjach ramion zmiennych w szerokich granicach można wykorzystać przedstawienie bieżących wartości rezystancji R_i poprzez ich wartości początkowe R_{i0} i przyrosty bezwzględne ΔR_i lub względne ε_i. Parametry te nazywane są tu składowymi rezystancji. Zostały one już poprzednio zdefiniowane dwojako wzorem (2.5), tj.:

$$R_i \equiv R_{i0} + \Delta R_i \equiv R_{i0}\left(1+\varepsilon_i\right)$$

Podobnym wzorem można też opisywać konduktancje. Mostki niezrównoważone prądu stałego zazwyczaj służą bądź tylko do bezpośrednich pomiarów przyrostów rezystancji ΔR_i, ε_i (lub konduktancji) i prostych ich kombinacji, np. różnicy, bądź do pomiarów pośrednich jednej wielkości X, w znany sposób wpływającej na te przyrosty. W niniejszej monografii omawia się możliwości użycia mostków o różnym prądowym zasilaniu do równoczesnych pomiarów kilku takich wielkości. Należy więc też dysponować sposobami oceny niedokładności ich pomiarów. Rezystancje mostka R_i mogą tu przyjmować wartości zmienne w szerokich granicach. Zależą one równocześnie i według różnych funkcji od kilku wielkości mierzonych, od innych wielkości wpływających oraz od zakłóceń. Są też obarczone błędami powstałymi wskutek rozrzutu parametrów w produkcji, oddziaływań otoczenia i procesów starzenia oraz warunków pracy układu i stosowanych przybliżeń charakterystyk. Na przykład, każdy egzemplarz rezystora ze zbioru o tej samej wartości nominalnej, nawet od jednego producenta, różni się błędami, które ponadto mogą różnie zmieniać się w czasie w sposób deterministyczny i przypadkowy. Gdy wartości parametru zmieniają się w dużym zakresie, zazwyczaj nie udaje się wyrazić miar niedokładności tylko pojedynczymi liczbami Przypisywać je trzeba poszczególnym przedziałom bądź opisywać prostymi funkcjami.

Analizę niedokładności mostków jako układów pomiarowych lub układów badanych można przeprowadzić niezależnie od różnorodnych zależności poszczególnych immitancji od jednej lub kilku wielkości wpływających i od wielu różnych źródeł błędów. W tym celu **wydziela się błędy wartości początkowych parametrów mostka w stanie równowagi i błędy przyrostów tych parametrów**. Takie podejście, w którym **błędy odnosi się do wartości parametrów niosących informację pomiarową**, można stosować dla czujników zarówno pojedynczej jak i kilku wielkości oraz przy mierzeniu przyrostów immitancji mostka. Uniezależnia ono opis niedokładności czujników od ich zazwyczaj nieliniowych charakterystyk przetwarzania, różniących się dla różnych wielkości mierzonych, egzemplarzy i geometrii. Podobny sposób jest już wykorzystywany w technice pomiarowej do opisu niedokładności czujników i elementów regulacyjnych np. potencjometrów.

Ze wzoru (2.5) wynika, że w każdej chwili jej **błąd bezwzględny** Δ_i jest następująco powiązany z błędami bezwzględnymi Δ_{i0}, $\Delta_{\varepsilon i}$ składowych rezystancji R_i:

$$\Delta_i = \Delta_{i0} + \Delta_{\Delta i} = \Delta_{i0}(1+\varepsilon_i) + R_{i0}\Delta_{\varepsilon i} \tag{8.1}$$

Zaś z zależności $R_i = R_{i0}(1+\varepsilon_i)$, bieżący **błąd względny** δ_{Ri} tej rezystancji można zdefiniować dwojako:

$$\delta_{Ri} \equiv \frac{\Delta_i}{R_i} = \delta_{i0} + \frac{\Delta_{\varepsilon i}}{1+\varepsilon_i} = \delta_{i0} + \delta_{\varepsilon i}\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i} \tag{8.2}$$

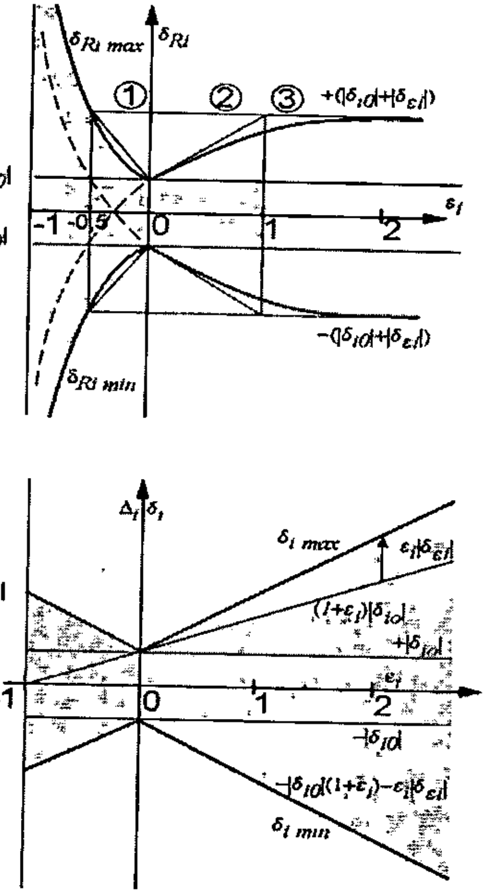
lub

$$\delta_i \equiv \frac{\Delta_i}{R_{i0}} = \delta_{i0}(1+\varepsilon_i) + \Delta_{\varepsilon i} = \delta_{i0} + \varepsilon_i(\delta_{i0} + \delta_{\varepsilon i}) \tag{8.3}$$

gdzie: δ_{Ri}, δ_i – błędy względne utworzone przez odniesienie błędu bezwzględnego Δ_i do wartości bieżącej bądź początkowej R_{i0} rezystancji R_i

Δ_{i0}, δ_{i0} – błąd bezwzględny i względny rezystancji początkowej R_{i0} (przy równowadze mostka)

$\Delta_{\varepsilon i}$, $\delta_{\varepsilon i}$ – bieżące wartości bezwzględnego i względnego błędu przyrostu ε_i.



Rys. 8.1. Przebiegi względnych błędów granicznych $\pm\delta_{i\,max}$, $\pm\delta_{i\,max}$ w funkcji rezystancji R_i przy stałych wartościach błędów granicznych $|\delta_{i0}|, |\delta_{\varepsilon i}|$ jej składowych

Fig. 8.1. Relative errors' limits $\pm\delta_{i\,max}$, $\pm\delta_{i\,max}$ as functions of the R_i resistance and of limited errors $|\delta_{i0}|, |\delta_{\varepsilon i}|$ of its components

Oba błędy względne wiąże prosta zależność:

$$\delta_{Ri} = \frac{\delta_i}{1+\varepsilon_i} \tag{8.4}$$

Wyrażenia przy poszczególnych błędach składowych są współczynnikami wagi określającymi ich udział w błędzie całej rezystancji. Są one różne dla każdego rodzaju błędu wypadkowego. Ponieważ wartości rzeczywiste rezystancji i jej składowych nie są nigdy znane, to wszystkie te błędy z wystarczającą w praktyce dokładnością wyznacza się względem odpowiednich ich wartości nominalnych lub wartości otrzymanych jako wynik pomiarów sprawdzających z uwzględnieniem poprawek.

Błędy Δ_i, δ_{Ri}, δ_i w ogólnym wypadku mogą różnie zależeć od rezystancji R_i. Nawet przy stałych błędach bezwzględnych Δ_{i0}, $\Delta_{\varepsilon i}$ lub względnych δ_{i0} ,$\delta_{\varepsilon i}$ obu składowych rezystancji R_i, wszystkie jej błędy są funkcjami przyrostu ε_i, jak pokazuje to rys. 8.1.

W całym zakresie zmian przyrostu ε_i, błąd bezwzględny Δ_i i względny δ_i przebiegają liniowo, zaś błąd δ_{Ri} - nieliniowo. Ponadto dla $\delta_{\varepsilon i} \neq 0$, gdy $\varepsilon_i \to -1$, to: $\delta_{Ri} \to \infty$. Wygodniejszy do analizy jest więc w tym obszarze błąd bezwzględny Δ_i, lub względny δ_i, zaś postacią δ_{Ri} można posługiwać się jedynie w ograniczonym zakresie – np. gdy: $|\varepsilon_i| \ll 1$, lub tylko dla dodatnich przyrostów ε_i. Błąd δ_{Ri} jest natomiast bardzo użyteczny gdy $\delta_{\varepsilon i} = 0$, gdyż wówczas: $\delta_{Ri} = \delta_{i0}$, a więc w całym zakresie zmian ε_i jest on stały. Błąd bezwzględny Δ_i i względny δ_i są stałe, gdy $\Delta_{i0} = 0$ oraz $\Delta_{\varepsilon i} = \text{const.}$

Błędy rzeczywistych rezystancji mogą przebiegać inaczej niż na rys. 8.1. Gdyby były znane bieżące wartości i znaki błędów poszczególnych składowych rezystancji, można by ze wzorów (8.1) – (8.3) wyznaczać dla każdej chwili błędy wypadkowe rezystancji i na ich podstawie – błędy parametrów zewnętrznych mostka. Byłoby to jednak zadanie, nawet przy obecnych możliwościach obliczeniowych, dość trudne do realizacji przy szybkich i przypadkowych zmianach rezystancji. Tak duża liczba informacji byłaby też nie do wykorzystania i przy zautomatyzowanym przetwarzaniu wymagałaby kompresji i klasyfikacji danych. Dlatego stosuje się inny sposób postępowania. Zazwyczaj podawane są jedynie różne wartości miar błędów poszczególnych rezystancji. Z nich należy wybrać takie, które są istotne w danych pomiarach i na ich podstawie stworzyć miary błędów każdej rezystancji R_i dla całego zakresu jej zmian. Należy więc określić zależności zarówno dla błędów systematycznych granicznych, jak i dla średniokwadratowych błędów przypadkowych (lub niepewności pomiarowych) z uwzględnieniem stopnia korelacji ich składowych. Miary te można będzie wykorzystać następnie do opisu dokładności parametrów zewnętrznych mostka.

Niech jako miary będą dane, niezależne od siebie, granice przedziałów występowania błędów stałych podczas określonych pomiarów (błędów systematycznych o nieznanej wartości), oznaczone jako $\pm|\Delta_{i0}|$ i $\pm|\delta_{i0}|$ oraz $\pm|\Delta_{\varepsilon i}|$ i $\pm|\delta_{\varepsilon i}|$ dla wartości początkowej R_{i0} i przyrostu ε_i rezystancji R_i. Na podstawie wzorów (8.1) – (8.4) z najgorszego przypadku (suma wartości bezwzględnych niezależnych od siebie błędów granicznych wraz z ich współczynnikami wagi) można oszacować systematyczne **błędy graniczne rezystancji R_i**. Otrzymuje się:

$$|\Delta_i| \leq (1+\varepsilon_i)|\Delta_{i0}| + R_{i0}|\Delta_{\varepsilon i}| \tag{8.5}$$

$$|\delta_{Ri}| \leq |\delta_{i0}| + \frac{|\Delta_{\varepsilon i}|}{1+\varepsilon_i} = |\delta_{i0}| + |\delta_{\varepsilon i}|\frac{|\varepsilon_i|}{1+\varepsilon_i} \tag{8.6}$$

oraz

$$|\delta_i| \leq |\delta_{i0}| + |\Delta_{\varepsilon i}| = (1+\varepsilon_i)|\delta_{i0}| + |\varepsilon_i||\delta_{\varepsilon i}| \tag{8.7}$$

Granice zmian błędów rezystancji R_i zależą od jej wartości. Ze wzoru (8.6) i rys. 8.1 wynika np., że wartości błędu δ_{Ri} dla przyrostów $\varepsilon_i > -0{,}5$ nie przekroczą obszaru pomiędzy dwiema równoległymi prostymi $\pm(|\delta_{i0}| + |\delta_{\varepsilon i}|)$. Tak zdefiniowane granice podane są tu z nadmiarem. Ich przebieg można aproksymować bardziej precyzyjnie liniami łamanymi przez dwie sieczne $\pm(-2|\delta_{\varepsilon i}|\varepsilon_i + |\delta_{i0}|)$ w przedziale $-0{,}5 \leq \varepsilon_i \leq 0$ i dalej przez dwie pary stycznych, w tym dla przedziału $0 < \varepsilon_i \leq 1$ przez proste skośne $\pm(|\delta_{\varepsilon i}|\varepsilon_i + |\delta_{i0}|)$ i dla $\varepsilon_i > +1$ – przez poprzednie dwie proste równoległe. Natomiast obszar zmian błędu δ_i w całym zakresie przyrostu $\varepsilon_i > 0$ jest ograniczony przez dwie proste skośne $\pm[(|\delta_{i0}| + |\delta_{i0}|)\varepsilon_i + |\delta_{i0}|]$, rozsunięte podobnie jak poprzednio o $\pm|\delta_{i0}|$ dla $\varepsilon_i = 0$. Zaś dla przyrostów ujemnych $\varepsilon_i < 0$ obszar błędów δ_i jest ograniczony prostymi $\pm\left[-\left(\left|\delta_{\varepsilon i}\right|+\left|\delta_{i0}\right|\right)\varepsilon_i+\left|\delta_{i0}\right|\right]$. Granice błędów składowych mogą zależeć od siebie. Często zależność ta jest znana lub możliwa do przewidzenia, na przykład gdy oba błędy są spowodowane wspólną przyczyną, w tym temperaturą otoczenia. Wówczas należy to uwzględnić przy wyznaczaniu granic obszaru błędów poszczególnych rezystancji.

Podstawową **miarą oceny zjawisk losowych** jest wartość średniokwadratowa. Wzory opisujące ją dla **błędów przypadkowych** lub niepewności pomiarowych rezystancji R_i są następujące:

$$\overline{\Delta}_i = +\sqrt{(1+\varepsilon_i)^2\overline{\Delta}_{i0}^{\,2} + R_{i0}^2\overline{\Delta}_{\varepsilon i}^{\,2} + 2k_i(1+\varepsilon_i)R_{i0}\overline{\Delta}_{i0}\overline{\Delta}_{\varepsilon i}} \tag{8.8}$$

$$\overline{\delta}_{Ri} \equiv \frac{\overline{\Delta}_i}{R_i} = +\sqrt{\overline{\delta}_{i0}^{\,2} + \left(\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\right)^2\overline{\delta}_{\varepsilon i}^{\,2} + 2k_i\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\overline{\delta}_{i0}\overline{\delta}_{\varepsilon i}} \tag{8.9}$$

lub

$$\overline{\delta}_i \equiv \frac{\overline{\Delta}_i}{R_{i0}} = +\sqrt{(1+\varepsilon_i)^2\overline{\delta}_{i0}^{\,2} + \varepsilon_i^2\overline{\delta}_{\varepsilon i}^{\,2} + 2k_i\varepsilon_i(1+\varepsilon_i)\overline{\delta}_{i0}\overline{\delta}_{\varepsilon i}} \tag{8.10}$$

gdzie:

$k_i \subset (-1...0...+1)$ – współczynnik korelacji błędów przypadkowych obu składowych rezystancji R_i.

Błędy składowych rezystancji mogą znacznie różnić się od siebie, a nawet któryś z nich może być pomijalny. Na przykład dla termorezystorów z bardzo czystego metalu, wskutek różnic wymiarów geometrycznych, występuje rozrzut ich wartości początkowych, zaś przyrosty względne można w praktyce traktować jako identycznie zależne od temperatury i są one znormalizowane dla rożnych klas dokładności.

Współczynniki korelacji pomiędzy błędami przypadkowymi lub niepewnościami pomiarowymi składowych rezystancji również mogą być różne. W zasadzie wystarczy rozpatrywać w praktyce tylko dwie sytuacje:

– silne skorelowanie, gdy $k_i = \pm 1$,

– jego brak, gdy $k_i = 0$.

Wzory (8.8) – (8.10) upraszczają się wówczas w pierwszym wypadku do sumy lub wartości bezwzględnej różnicy ich składników w postaci średniokwadratowych błędów składowych rezystancji wraz z ich współczynnikami wagi, a w drugim – do pierwiastka z sumy kwadratów tych składników.

8.3. Miary dokładności transmitancji rozwarciowej r_{21} mostka 4R jako czwórnika typu X

8.3.1. Błąd bieżący Δ_{21}

Dla początkowych wartości rezystancji R_{i0} mostek powinien być w równowadze, a jego transmitancja $r_{21} = 0$. Jeśli wówczas występuje jednak błąd bezwzględny Δ_{210} (błąd zera), to odpowiadający mu błąd względny transmitancji δ_{21} rośnie do ∞. Dlatego bardziej przydatne w praktyce jest stosowanie dla r_{21} bezwzględnych miar niedokładności. W zależnościach miar opisujących niedokładność transmitancji r_{21} mostka 4R jako czwórnika oraz niedokładność jego napięcia wyjściowego U'_{DC}, wykorzysta się wzory (8.1) – (8.4) dla błędów chwilowych rezystancji i wzory (8.5) – (8.10) dla ich błędów granicznych oraz miar losowych.

Z podstawowego wzoru (2.6) dla r_{21} za pomocą różniczki zupełnej wyznacza się związek pomiędzy małymi przyrostami wszystkich występujących w nim parametrów. Nadając tym przyrostom sens fizyczny chwilowych wartości bezwzględnych błędów pomiarowych Δ_i i wprowadzając błędy względne δ_i, δ_{Ri} rezystancji R_i otrzymuje się:

$$\Delta_{21} = \frac{1}{\sum R_i}\left[(R_3 - r_{21})\Delta_1 + (R_1 - r_{21})\Delta_3 - (R_4 + r_{21})\,\Delta_2 - (R_2 + r_{21})\Delta_4\right] \quad (8.11a)$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{\sum R_i}\left[R_{10}\,(R_3 - r_{21})\delta_1 + R_{30}\,(R_1 - r_{21})\delta_3 - R_{20}\,(R_4 + r_{21})\,\delta_2 - R_{40}(R_2 + r_{21})\delta_4\right]$$

(8.11b)

$$\Delta_{21} = \frac{R_1(R_3 - r_{21})}{\sum R_i}\delta_{R1} - \frac{R_2(R_4 + r_{21})}{\sum R_i}\delta_{R2} + \frac{R_3(R_1 - r_{21})}{\sum R_i}\delta_{R3} - \frac{R_4(R_2 + r_{21})}{\sum R_i}\delta_{R4} \quad (8.11c)$$

gdzie:

$i \in (1,\dots 4)$ – numer ramienia mostka

Δ_{21} – wartość chwilowa błędu bezwzględnego transmitancji r_{21} mostka

$\delta_i = \dfrac{\Delta_i}{R_{i0}}$, $\delta_{Ri} = \dfrac{\Delta_{Ri}}{R_i}$ – błędy względne definiowane względem rezystancji początkowej R_{i0} oraz bieżącej R_i

$r_{21} = \dfrac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i} \equiv r'_0\dfrac{\Delta L'(\varepsilon_i)}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}}$ – transmitancja prądowo-napięciowa mostka jako czwórnika.

W sposób zwarty wzory te zapisuje się jako:

$$\Delta_{21} = \sum W_i \Delta_i = \sum w'_i \delta_i = \sum w'_{R\,i} \delta_{Ri} \qquad (8.11d)$$

gdzie:

$$W_i = \frac{(-1)^{i+1} R_j - r_{21}}{\sum R_i}; \qquad w'_i = R_{i0}\frac{(-1)^{i+1} R_j - r_{21}}{\sum R_i}; \qquad w'_{Ri} = R_i \frac{(-1)^{i+1} R_j - r_{21}}{\sum R_i}$$

– współczynniki wagi błędów Δ_i, δ_i i δ_{Ri},

$(-1)^{i+1} = +1$ dla ramion oznaczonych liczbami nieparzystymi 1, 3 oraz $= -1$ dla liczb parzystych 2, 4

j = (i+2) mode 4, czyli dla i = 1, 2, 3, 4, otrzymuje się kolejno j = 3, 4, 1, 2.

Mnożnik $(-1)^{i+1}$ wyraża znaną w praktyce zależność, że przy tym samym znaku błędów rezystancji sąsiednich ramion mostka ich wpływy odejmują się i nawet mogą się skompensować całkowicie.

Wzory (8.11a – c) można różnie przekształcać, np. (8.11c) zapisać nieco krócej jako

$$\Delta_{21} = \frac{R_1 R_3 (\delta_{R1} + \delta_{R3}) - R_2 R_4 (\delta_{R2} + \delta_{R4}) - r_{21} \sum R_i \delta_{Ri}}{\sum R_i} \qquad (8.12a)$$

zaś dla rezystancji przedstawianych jako $R_i = R_{i0}(1+\varepsilon_i)$ z (8.11d) wynika

$$\Delta_{21} = \sum w'_{R\,i} \delta_{Ri} = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \sum \left[(-1)^{i+1}(1+\varepsilon_j) - \frac{r_{12}}{R_{j0}} \right] (1+\varepsilon_i)\delta_{Ri} \qquad (8.12b)$$

oraz po uwzględnieniu postaci iloczynowej transmitancji $r_{21} = t'_0 \frac{\Delta L'(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$

$$\Delta_{21} = \sum w'_{R\,i} \delta_{Ri} = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \sum \left[(-1)^{i+1}(1+\varepsilon_j) - \frac{\Delta' L}{R_{j0}(1+\varepsilon_{\Sigma R})\sum R_{i0}} \right] (1+\varepsilon_i)\delta_{Ri} \qquad (8.12c)$$

Dla podstawowej postaci transmitancji $r_{21} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\sum R_i}$ z (8.11c) otrzymuje się

natomiast

$$\Delta_{21}=\frac{R_1(R_2+R_3)(R_3+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}\delta_{R1}-\frac{R_2(R_1+R_4)(R_3+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}\delta_{R2}+$$
$$+\frac{R_3(R_1+R_2)(R_1+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}\delta_{R3}-\frac{R_4(R_1+R_2)(R_2+R_3)}{\left(\sum R_i\right)^2}\delta_{R4} \tag{8.13}$$

Błędy każdej z rezystancji R_i mogą zmieniać się wraz z jej wartością. W określonych przedziałach ε_i ich przebiegi można przybliżać wartościami stałymi lub prostymi funkcjami. Np. dla czujników pomiarowych błędy δ_i lub δ_{Ri} zazwyczaj określa się poprzez błąd względny δ_{i0} ich wartości początkowej R_{i0} i maksymalny błąd bezwzględny $\Delta_{\varepsilon i}$ lub względny $\delta_{\varepsilon i}$ przyrostu ε_i w określonym zakresie jego zmian. Z (8.3) i (8.12c) otrzymuje się

$$\Delta_{21}=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\sum\left[(-1)^{i+1}(1+\varepsilon_j)-\frac{t'_0\,\Delta L'(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})R_{j0}}\right]\left[(1+\varepsilon_i)\delta_{i0}+\Delta_{\varepsilon i}\right] \tag{8.14}$$

lub ogólnie jako

$$\Delta_{21}=\sum w'_{i0}\,\delta_{i0}+\sum W'_{\varepsilon i}\Delta_{\varepsilon i} \tag{8.14a}$$

gdzie:

$$w'_{i0}=w'_{Ri}=(1+\varepsilon_i)w'_i\ ;$$

$$W'_{\varepsilon i}=w'_i\,.$$

Jeśli jakieś ramię mostka nie zmienia się, to we wzorach (8.11 - 8.14) występuje jedynie błąd wartości początkowej jego rezystancji.

W pomiarach wieloparametrowych wszystkie składniki we wzorach (8.11a – c) lub (8.14) mogą zmieniać się niezależnie od siebie. Wzory te upraszczają się w szczególnych sytuacjach. Możliwych kombinacji jest dość dużo. Kilka podstawowych rozpatruje się w sekcji 8.5.

8.3.2. Graniczny błąd systematyczny $|\Delta_{21}|_m$ transmitancji r_{21}

Z podanych powyżej wzorów można wyznaczyć bieżące błędy transmitancji tylko wówczas, gdy znane są znaki i wartości błędów poszczególnych rezystancji R_i mostka. Zazwyczaj jednak do dyspozycji są jedynie różne miary ich zbiorów, np. błędy graniczne lub przedziały niepewności pomiarowych o zadanym prawdopodobieństwie. Z zależności (8.11) – (8.14) dla bieżących wartości błędów otrzymuje się wzory dla błędów systematycznych granicznych oraz dla miar losowych (błędów przypadkowych lub niepewności pomiarowych) z uwzględnieniem korelacji ich składowych.

Jeśli dla poszczególnych wartości rezystancji R_i dane są błędy systematyczne graniczne i są one od siebie niezależne, to z najgorszego przypadku szacuje się graniczne błędy parametrów wyjściowych. Na podstawie (8.11d) błąd graniczny $|\Delta_{21}|_m$ zapisuje się ogólnie jako

$$|\Delta_{21}| \leq |\Delta_{21}|_m = \sum |W_i||\Delta_i| = \sum |w'_i||\delta_i| = \sum |w'_{R\,i}||\delta_{R\,i}| \tag{8.15}$$

Z (8.11c) wynika zaś:

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[R_1(R_3 - r_{21})|\delta_{R1}| + R_2(R_4 + r_{21})|\delta_{R2}| + R_3(R_1 - r_{21})|\delta_{R3}| + R_4(R_2 + r_{21})|\delta_{R4}|\right] \tag{8.15a}$$

lub po uwzględnieniu postaci r_{21} z (8.13) wynika

$$|\Delta_{21}|_m = \begin{bmatrix} \dfrac{R_1(R_2+R_3)(R_3+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}|\delta_{R1}| + \dfrac{R_2(R_1+R_4)(R_3+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}|\delta_{R2}| + \\ + \dfrac{R_3(R_1+R_2)(R_1+R_4)}{\left(\sum R_i\right)^2}|\delta_{R3}| + \dfrac{R_4(R_1+R_2)(R_2+R_3)}{\left(\sum R_i\right)^2}|\delta_{R4}| \end{bmatrix} \tag{8.15b}$$

Wszystkie współczynniki wagi $|w'_{Ri}|$ błędów $|\delta_{Ri}|$ są nieujemne, gdyż rezystancje $R_i \geq 0$. Dla wzoru (8.15a) można je zapisać ogólnie jako:

$$|w'_{Ri}| = R_i\,\frac{R_j + (-1)^i r_{21}}{\sum R_i} = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[(1+\varepsilon_j) + (-1)^i \frac{t'_0\,\Delta L'(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})R_{j0}}\right](1+\varepsilon_i) \tag{8.15d}$$

Jeśli błąd graniczny $|\delta_{Ri}|$ każdej z rezystancji R_i jest podany w postaci błędu granicznego $|\delta_{i0}|$ jej początkowej wartości R_{i0} oraz przebiegu błędu granicznego $|\Delta_{\varepsilon i}(\varepsilon_i)|$ przyrostu ε_i – np. jak na rys.8.1, lub tylko znana jest jego maksymalna wartość $|\Delta_{\varepsilon i}|_{max}$ dla pewnego zakresu ε_i, to:

$$|\Delta_{21}(\varepsilon_i)|_m = \sum |w'_{Ri}|\left(|\delta_{i0}| + \frac{1}{1+\varepsilon_i}|\Delta_{\varepsilon i}(\varepsilon_i)|\right) \tag{8.16}$$

oraz

$$|\Delta_{21}(\varepsilon_i)|_m \leq \sum |w'_{Ri}|\left[|\delta_{i0}| + \left(\frac{1}{1+\varepsilon_i}|\Delta_{\varepsilon i}(\varepsilon_i)|\right)_{max}\right] \tag{8.16a}$$

lub

$$\left|\Delta_{21}\right|_m \leq \sum \left|w'_{Ri}\right| \left(\left|\delta_{i0}\right| + \frac{1}{1+\left.\varepsilon_i\right|_{min}} \left|\Delta_{\varepsilon i}\right|_{max} \right) \tag{8.16b}$$

Gdy występują tylko błędy graniczne $\left|\delta_{i0}\right| \neq 0$, zaś błędy przyrostów $\Delta_{\varepsilon i} \to 0$ (np. dla metalowych czujników temperatury z odpowiednio czystego materiału), to wzór (8.16) upraszcza się

$$\left|\Delta_{21}\right|_m = \sum \left|w'_{Ri}\right| \left|\delta_{i0}\right| \tag{8.16c}$$

8.3.3. Losowe miary dokładności transmitancji r_{21}

Losowe miary dokładności parametrów wyjściowych mostka lub układu zawierającego mostek oraz oceny rozrzutu wyników pomiarów tych parametrów wyznacza w następujących sytuacjach

– **dla niepewności pomiarowych typu A** np. przy kalibracji i sprawdzaniu przetwornika

– **dla składowej przypadkowej błędów** pochodzącej od błędów przypadkowych układu jego elementów, w tym szumów cieplnych rezystancji R_i i zakłóceń zmieniających się w procesie pomiarowym podczas użytkowania (stacjonarnych i ergodycznych co najwyżej w skończonych odcinkach czasu)

– **przy wyznaczaniu uśrednionej oceny niedokładności** zbioru egzemplarzy mostków w produkcji lub w eksploatacji;

– **przy ocenie parametrów rozkładu wielkości mierzonych przypadkowo zmiennych.**

Miary błędów przypadkowych parametrów i niepewności pomiarowe typu A wyników ich pomiaru liczy się z tych samych wzorów o postaci pierwiastka z sumy kwadratów średniokwadratowych miar niedokładności wielkości wpływających wraz z ich współczynnikami wagi i dodatkowych składników uwzględniających korelację wzajemną. Dalsze rozważania można więc ograniczyć do wyznaczania błędów przypadkowych. Jeśli np. błędy losowe są silnie skorelowane to średniokwadratowe ich miary dodają się do siebie algebraicznie wraz ze znakiem współczynnika korelacji $k_{ji} \to \pm 1$. Np. dla dwu takich błędów o indeksach i, j otrzymuje się ich wypadkowy błąd średniokwadratowy w postaci:

$$\overline{\delta_{ij}} = \left| w_i \overline{\delta}_i \pm w_j \overline{\delta}_j \right|$$

Średniokwadratowa losowa miara niedokładności transmitancji (np. błąd przypadkowy), przy nieskorelowanych ze sobą zarówno błędach $\overline{\delta}_{Ri}$ jak i składowych $\overline{\delta}_{i0}$, $\overline{\Delta}_{\varepsilon i}$ każdego z nich, wynika ze wzoru (8.9) i jest następująca:

$$\overline{\Delta}_{21} = \sqrt{\sum w'^2_{Ri}\left(\overline{\delta}_{Ri}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} w'^2_{Ri}\left[\left(\overline{\delta}_{i0}\right)^2 + \frac{\left(\overline{\Delta}_{\varepsilon i}\right)^2}{(1+\varepsilon_i)^2}\right]} \tag{8.17}$$

gdzie:

$\overline{\Delta}_{21}$, $\overline{\delta}_{Ri}$, $\overline{\delta}_{i0}$, $\overline{\Delta}_{\varepsilon i}$ – średniokwadratowe błędy przypadkowe lub niepewności pomiarowe rezystancji R_i.

Po wyznaczeniu błędu średniokwadratowego wyznacza się przedziały błędów przypadkowych lub niepewności rozszerzone o zadanym poziomie ufności z uwzględnieniem rozkładów cząstkowych innych niż normalny i rozkładu Studenta przy niezbyt licznej liczbie pomiarów. Dla mostków błąd przypadkowy $\overline{\Delta}_{21}$, jest zazwyczaj znacznie mniejszy od błędu granicznego $|\Delta_{21}|_m$. Przy ocenie średniego błędu dla serii przetworników w produkcji, bądź dla pomiarów wieloma przetwornikami, można założyć, że rozrzut błędów systematycznych elementów mostka jest przypadkowy i błąd ten liczyć wg wzoru (8.17) z niezbyt dużą ufnością.

8.4. Miary dokładności rezystancji rozwarciowych mostka 4R

Błędy rezystancji rozwarciowych R^{∞}_{AB}, R^{∞}_{CD} na przekątnych mostka czteroramiennego (4R) wyznacza się z różniczki zupełnej ich zależności R_i podanych w macierzy (2.2). Bieżące błędy względne opisane są wzorami:

$$\delta_{RAB} = R^{\infty}_{AB}\left[\frac{R_1\delta_{R1} + R_2\delta_{R2}}{(R_1+R_2)^2} + \frac{R_3\delta_{R3} + R_4\delta_{R4}}{(R_3+R_4)^2}\right] \tag{8.18a}$$

oraz

$$\delta_{RCD} = R^{\infty}_{CD}\left[\frac{R_1\delta_{R1} + R_4\delta_{R4}}{(R_1+R_4)^2} + \frac{R_2\delta_{R2} + R_3\delta_{R3}}{(R_2+R_3)^2}\right] \tag{8.18b}$$

Współczynniki wagi błędów poszczególnych rezystancji R_i mostka w ogólnym wypadku są różne. Wzory (8.18a,b) można też przekształcić podobnie jak dla transmitancji – do postaci zawierających względne wartości rezystancji

m i n mostka w stanie równowagi oraz ich przyrosty względne ε_i od tego stanu. Np. δ_{RAB} nieobciążonego klasycznego mostka 4R wynosi:

$$\delta_{RAB}=\frac{1}{(1+m)(1+n)(1+\varepsilon_{\Sigma R})}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{n(1+\varepsilon_{34})[(1+\varepsilon_1)\,\delta_{R1}+m(1+\varepsilon_2)\,\delta_{R2}]}{(1+\varepsilon_{12})}+\\ +\dfrac{(1+\varepsilon_{12})[(1+\varepsilon_3)m\,\delta_{R3}+(1+\varepsilon_4)\,\delta_{R4}]}{(1+\varepsilon_{34})}\end{array}\right\} \tag{8.19a}$$

Przy czterech różnych rezystancjach R_i oraz niezależnych od siebie ich przyrostach i błędach otrzymuje się dość zawiłe zależności. Czynnik $\sum R_{i0}(1+\varepsilon_{\Sigma R})$ lub tylko jego przyrost z mianownika wzorów dla R_{CD} i R_{AB} występuje we wszystkich opisach błędów parametrów na zaciskach mostka.

Błędy wartości początkowych R_{CD0} i R_{AB0} rezystancji na zaciskach mostka 4R w równowadze otrzymuje się wstawiając do wzorów (8.18a,b) odpowiednie wartości $R_i = R_{i0}$ dla danego rodzaju zasilania oraz ich błędy $\delta_{Ri} = \delta_{i0}$. Np. dla mostka klasycznego wynoszą one:

$$\delta_{RAB0}=\frac{n\left(\delta_{10}+m\delta_{20}\right)+m\delta_{30}+\delta_{40}}{(1+n)(1+m)} \tag{8.20a}$$

oraz

$$\delta_{RCD0}=\frac{m\left(\delta_{10}+n\delta_{40}\right)+n\delta_{30}+\delta_{40}}{(1+n)(1+m)} \tag{8.20b}$$

Wzory (8.19) stanowią podstawę do wyznaczenia odpowiadających im zależności dla błędów systematycznych granicznych i przypadkowych oraz niepewności pomiarowych w taki sam sposób jak stosowany już dla transmitancji.

Przy jednakowych błędach granicznych $|\delta_{Ri}|=|\delta_R|$ wszystkich rezystancji mostka otrzymuje się $|\delta_{RAB}|=|\delta_{RCD}|=|\delta_R|$, tj. równe im również wartości błędów granicznych rezystancji na zaciskach, w tym też dla rezystancji początkowych $|\delta_{RAB0}| = |\delta_0|$ oraz $|\delta_{RCD0}| = |\delta_0|$.

Wzory dla rezystancji wyjściowych mostka dwuprądowego mają takie same postacie jak (8.18a, b). Jednakże, przy trzech określonych początkowych rezystancjach ramion, jeśli mostek doprowadza się do równowagi po kolei dla jednoźródłowego oraz dwuprądowego zasilania i każdego z wyjść, np. poprzez regulację R_{30}, to jej wartości w ogólnym wypadku różnią się – patrz tabela 1.3.

Mostek dwuprądowy zrównoważony równocześnie dla obu wyjść ma jednakowe rezystancje przeciwległe, tj. $m = n$ i jak wykazano w rozdziale 3, działa on prawidłowo przy biegu jałowym ich obu bądź przy zwarciu. Wówczas są też jednakowe napięciowe czułości początkowe $t_0'' = t_0'''$ oraz obie rezystancje wyjściowe

$$R_{AB0} = R_{CD0} = 0{,}5R_{10}(1+m)$$

i ich błędy początkowe

$$\delta_{RAB0} = \delta_{RCD} = (1+m)^{-1}(\delta_{10}+m\delta_{20}+\delta_{30}+m\delta_{40})$$

Jeśli przyrosty $\varepsilon_{AB}^{\infty}$ i $\varepsilon_{CD}^{\infty}$ rezystancji rozwarciowych wyznacza się z pomiarów dwu wartości rezystancji na zaciskach mostka, to bieżące błędy bezwzględne tych przyrostów, opisane są następująco:

$$\Delta_{\varepsilon AB} = \frac{R_{AB}^{\infty}}{R_{AB0}}\left(\delta_{RAB} - \delta_{RAB0}\right) \tag{8.21a}$$

$$\Delta_{\varepsilon CD} = \frac{R_{CD}^{\infty}}{R_{CD0}}\left(\delta_{RCD} - \delta_{RCD0}\right) \tag{8.21b}$$

Po uwzględnieniu wzorów (8.18a,b) i (8.19a,b) otrzyma się dość rozbudowane postacie, ale części wspólne błędów δ_{AB} i δ_{AB0} lub δ_{CD} i δ_{CD0} odejmują się.

Błędy graniczne przyrostów wyprowadza się w oparciu o miary niedokładności tych rezystancji i obie pary wzorów (8.18a, b i 8.20a, b). Jeśli znane są tylko błędy graniczne pomiaru obu wartości rezystancji zewnętrznych mostka, to przy szacowaniu błędów granicznych ich przyrostów należy, wewnątrz nawiasów w (8.21a, b), dodać do siebie te błędy. Gdy są one jednakowe to otrzyma się podwójną wartość. Przy występowaniu rozrzutu wyników wielokrotnych pomiarów i wyznaczaniu ich niepewności pomiarowych trzeba też określić współczynniki korelacji.

Podane powyżej wzory na błędy rozwarciowych parametrów mostka niezrównoważonego jako czwórnika stanowią również podstawę do opisów dokładności jego parametrów roboczych zarówno przy obciążonym wyjścia jak i przy innym niż prądowe zasilaniu.

8.5. Miary dokładności r_{21} w przypadkach szczególnych mostka

W poprzednim punktach wykazano, że błędy parametrów mostka zależą zarówno od wartości początkowych R_{i0} i przyrostów $\varepsilon_i \neq 0$ rezystancji ramion mostka oraz od ich błędów. Wszystkie składniki ze wzorów (8.11 – 8.21) mogą ulegać zmianom. Wzory te upraszczają się w przypadkach szczególnych wynikających z:

- wartości i relacji pomiędzy błędami składowymi każdej rezystancji oraz błędami ramion mostka
- zależności między rezystancjami początkowymi mostka (np. symetria względem jednej przekątnej – tj. $m = 1$ lub $n = 1$, symetria względem obu przekątnych – tj. $m = n = 1$ oraz antysymetria: $m = n$ lub $n = m^{-1}$)
- powiązania przyrostów ε_i oraz występowania tylko niektórych z nich (np. dwu lub tylko jednego).

Możliwych kombinacji jest dosyć dużo. Poniżej rozpatrzy się kilka podstawowych przypadków.

8.5.1. Niedokładność mostka przy $r_{21} = 0$

Błąd bieżący zera transmitancji mostka występuje przy $r_{21} = 0$ dla podstawowego jego stanu równowagi, tj. gdy równocześnie wszystkie przyrosty $\varepsilon_i = 0$. Wynika on z błędów δ_{i0} wartości początkowych rezystancji R_{i0} i wynosi:

$$\Delta_{21\,0} = t'_0 \left(\delta_{10} + \delta_{30} - \delta_{20} - \delta_{40}\right) \tag{8.22a}$$

Błąd ten może być równy zeru dla różnych kombinacji błędów δ_{i0}, np. gdy są one jednakowe dla pary ramion sąsiednich, lub przeciwne dla ramion przeciwległych.

Graniczny błąd systematyczny zera transmitancji mostka wyznacza się gdy znane są tylko błędy graniczne $\left|\delta_{i0}\right|$ początkowych wartości rezystancji R_{i0}. Otrzymuje się go ze wzoru (8,15c)

$$\left|\Delta_{21\,0}\right|_m = \frac{R_{10}\,R_{30}}{\sum R_{i0}} \sum \left|\delta_{i0}\right| = t'_0 \sum \left|\delta_{i0}\right| \tag{8.22b}$$

Miara losowa zera transmitancji mostka przy znanych i nieskorelowanych ze sobą błędach przypadkowych $\overline{\delta}_{i0}$ początkowej wartości rezystancji R_{i0} wynosi

$$\overline{\Delta}_{21\,0}=\frac{R_{10}\,R_{30}}{\sum R_{i0}}\sqrt{\sum\overline{\delta}_{i0}^{\,2}}=t'_0\sqrt{\sum\overline{\delta}_{i0}^{\,2}} \tag{8.22c}$$

8.5.2. Jednakowe błędy względne $\delta_{R\,i}$ rezystancji mostka

Ze wzoru (8.11c) dla jednakowych błędów względnych $\delta_{Ri}=\delta_R$ wszystkich rezystancji mostka otrzymuje się:

$$\Delta_{21}=r_{21}\,\delta_R \tag{8.23}$$

Nie występuje tu błąd zera $\Delta_{12\,0}$. Błąd bezwzględny transmitancji r_{21} jest do niej proporcjonalny, a więc i jej błąd względny równa się δ_R, czyli jest taki sam jak wszystkich rezystancji mostka.

8.5.3. Jednakowe błędy względne δ_i

Przy jednakowych błędach $\delta_i=\delta$, określonych względem wartości początkowych R_{i0}, ze wzoru (8.13c) wynika

$$\Delta_{21}=\frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4\right)-f'\left(\varepsilon_i\right)\right]\delta \tag{8.24}$$

gdzie: $f'(\varepsilon_i)=\dfrac{\Delta L'(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$ – funkcja niezrównoważenia

Tak jak i poprzednio przy początkowej równowadze mostka nie występuje błąd zera transmitancji Δ_{120}. Poza równowagą błąd Δ_{12} zależy od nieliniowości transmitancji r_{21} – wyrażenie w nawiasie kwadratowym. Wartości względne m i n rezystancji początkowych wpływają na ten błąd pośrednio – poprzez czułość początkową t'_0 i względny przyrost sumy rezystancji $\varepsilon_{\Sigma R}$, który występuje też w mianowniku funkcji niezrównoważenia $f'(\varepsilon_i)$. Równość $\delta_{Ri}=\delta_R$ lub $\delta_i=\delta$ błędów wszystkich rezystancji mostka jest mało prawdopodobna w praktyce, ale ze względu na addytywny udział każdego z tych błędów w błędzie wypadkowym Δ_{21} wniosek dotyczy wspólnego ich składnika.

8.5.4. Pomijalne błędy przyrostów rezystancji $\Delta_{\varepsilon i}\to 0$

Występują tylko niejednakowe błędy wartości początkowych rezystancji $\delta_{i0}\neq 0$. Wówczas: $\delta_i=\left(1+\varepsilon_i\right)\delta_{i0}$, zaś

$$\Delta_{21} = \sum w'_{Ri} \delta_{i0} \tag{8.25}$$

Na podstawie tego wzoru można wyznaczyć błąd graniczny i przypadkowy dla tego przypadku.

8.5.5 Błąd graniczny $|\Delta_{21}|_m$ przy jednakowych błędach granicznych $|\delta_{R\,i}|$ ramion mostka

Gdy błędy graniczne rezystancji są jednakowe, czyli $|\delta_{Ri}| = |\delta_R|$, to z (8.15) lub z (8.15a i c) wynika

$$|\Delta_{21}|_m = |\delta_R| \sum |w'_{Ri}| \tag{8.26}$$

gdzie:

$$\sum |w'_{Ri}| = \frac{2\left(R_1 R_3 + R_2 R_4\right) - r_{21}\left(R_1 + R_3 - R_2 - R_4\right)}{\sum R_i}$$

lub

$$\sum |w'_{Ri}| = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \sum \left[\left(1+\varepsilon_j\right) + (-1)^i \frac{r_{12}}{R_{j0}}\right]\left(1+\varepsilon_i\right)$$

Po wstawieniu transmitancji $r_{21} = \dfrac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i}$ otrzymuje się

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(1 + 2\frac{R_2 + R_4}{\sum R_i}\right)R_1 R_3 + \left(1 + 2\frac{R_1 + R_3}{\sum R_i}\right)R_2 R_4\right]|\delta_R| \tag{8.26a}$$

lub przy wyodrębnieniu wyrażeń dla par rezystancji

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(3 - 2\frac{R_1 + R_3}{\sum R_i}\right)R_1 R_3 + \left(3 - 2\frac{R_2 + R_4}{\sum R_i}\right)R_2 R_4\right]|\delta_R| \tag{8.26b}$$

Dla wartości względnych rezystancji z (8.26a) wynika

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t_0'}{1+\varepsilon'_{\Sigma R}} \left[\begin{array}{l} \left(1+2\frac{m(1+\varepsilon_2)+n(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon'_{\Sigma R})\sum r_{10}}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)+ \\ +\left(1+2\frac{(1+\varepsilon_1)+mn(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon'_{\Sigma R})\sum r_{10}}\right)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4) \end{array} \right] |\delta_R| \tag{8.26c}$$

lub bezpośrednio z (8.26) dla transmitancji $r_{21} = t'_0 \frac{\Delta L'(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$.

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \left[\begin{array}{l} 4+2\sum\varepsilon_i + 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4)+ \\ -\frac{\Delta' L(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left(a+\frac{\varepsilon_1+mn\,\varepsilon_3-m\,\varepsilon_2-n\,\varepsilon_4}{\sum r_{i0}}\right) \end{array} \right] |\delta_R| \tag{8.26d}$$

gdzie:

$$\sum r_{i0} = (1+m)(1+n)$$

$$a = \frac{(1-m)(1-n)}{(1+m)(1+n)}$$

Przy $m = 1$ lub $n = 1$ współczynnik $a = 0$ i wzór ten częściowo upraszcza się, zaś gdy równocześnie $m = 1 = n$ otrzymuje się

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{R_{10}}{4+\sum\varepsilon_i}\left[4+2\sum\varepsilon_i + 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) - \Delta' L(\varepsilon_i)\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_4}{4+\sum\varepsilon_i}\right]|\delta_R| \tag{8.26.e}$$

W początkowym stanie równowagi: $\varepsilon_i=0$, $\varepsilon_{\Sigma R}=0$, $|\delta_R| = |\delta_0|$ i z (8.26d) wynika błąd graniczny dla transmitancji równej zeru

$$|\Delta_{210}|_m = 4t'_0|\delta_0| \tag{8.26f}$$

Przy niezbyt dużych przyrostach ε_i, tj. gdy $\varepsilon_i\varepsilon_j \le 0{,}2$, można posłużyć się następującymi przybliżeniami wzoru (8.26b).

$$|\Delta_{21}|_m \approx 4t'_0\frac{|1+\varepsilon_{\Sigma R}+0{,}5\sum\varepsilon_i - 0{,}25a\Delta' L|}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})^2}|\delta_R| < 4t'_0\frac{|1+\sum\varepsilon_i|}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})^2}|\delta_R| \tag{8.26g}$$

Drugi z tych wzorów daje oszacowanie z nadmiarem.

Zaś przy m =1= n i małych przyrostach ε_i oraz przy odniesieniu błędu do czułości początkowej równej $0{,}25R_{10}$ wzór (8.26e) przybliża się następująco:

$$\frac{|\Delta_{21}|_m}{r'_0} \approx \frac{4}{1+0{,}5\sum\varepsilon_i}\left[1+0{,}75\sum\varepsilon_i\right]|\delta_R| \approx 4\left[1+0{,}25\sum\varepsilon_i\right]|\delta_R| \qquad (8.26h)$$

Oba przybliżone wzory zapewniają wystarczającą przy liczeniu błędów dokładność ok. 20 %.

8.5.6 Błędy górnego krańca zakresu transmitancji r_{12}.

Dla transmitancji $r_{12} \geq 0$, np. gdy $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_3 \geq 0$, oraz $-1 \leq \varepsilon_2 \leq 0$ i $-1 \leq \varepsilon_4 \leq 0$. Wszystkie przyrosty ujemne ε_i są ograniczone od dołu wartością -1, zaś od góry przez maksymalną rezystancję wejściową R_{ABmax} mostka wynikającą z dopuszczalnego napięcia U_{ABmax} źródła prądu J. Gdy przyrosty par rezystancji przeciwległych R_1, R_3 oraz R_2, R_4 zmienią równocześnie znaki na przeciwne, to następuje jedynie zamiana ich ról, gdyż transmitancja r_{21} też zmieni znak, ale błędy będą opisane wzorem o takiej samej postaci. Wystarczy więc rozpatrzyć jedną z tych sytuacji.

Transmitancja r_{12} osiąga maksymalną wartość, gdy ujemne przyrosty wynoszą $\varepsilon_2 = -1$ i $\varepsilon_4 = -1$, czyli dla $R_2 = R_4 = 0$ oraz gdy rezystancje R_1, R_3 o przyrostach dodatnich będą możliwie maksymalne. Wówczas mostek degeneruje się do połączonych równolegle rezystancji R_{1m}, R_{3m}, a nawet jedna z nich może być przerwana, np. $R_3 = \infty$. Ich wartości maksymalne wynikają z maksymalnej rezystancji wejściowej mostka $R_{ABmax} = U_{Abmax}/J$. W obu przypadkach maksymalne napięcie wyjściowe jest jednakowe i wynosi: $U'_{DCmax} = U_{ABmax}$.

Błąd bieżący maksymalnej wartości transmitancji r_{21} wynika z (8.11a) lub (8.13) dla R_{1m}, R_{3m} oraz przy $R_2 = R_4$ 0 i wynosi:

$$\Delta_{21} = \frac{R_{3m}^2\,\Delta_1 + R_{1m}^2\,\Delta_3 - R_{1m}\,R_{3m}\left(\Delta_2 + \Delta_4\right)}{\left(R_{1m} + R_{3m}\right)^2} \qquad (8.27a)$$

Błąd ten zależy od błędów wszystkich ramion i osiąga wartości krańcowe, gdy znaki par błędów Δ_1, Δ_3 oraz Δ_2, Δ_4 są przeciwne. Natomiast gdy $R_2 = R_4 \rightarrow 0$ i ponadto $R_3 = \infty$, to $R'_{1m} = R_{ABmax}$, to błąd bezwzględny jest następujący:

$$\Delta_{21} = \Delta_1 = \delta_{R1}\,R_{ABmax}. \qquad (8.27b)$$

Błąd graniczny $|\Delta_{21}|_{mm}$ **górnego krańca zakresu transmitancji r_{12}** wynika z najgorszego przypadku w (8.27)

$$\left|\Delta_{21}\right|_{mm} = \frac{R_{3m}^2\left|\Delta_1\right| + R_{1m}^2\left|\Delta_3\right| + R_{1m}R_{3m}\left(\left|\Delta_2\right| + \left|\Delta_4\right|\right)}{\left(R_{1m} + R_{3m}\right)^2} \tag{8.28}$$

Dla zasilania prądowego i dopuszczalnej rezystancji wejściowej $R_{AB} = R_{ABmax}$, otrzymuje się $r_{21max} = R_{ABmax}$ oraz

$$\left|\Delta_{21}\right|_{mm} = R_{AB\,max}\left(\frac{R_{AB\,max}}{R_{1m}}\left|\delta_{R1}\right| + \frac{R_{AB\,max}}{R_{3m}}\left|\delta_{R3}\right| + \frac{\left|\Delta_2\right| + \left|\Delta_4\right|}{R_{1m} + R_{3m}}\right) \tag{8.28a}$$

Dla jednakowych przeciwległych rezystancji $R_{1m} = R_{3m}$

$$\left|\Delta_{21}\right|_{mm} = \frac{1}{4}R_{1m}\left(\left|\delta_{R1}\right| + \left|\delta_{R3}\right| + \frac{\left|\Delta_2\right| + \left|\Delta_4\right|}{R_{1m}}\right) \tag{8.28b}$$

Gdy ponadto $R_{3m} = \infty$, to $R_{1m} = R_{AB\,max}$ i $U_{DCmax} = U_{ABmax}$ oraz

$$\left|\Delta_{21}\right|_{mm} = R_{AB\,max}\left|\delta_{R1}\right| \tag{8.28c}$$

8.5.7 Błędy transmitancji r_{21} przy przeciwnych przyrostach $\pm\varepsilon$ sąsiednich rezystancji

Często stosuje się mostki o przeciwnych przyrostach $\pm\ \varepsilon$ rezystancji sąsiednich ramion, tj. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \equiv \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -\varepsilon$ oraz $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Na podstawie wzorów (8.11 – 8.14) otrzymuje się dla nich równoważne sobie postacie błędu bieżącego Δ_{21}, np.

$$\Delta_{21} = \frac{i_0'}{R_{10}\left(1 + \varepsilon_{\Sigma R}\right)}\left[\begin{array}{c}\left(1 + \varepsilon - \frac{4\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_1 + \left(\frac{1+\varepsilon}{mn} - \frac{4\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_3 + \\ -\left(\frac{1-\varepsilon}{m} + \frac{4\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_2 - \left(\frac{1-\varepsilon}{n} + \frac{4\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_4\end{array}\right] \tag{8.29a}$$

$$\Delta_{21} = \frac{i_0'}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left(1 + \varepsilon - 4\varepsilon\frac{1}{\sum r_i}\right)\delta_1 + \left(1 + \varepsilon - 4\varepsilon\frac{mn}{\sum r_i}\right)\delta_3 - \left(1 - \varepsilon + 4\varepsilon\frac{m}{\sum r_i}\right)\delta_2 - \left(1 - \varepsilon + 4\varepsilon\frac{n}{\sum r_i}\right)\delta_4\right] \tag{8.29b}$$

$$\Delta_{2l} = \frac{i_0'}{l+\varepsilon_{\Sigma R}} \left\{ \begin{aligned} &(l+\varepsilon)\left[\left(1+\varepsilon-4\varepsilon\frac{1}{\sum r_i}\right)\delta_{R1}+\left(1+\varepsilon-4\varepsilon\frac{mn}{\sum r_i}\right)\delta_{R3}\right]+ \\ &-(l-\varepsilon)\left[\left(1-\varepsilon+4\varepsilon\frac{m}{\sum r_i}\right)\delta_{R2}+\left(1-\varepsilon+4\varepsilon\frac{m}{\sum r_i}\right)\delta_{R4}\right] \end{aligned} \right\} \qquad (8.29c)$$

lub (8.29a) i (8.29c) w innych postaciach

$$\Delta_{2l} = \frac{i_0'}{R_{10}(l+\varepsilon_{\Sigma R})}\left[(1+\varepsilon)\left(\Delta_1+\frac{\Delta_3}{mn}\right)-(1-\varepsilon)\left(\frac{\Delta_2}{m}+\frac{\Delta_4}{n}\right)-\frac{4\varepsilon}{\sum r_i}(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)\right] \qquad (8.29a')$$

$$\Delta_{2l} = \frac{i_0'}{l+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\begin{aligned} &(l+\varepsilon)^2(\delta_{R1}+\delta_{R3})-(l-\varepsilon)^2(\delta_{R2}+\delta_{R4})+ \\ &-4\varepsilon\frac{(l+\varepsilon)(\delta_{R1}+mn\delta_{R3})+(1-\varepsilon)(m\delta_{R2}+n\delta_{R4})}{\sum r_i} \end{aligned}\right] \qquad (8.29c')$$

Gdy $\varepsilon \ll 1$, to dla (8.29c') można stosować przybliżenie

$$\Delta_{2l} \approx \frac{i_0'}{l+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[(l+2\varepsilon)(\delta_{R1}+\delta_{R3})-(l-2\varepsilon)(\delta_{R2}+\delta_{R4})-\frac{4\varepsilon}{\sum r_i}(\delta_{R1}+mn\delta_{R3}-m\delta_{R2}-n\delta_{R4})\right] \qquad (8.29d)$$

gdzie:

$$i_0' = \frac{mn}{(l+m)(l+n)} R_{10}\ ;$$

$$\sum r_i \equiv (1+\varepsilon_{\Sigma R})(1+m)(1+n)$$

$$\varepsilon_{\Sigma R} = \varepsilon\frac{(1-m)(1-n)}{(1+m)(1+n)} \equiv \varepsilon a \qquad (8.29e)$$

Ze wzoru (8.29e) wynika ponadto, że przy symetrii rezystancji początkowych mostka w jednej z osi, tj. dla $m = 1$ lub $n = 1$, zachodzi $\varepsilon_{\Sigma R} = 0$ i wzory stają się jeszcze prostsze. Np. dla (8.29a) przy $m = 1$ otrzymuje się

$$\Delta_{2l} = \frac{n}{2(l+n)}\left[\left(1-\varepsilon\frac{l-n}{l+n}\right)(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{1}{n}\left(l+\varepsilon\frac{l-n}{l+n}\right)(\Delta_3-\Delta_4)\right] \qquad (8.30)$$

Zaś przy jednakowych wszystkich rezystancjach początkowych, tj. gdy $m=n=1$:

$$\Delta_{2l} = \frac{1}{4}\left[\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-\Delta_4\right] \qquad (8.30a)$$

lub

$$\Delta_{21} = \frac{R_{10}}{4}\left[\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4\right] \tag{8.30b}$$

oraz

$$\Delta_{21} = \frac{R_{10}}{4}\left[(1+\varepsilon)\left(\delta_{R1} + \delta_{R3}\right) - (1-\varepsilon)\left(\delta_{R2} + \delta_{R4}\right)\right] \tag{8.30c}$$

Tak więc w mostku 4R o czterech jednakowych rezystancjach początkowych R_{10} i czterech przyrostach $\pm\,\varepsilon$, błąd transmitancji Δ_{21} zależy od wartości ε tylko przy opisie poprzez błędy δ_{Ri}. Dotyczy to też stanu całkowitej wzajemnej kompensacji wpływu błędów rezystancji ramion.

Przy tylko dwu rezystancjach zmiennych, np. R_1, R_2 i ich przyrostach $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \equiv \varepsilon$ otrzymuje się z (8.14) następujące odpowiedniki wzorów (8.29a,c)

$$\Delta_{21} = \frac{t_0'}{R_{10}\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)}\left[\begin{array}{l}\left(1-\frac{2\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_1 + \left(\frac{1+\varepsilon}{mn} - \frac{2\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_{30} + \\ \quad -\left(\frac{1}{m} + \frac{2\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_2 - \left(\frac{1-\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{\sum r_i}\right)\Delta_{40}\end{array}\right] \tag{8.31a}$$

oraz

$$\Delta_{21} = \frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\begin{array}{l}(1+\varepsilon)\left(1-2\varepsilon\frac{1}{\sum r_i}\right)\delta_{R1} + \left(1+\varepsilon-2\varepsilon\frac{mn}{\sum r_i}\right)\delta_{30} + \\ \quad -(1-\varepsilon)\left(1+2\varepsilon\frac{m}{\sum r_i}\right)\delta_{R2} - \left(1-\varepsilon+2\varepsilon\frac{n}{\sum r_i}\right)\delta_{40}\end{array}\right] \tag{8.31b}$$

gdzie:

$$\varepsilon_{\Sigma R} = \varepsilon\frac{1-m}{(1+m)(1+n)} \equiv \varepsilon a'$$

Przy jednakowych początkowych rezystancjach, tj. dla $m = n = 1$, wzory te upraszczają się:

$$\Delta_{21} = \frac{1}{4}\left[(1-0{,}5\,\varepsilon)\Delta_1 - (1+0{,}5\,\varepsilon)\,\Delta_2 + 0{,}5\left(\Delta_{30} - \Delta_{40}\right)\right] \tag{8.31c}$$

$$\Delta_{21} = \frac{R_{10}}{4}\left[(1-0{,}5\varepsilon)(1+\varepsilon)\delta_{R1} - (1+0{,}5\varepsilon)(1-\varepsilon)\delta_{R2} + 0{,}5\left(\delta_{30} - \delta_{40}\right)\right] \tag{8.31d}$$

Stan kompensowania się wszystkich rodzajów błędów rezystancji w mostku podwójnie symetrycznym o dwu sąsiednich ramionach R_1, R_2 zmiennych zawsze zależy od wartości przyrostów ε.

We wzorach dla błędów granicznych transmitancji współczynniki wagi są tymi samymi wyrażeniami jak dla błędów bieżących, ale ze znakami dodatnimi.

Miary losowe transmitancji przy braku korelacji wyznacza się jako pierwiastek z sumy kwadratów składników od poszczególnych błędów.

8.5.8. Jednakowe błędy graniczne i przeciwne przyrosty rezystancji w ramionach sąsiednich $\varepsilon_i = \pm\varepsilon$

W pomiarach często stosuje się mostek o jednakowych modułach $|\varepsilon_i| \equiv \varepsilon \leq 1$ przyrostów rezystancji i przeciwnych ich znakach w sąsiednich ramionach, tj. gdy $\varepsilon_i = \pm\varepsilon$, czyli $\varepsilon_i = (-1)^{i-1}\varepsilon$. Przy wszystkich ramionach zmiennych i jednakowych błędach $|\delta_{Ri}| \equiv |\delta_R|$, ze wzoru (8.29c) wynika następująca zależność dla błędu granicznego transmitancji:

$$|\Delta_{21}|_m = 4\,t'_0 \frac{|1+\varepsilon^2 \varepsilon_{\Sigma R}|}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})^2} |\delta_R| = 4\,t'_0 \frac{|1+a\varepsilon^3|}{(1+a\varepsilon)^2} |\delta_R| \qquad (8.32)$$

gdyż: $\varepsilon_{\Sigma R} = \varepsilon \dfrac{(1-m)(1-n)}{(1+m)(1+n)} \equiv \varepsilon a$

Przy ograniczeniu rozwinięcia w szereg do pierwszych trzech wyrazów otrzymuje się

$$|\Delta_{21}|_m \approx 4\,t'_0 \left| 1 - 2a\varepsilon + 3a^2\varepsilon^2 \right| |\delta_R| \qquad (8.32a)$$

Dla $|a\varepsilon| \leq 0{,}25$ i $\varepsilon \leq 0{,}25$ z wystarczającą przy liczeniu błędów dokładnością można stosować przybliżenie:

$$|\Delta_{21}|_m \approx 4\,t'_0 |1 - 2a\varepsilon| |\delta_R| \qquad (8.32b)$$

Jeśli przy równowadze mostek ma co najmniej jedną oś symetrii, tj. gdy $m = 1$ lub $n = 1$, to wówczas $a = 0$ oraz $\varepsilon_{\Sigma R} = 0$ i wzór (8.32) znacznie się upraszcza:

$$\left|\Delta_{21}\right|_m = 4\,t'_0\left|\delta_R\right| \tag{8.32c}$$

gdzie: $t'_0 = R_{10}\dfrac{n}{2(1+n)}$ lub $t'_0 = R_{10}\dfrac{m}{2(1+m)}$

Błąd graniczny transmitancji nie zależy wtedy od stopnia niezrównoważenia mostka o czterech przyrostach $\pm\varepsilon$ oraz jesf proporcjonalny do czterokrotnej wartości błędu granicznego rezystancji ramion i czułości początkowej t'_0.

Przy dwu osiach symetrii początkowej mostka, tj. gdy $m = 1 = n$ i ponadto dla przyrostów $\varepsilon_i = \pm\,\varepsilon$, wzór (8.32c) staje się jeszcze prostszy:

$$\left|\Delta_{21}\right|_m = R_{10}\left|\delta_R\right| \tag{8.32d}$$

W równowadze mostka wszystkie przyrosty $\varepsilon_i = 0$ i błąd graniczny transmitancji wynosi:

$$\left|\Delta_{21}\right|_{m0} = R_0\left|\delta_0\right|$$

Dla miar losowych transmitancji przy jednakowych miarach losowych wszystkich rezystancji R_i mostka, wszystkie współczynniki są o połowę mniejsze niż dla błędu granicznego.

Przy dwu tylko zmiennych ramionach R_1, R_2 o przyrostach $\pm\,\varepsilon$ oraz jednakowych błędach granicznych $|\delta_0|$ początkowych wartości rezystancji jak i jednakowych błędach $|\Delta_\varepsilon|$ ich przyrostów, na podstawie (8.31b) otrzymuje się błąd graniczny transmitancji

$$\left|\Delta_{21}\right|_m = \frac{4t'_0}{1+a'\varepsilon}\left\{\left[1 - \frac{0{,}5\varepsilon}{1+a'\varepsilon}\left(a + \frac{2\varepsilon}{\sum r_{i0}}\right)\right]\left|\delta_0\right| + 0{,}5\left(1 + \varepsilon\frac{m-1}{(1+a'\varepsilon)\sum r_{i0}}\right)\left|\Delta_\varepsilon\right|\right\} \tag{8.33}$$

Można również i tu stosować wzór przybliżony ograniczając się do wyrażeń liniowych względem ε, tj.:

$$\left|\Delta_{21}\right|_m \approx \frac{4t'_0}{1+a'\varepsilon}\left[\left(1 - \frac{0{,}5\,a'\varepsilon(1-n)}{1+a'\varepsilon}\right)\left|\delta_0\right| + \left(0{,}5 - \frac{0{,}5\,a'\varepsilon}{1+a'\varepsilon}\right)\left|\Delta_\varepsilon\right|\right] \tag{8.33a}$$

gdzie: $a' = \dfrac{1-m}{(1+m)(1+n)}$

Przykład 8.1 .

Należy znaleźć błąd bieżący i błąd graniczny mostków 4R spełniających warunek liniowości (2.17a), zapisany jako $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{m} + \varepsilon_2$.

Gdy jest on spełniony otrzymuje się

$$r_{21} = R_{10}\frac{n}{1+n}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_4\right)$$

oraz

$$\varepsilon_{\Sigma R} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m}$$

Ogólny wzór (8.11d) dla błędu Δ_{21} w postaci rozwiniętej jako funkcja względnych wartości początkowych i przyrostów rezystancji mostka oraz ich błędów bezwzględnych, jest następujący:

$$\Delta_{21} = \frac{m\,n\,R_{10}}{\sum R_i}\left\{\begin{aligned}&\left[1+\varepsilon_3 - \frac{r_{21}}{m\,n\,R_{10}}\right]\Delta_1 + \left[1+\varepsilon_1 - \frac{r_{21}}{R_{10}}\right]\frac{\Delta_3}{mn} + \\ &-\left[1+\varepsilon_4 + \frac{r_{21}}{n\,R_{10}}\right]\frac{\Delta_2}{m} - \left[1+\varepsilon_2 + \frac{r_{21}}{m\,R_{10}}\right]\frac{\Delta_4}{n}\end{aligned}\right\}$$

Przy spełnianiu warunku liniowości (2.17a) otrzymuje się

$$\Delta_{21} = \frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left(1+\varepsilon_2 + \frac{n}{m}\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{1+n}\right)\left(\delta_1 - \delta_4\right) + \left[1 + \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n}\right]\left(\delta_3 - \delta_2\right)\right]$$

gdzie:

$$\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} = \frac{m\,nR_{10}}{\left(1+m+\varepsilon_1 + m\varepsilon_2\right)\left(1+n\right)}$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{R_{10}},\qquad \delta_2 = \frac{\Delta_2}{mR_{10}},\qquad \delta_3 = \frac{\Delta_3}{mnR_{10}},\qquad \delta_4 = \frac{\Delta_4}{nR_{40}};$$

W funkcji błędów względnych $\delta_{Ri} = \delta_i\,(1+\varepsilon_i)^{-1}$ wzór ten przyjmuje postać

$$\Delta_{21} = \frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&\left(1+\varepsilon_2 + \frac{n}{m}\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{1+n}\right)\left[\left(1+\varepsilon_1\right)\delta_{R1} - \left(1+\varepsilon_4\right)\delta_{R4}\right] + \\ &+\left(1 + \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n}\right)\left[\left(1+\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{m}\right)\delta_{R3} - \left(1+\varepsilon_2\right)\delta_{R2}\right]\end{aligned}\right\}$$

Z tych zależności wynikają wzory dla błędu granicznego transmitancji r_{21}

$$\left|\Delta_{21}\right|_m=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left|1+\varepsilon_2+\frac{n}{m}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{1+n}\right|\left(\left|\delta_1\right|+\left|\delta_4\right|\right)+\left|1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right|\left(\left|\delta_3\right|+\left|\delta_2\right|\right)\right]$$

oraz

$$\left|\Delta_{21}\right|_m=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&\left|1+\varepsilon_2+\frac{n\left(\varepsilon_1-\varepsilon_4\right)}{m\left(1+n\right)}\right|\left[\left(1+\varepsilon_1\right)\left|\delta_{R1}\right|+\left(1+\varepsilon_4\right)\left|\delta_{R4}\right|\right]+\\&+\left|1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right|\left[\left|1+\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{m}\right|\left|\delta_{R3}\right|+\left(1+\varepsilon_2\right)\left|\delta_{R2}\right|\right]\end{aligned}\right\}$$

Przy jednakowych błędach granicznych rezystancji R_i mostka, tj. gdy $|\delta_i|=|\delta|$ lub $|\delta_{Ri}|=|\delta_R|$, wzory te upraszczają się:

$$\left|\Delta_{21}(\delta)\right|_m=\frac{4t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left|1+0{,}5\,\varepsilon_2+0{,}5\,\frac{n}{m}\,\frac{(n+m)\varepsilon_1-n(1-m)\varepsilon_4}{1+n}\right|\,|\delta|$$

lub

$$\left|\Delta_{21}\right|_m=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left|1+\varepsilon_2+\frac{n\left(\varepsilon_1-\varepsilon_4\right)}{m\left(1+n\right)}\right|\left(2+\varepsilon_1+\varepsilon_4\right)+\left|1+\frac{\varepsilon_1+n\varepsilon_4}{1+n}\right|\left|2+2\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{m}\right|\right]|\delta_R|$$

Można też bezpośrednio zastosować jedną z postaci wzoru (8.26d)

$$\left|\Delta_{21}\right|_m=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right)+2\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_4\right)+\\&-\frac{r_{12}}{R_{10}}\left[\left(1-m\right)\left(1-n\right)+\varepsilon_1+mn\varepsilon_3-m\,\varepsilon_2-n\,\varepsilon_4\right]\end{aligned}\right\}|\delta_R|$$

Po wstawieniu ε_3 otrzymuje się

$$\left|\Delta_{21}\right|_m=\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{m}\right)+2\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_4\right)+\\&-\frac{n\left(\varepsilon_1-\varepsilon_4\right)}{1+n}\left[\left(1-m\right)\left(1-n\right)+\varepsilon_1\left(1+n\right)+m\left(n-1\right)\varepsilon_2-2n\,\varepsilon_4\right]\end{aligned}\right\}|\delta_R|$$

Dla małych przyrostów ε_i wystarcza przybliżenie wzoru uwzględniające tylko ich liniowe składniki

$$\left|\Delta_{21}\right|_m\approx\frac{t_0'}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{4+2\left(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_4\right)+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_4\right)\left[\frac{2-nm\left(1-m\right)\left(1-n\right)}{m\left(1+n\right)}\right]\right\}|\delta_R|$$

Gdy przyrosty w zlinearyzowanym mostku są sprzężone parami, np. $\varepsilon_1=m\varepsilon_3$ oraz $\varepsilon_4=m\varepsilon_2$, to błąd bieżący wynosi

$$\Delta_{21} = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left(1+\frac{1}{m}\,\frac{n\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+n}\right)(\delta_1-\delta_4)+\left(1+\frac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_2}{1+n}\right)(\delta_3-\delta_2)\right]$$

lub w innej postaci

$$\Delta_{21} = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{m}\,\frac{n\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+n}\right)\left[(1+\varepsilon_1)\delta_{R1}-(1+m\varepsilon_2)\delta_{R4}\right]+\\&+\left(1+\frac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_2}{1+n}\right)\left[\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)\delta_{R3}-(1+\varepsilon_2)\delta_{R2}\right]\end{aligned}\right\}$$

Przy jednakowych błędach granicznych $|\delta|$ otrzymuje się

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left(4+\frac{\varepsilon_1}{m}\,\frac{n+m}{1+n}+\varepsilon_2\,\frac{1+mn}{1+n}\right)|\delta|$$

W szczególnych przypadkach mostka wzór ten jeszcze dalej upraszcza się np. przy $m = 1$

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{nR_{10}}{(1+n)(2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(4+\varepsilon_1+\varepsilon_2)|\delta|$$

oraz przy $n = 1$

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{mR_{10}}{2(1+m+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)}\left(4+\varepsilon_1\,\frac{1+m}{2m}+\varepsilon_2\,\frac{1+m}{2}\right)|\delta|$$

Dla jednakowych błędów granicznych $|\delta_R|$ wzór jest bardziej skomplikowany

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\left|1+\frac{1}{m}\,\frac{n\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+n}\right|(2+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)+\left|1+\frac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_2}{1+n}\right|\left|2+\frac{\varepsilon_1}{m}+\varepsilon_2\right|\right]|\delta_R|$$

lub otrzymany bezpośrednio z (8.24b)

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{\begin{aligned}&2(1+\varepsilon_1)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)+2(1+\varepsilon_2)(1+m\varepsilon_2)+\\&-\frac{n(\varepsilon_1-m\varepsilon_2)}{n+1}\left[(1-m)(1-n)+\varepsilon_1(1+n)-m\varepsilon_2(1+n)\right]\end{aligned}\right\}|\delta_R|$$

Przy $m = 1$

$$|\Delta_{21}|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[2(1+\varepsilon_1)^2+2(1+\varepsilon_2)^2-n(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\right]|\delta_R|$$

zaś przy $n = 1$

$$\left|\Delta_{21}\right|_m = \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left\{2\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)+2\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+m\varepsilon_2\right)-\left(\varepsilon_1-m\,\varepsilon_2\right)^2\right\}\left|\delta_R\right|$$

Dla małych przyrostów ε_i można ograniczyć się tylko do członów liniowych i stosować przybliżenie

$$\left|\Delta_{21}\right|_m \approx \frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[2\left|1+\frac{1}{m}\frac{n\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{1+n}\right|+\varepsilon_1+m\varepsilon_2+2\left|1+\frac{\varepsilon_1+mn\varepsilon_2}{1+n}\right|+\left|\frac{\varepsilon_1}{m}+\varepsilon_2\right|\right]\left|\delta_R\right|\cdot$$

Wzory powyższe też upraszczają się znacznie przy $m = 1$ lub/ i gdy $n = 1$ oraz ponadto dla $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ lub $\varepsilon_2 = 0$.

Podobne zależności można też otrzymać dla drugiego warunku linearyzacji opisanego wzorem (2.17b).

8.6. Niedokładność rozwarciowego napięcia wyjściowego U'_{DC} mostka 4R zasilanego prądowo

W rozdziale 4 wykazano, że wśród mostków klasycznych najlepsze właściwości w pomiarach dwu przyrostów rezystancji ma mostek zasilany prądowo i nieobciążony. **Błąd bezwzględny rozwarciowego napięcia wyjściowego** tego mostka, z uwzględnieniem błędu δ_J, z jakim znana jest wartość lub określona niestabilność prądu zasilającego J, ujmuje się wzorem:

$$\Delta_{U'DC} = J\left(\Delta_{21} + r_{21}\,\delta_J\right) \tag{8.34a}$$

gdzie:

Δ_{21} – błąd bezwzględny transmitancji rozwarciowej r_{21}

$\delta_J \equiv \dfrac{\Delta_J}{J}$ – bieżąca wartość błędu względnego prądu zasilającego

Błąd ten można odnieść do wartości prądu J bądź do określonej wartości napięcia wyjściowego, np. odpowiadającej pełnemu zakresowi zmian transmitancji r_{21}. Wówczas potrzyma się następujący błąd względny:

$$\delta'_{Um} \equiv \frac{\Delta_{U'DC}}{U'_{DC\,max}-U'_{DC\,min}} = \frac{\Delta_{21}}{r_{21\,max}-r_{21\,min}}+\delta_J \tag{8.34b}$$

Tak zdefiniowany błąd względny ma skończoną wartość również przy równowadze mostka.

Błąd zera napięcia wyjściowego $\Delta'_{DC\,0}$ występuje tak jak i dla transmitancji $r_{21} = 0$, tj. gdy równocześnie wszystkie przyrosty $\varepsilon_i = 0$. Przy pomijalnym wpływie dodatkowych źródeł w układzie (np. napięć termoelektrycznych) wynika on tylko z wartości błędów początkowych δ_{i0} rezystancji ramion mostka i wynosi:

$$\Delta'_{DC\,0} = J\,\Delta_{21\,0} = T'_0 \left(\delta_{10} + \delta_{30} - \delta_{20} - \delta_{40}\right) \qquad (8.35)$$

Początkowe napięcie niezrównoważenia mostka może pozostać bez zmian dla wielu kombinacji błędów δ_{i0} jego rezystancji. Błędy systematyczne graniczne i losowe miary dokładności, w tym niepewności pomiarowe napięcia wyjściowego, wyznacza się w oparciu o wzory dla błędów transmitancji r_{21}.

8.7. Niedokładność transmitancji i rozwarciowego napięcia wyjściowego U'_{DC} mostka 4R zasilanego napięciowo

Napięcie wyjściowe nieobciążonego mostka 4R z rys. 2.1 przy zasilaniu z idealnego źródła napięciowego E wynosi:

$$U'_{DC} = E\frac{r_{21}}{R^{\infty}_{AB}} = E\,\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{\left(R_1+R_2\right)\left(R_3+R_4\right)} \equiv E\,k_{21} \equiv K'_0 \bullet f'_E\left(\varepsilon_i\right) \qquad (8.36)$$

gdzie:

$E = U_{AB}$ – napięcie źródła zasilania mostka

$k_{21} \equiv k_0 f'_E(\varepsilon_i)$ – rozwarciowa transmitancja napięciowa mostka

$K'_0 = Ek_0$ – początkowa czułość napięcia U'_{DC} względem funkcji $f'_E(\varepsilon_i) \to 0$ przy $\varepsilon_i \to 0$

$k_0 = \dfrac{m}{(1+m)^2}$ –. czułość początkowa transmitancji k_{21}

$$f'_E\left(\varepsilon_i\right) = \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{\left(1+\varepsilon_{12}\right)\left(1+\varepsilon_{34}\right)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4}{\left(1+\dfrac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_4 + m\varepsilon_3}{1+m}\right)}$$ – funkcja niezrównoważenia transmitancji k_{21}

Błąd bezwzględny napięcia wyjściowego U'_{DC} mostka, odniesiony do napięcia zasilającego E ,wynosi:

$$\frac{\Delta U'_{DC}}{E} = \Delta'_{21} + k_{21}\,\delta_E \tag{8.37}$$

Występujący w nim **błąd bezwzględny** Δ'_{21} **transmitancji napięciowej** k_{21} mostka 4R opisuje wzór:

$$\Delta'_{21} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}\left(\delta_{R1} - \delta_{R2}\right) + \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)^2}\left(\delta_{R3} - \delta_{R4}\right) \cdot \tag{8.38}$$

lub w wartościach względnych

$$\Delta'_{21} = k_0 \left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}\left(\delta_{R1} - \delta_{R2}\right) + \frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{34})^2}\left(\delta_{R3} - \delta_{R4}\right) \right] \tag{8.38a}$$

Błąd ten nie zależy od poziomu wartości rezystancji dolnych ramion mostka z rys.2.1, a jedynie od ich przyrostów względnych. Ponadto nie wpływają nań jednakowe błędy względne ramion sąsiadujących ze sobą w zaciskach wyjściowych. Wszystkie przyrosty względne spełniają warunek wynikły z możliwości realizacji fizycznej: $\varepsilon_i > -1$.

Z (8.38a) tych łatwo jest otrzymać wzory na pozostałe błędy i niepewności pomiarowe transmitancji k_{21}. Na przykład graniczny błąd systematyczny wyniesie:

$$\left|\Delta'_{21}\right|_m \le k_0 \left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}\left(\left|\delta_{R1}\right| + \left|\delta_{R2}\right|\right) + \frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{34})^2}\left(\left|\delta_{R3}\right| + \left|\delta_{R4}\right|\right) \right] \tag{8.39}$$

Gdy błędy graniczne rezystancji wszystkich ramion mostka są jednakowe, tj. $\left|\delta_{Ri}\right| \equiv \left|\delta_R\right|$, otrzymuje się:

$$\left|\Delta'_{21}\right|_m \le k_0 \left[\frac{\left|(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\right|}{(1+\varepsilon_{12})^2} + \frac{\left|(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\right|}{(1+\varepsilon_{34})^2} \right] \left|\delta_R\right| \tag{8.39a}$$

Dla dwu różnych par przyrostów o przeciwnych znakach, tj. $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon_4 = -\varepsilon_3$ zachodzi $|\varepsilon| \le 1$. Przy $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$, z (8.38a) wynika:

$$\Delta'_{21}=k_0\left[\frac{1-\varepsilon_1^2}{\left(1+\varepsilon_1\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\left(\delta_{R1}-\delta_{R2}\right)+\frac{1-\varepsilon_3^2}{\left(1+\varepsilon_3\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\left(\delta_{R3}-\delta_{R4}\right)\right] \qquad (8.40a)$$

Przy przyrostach $\pm|\varepsilon|$, tj. jednakowych ich wartościach i przeciwnych znakach dla rezystancji sąsiednich ramion, czyli gdy $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = \varepsilon$, $(-1 \le \varepsilon \le 1)$, np. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \equiv \varepsilon$ oraz $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -\varepsilon$ otrzymuje się:

$$\Delta'_{21}=k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\left(\delta_{R1}-\delta_{R2}+\delta_{R3}-\delta_{R4}\right) \qquad (8.40b)$$

Błąd graniczny wynosi wówczas:

$$\left|\Delta'_{21}\right|_m=k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\left(\left|\delta_{R1}\right|+\left|\delta_{R2}\right|+\left|\delta_{R3}\right|+\left|\delta_{R4}\right|\right) \qquad (8.40c)$$

Dla błędu średniego kwadratowego przy nieskorelowanych błędach rezystancji R_i otrzymuje się

$$\bar{\Delta}'_{21}=k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\sqrt{\bar{\delta}_{R1}^2+\bar{\delta}_{R2}^2+\bar{\delta}_{R3}^2+\bar{\delta}_{R4}^2} \qquad (8.40d)$$

Z (8.39a – 8.40d) wynika, że błędy transmitancji napięciowo zasilanego mostka 4R o przyrostach $\pm\,\varepsilon$ są proporcjonalne do czułości początkowej k_0 i funkcji przyrostu ε. Dla $m > 1$ funkcja ta osiąga niewielkie maksimum $\frac{(m+1)^2}{4m}$ przy $\varepsilon_m = \frac{m-1}{m+1}$ i jest większa od 1 aż do wartości przyrostu $\varepsilon_0 = \frac{m^2-1}{m^2+1}$. Np. dla m = 2 otrzymuje się: $\varepsilon_0 = 0{,}6$, $\varepsilon_m = 1/3$ i maksymalną wartość mnożnika $1{,}125k_0$. Jeśli przy równowadze mostek jest ponadto symetryczny względem przekątnej CD, tj. $m = 1$, to $k_0 = 1/4$ i wzór (8.38a) przyjmuje postać:

$$\Delta'_{21}=\frac{1-\varepsilon^2}{4}\left(\delta_{R1}-\delta_{R2}+\delta_{R3}-\delta_{R4}\right) \qquad (8.41a)$$

Przy jednakowych błędach granicznych $|\delta_{Ri}| \equiv |\delta_R|$ wzór (8.39b) upraszcza się następująco

$$|\Delta'_{21}|_m = (1-\varepsilon^2)\,|\delta_R| \tag{8.41b}$$

Dla mostka o dwu tylko ramionach zmiennych, np. $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$, z (8.38) wynika:

$$\Delta'_{21} = \frac{m}{(1+m)^2}\left[\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2}) + \delta_{30} - \delta_{40}\right] \tag{8.42}$$

Dla par przeciwnych przyrostów bezwzględnych, np. w mostku składającym się z dwu potencjometrów o niezależnie przemieszczanych stykach C i D, tj. gdy $\Delta R_1 > 0$, $\Delta R_2 = -\Delta R_1$ czyli $m\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ oraz $\Delta R_3 > 0$ i $\Delta R_4 = -\Delta R_3$, z (8.37a) wynika:

$$\Delta''_{21} = \frac{1}{(1+m)^2}\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{\Delta R_1}{R_{10}}\right)\left(m-\frac{\Delta R_1}{R_{10}}\right)(\delta_{R1}-\delta_{R2}) + \\ + \left(1+\frac{\Delta R_3}{R_{10}}\right)\left(m-\frac{\Delta R_3}{R_{10}}\right)(\delta_{R3}-\delta_{R4})\end{array}\right] \tag{8.43}$$

Na podstawie wzorów (8.40 – 8.43) łatwo już podać wynikające z nich zależności dla błędów przypadkowych oraz standardowych i rozszerzonych niepewności pomiarowych.

8.8. Miary dokładności parametrów roboczych czwórnika o dowolnym zasilaniu i obciążeniu

Pełne wzory opisujące pracę mostka 4R jako czwórnika typu X w funkcji rezystancji jego ramion oraz rezystancji zastępczych obciążenia i zasilania są bardzo rozbudowane, trudne w interpretacji i wskutek tego mało użyteczne w praktyce do wyznaczania błędów. Dla nierozłączalnego układu lub czujnika o niedostępnym wnętrzu i nieznanej strukturze można jedynie zmierzyć parametry na zaciskach i w oparciu o nie stworzyć odpowiedni schemat zastępczy.

Do opisu parametrów roboczych dowolnego rodzaju pracy pasywnego układu 4T jako czwórnika wystarczają trzy współczynniki jego równań, np. transmitancja r_{21}, i rezystancje rozwarciowe R^{∞}_{AB}, R^{∞}_{CD}. Jeśli jakieś miary dokładności tych parametrów są znane, gdyż np. wyznaczono je z zależności opisujących mostek 4R, określono z pomiarów, oszacowano na podstawie wiedzy lub oparto się na danych podawanych przez wytwórcę, to można to wykorzystać do opisu dokładności parametrów roboczych czwórnika. Podstawowe wzory tych parametrów i ich błędy bieżące podano w tabeli 8.1 przy założeniu, że błędy rezystancji obciążenia R_L i zasilania R_G są pomijalne.

Tabela 8.1. Błędy parametrów roboczych czwórnika pasywnego o dowolnym zasilaniu i obciążeniu

Table 8.1. Errors of working parameters of the passive two-port of the arbitrary supply and load.

Lp	Parametr	Wzór podstawowy	Błąd parametru
1	Napięcie wyjściowe	$U_{DC}=\dfrac{J R_G R_L r_{21}}{R_{11}R_{22}-r_{21}^2}$ gdzie: $R_{11}\equiv R_{AB}^{\infty}+R_G$, $R_{22}\equiv R_{CD}^{\infty}+R_L$	$\dfrac{\Delta_{UDC}}{J}=\dfrac{R_G R_L}{R_{11}R_{22}}\dfrac{1+b}{(1-b)^2}\Delta_{21}-\dfrac{U_{DC}}{J(1-b)}\left(\dfrac{R_{AB}^{\infty}}{R_{11}}\delta_{RAB}^{\infty}+\dfrac{R_{CD}^{\infty}}{R_{22}}\delta_{RCD}^{\infty}\right)$ gdzie: $b\equiv\dfrac{r_{21}^2}{R_{11}\,R_{22}}$
2	Robocza rezystancja wejściowa	$R_{AB}=R_{AB}^{\infty}-\dfrac{r_{21}^2}{R_{22}}$	$\delta_{RAB}=\dfrac{R_{22}}{R_{22}R_{AB}^{\infty}-r_{21}^2}\left(R_{AB}^{\infty}\delta_{RAB}^{\infty}+\dfrac{r_{21}^2}{R_{22}^2}R_{CD}^{\infty}\delta_{RCD}^{\infty}+2\dfrac{r_{21}^2}{R_{22}}\Delta_{21}\right)$
3	Robocza rezystancja wyjściowa	$R_{CD}=R_{CD}^{\infty}-\dfrac{r_{21}^2}{R_{11}}$	$\delta_{RCD}=\dfrac{R_{11}}{R_{11}R_{CD}^{\infty}-r_{21}^2}\left(R_{CD}^{\infty}\delta_{RCD}^{\infty}+\dfrac{r_{21}^2}{R_{11}^2}R_{AB}^{\infty}\delta_{RAB}^{\infty}-2\dfrac{r_{21}^2}{R_{11}}\Delta_{21}\right)$
4	Transmitancja rozw. U_{CD}^{∞}/J	$r_{21}=t'_0\,f'(\varepsilon_i)$	$\Delta_{21}=r_{21}\delta_{t'0}+\Delta f'(\varepsilon_i)$
5	Rozwarciowa rezystancja wejściowa	$R_{AB}^{\infty}=R_{AB0}(1+\varepsilon_{AB}^{\infty})$	$\delta_{RAB}^{\infty}=\delta_{RAB0}+\dfrac{\Delta_{\varepsilon AB}}{1+\varepsilon_{AB}}$
6	Rozwarciowa rezystancja wyjściowa	$R_{CD}^{\infty}=R_{CD0}(1+\varepsilon_{CD}^{\infty})$	$\delta_{RCD}^{\infty}=\delta_{RCD0}+\dfrac{\Delta_{\varepsilon CD}}{1+\varepsilon_{CD}}$

Błędy parametrów roboczych można też przedstawić za pomocą względnych wartości rezystancji i parametrów rozwarciowych czwórnika. Zmiany tych parametrów dla czujników w funkcji wielkości wpływających, np. temperatury, zazwyczaj są określone wraz z ich rozrzutami. Związane z tymi zmianami błędy dodatkowe nie są od siebie niezależne. Zależności te można określać eksperymentalnie lub wyznaczyć je dla układu o określonej strukturze i wartościach elementów wewnętrznych, jeśli znane są ich błędy. Należy je uwzględniać przy wyznaczaniu błędów granicznych i przypadkowych oraz niepewności pomiarowych. Dla układu o schemacie zastępczym zawierającym mostek można skorzystać z podanych poprzednio wzorów dla jego parametrów rozwarciowych. Wzory opisujące miary dokładności transmitancji mostka 4R jako nieobciążonego czwórnika zasilanego prądowo lub napięciowo o zmiennych czterech lub dwu sąsiednich ramionach zestawiono w tabelach 8.2a i 8.2b.

8.9. Niedokładności czułości i napięć wyjściowych mostka dwuprądowego

Wzory (3.15a – c) opisujące napięcia rozwarciowe mostka dwuprądowego o jednakowych źródłach (2J) lub ich wartości średnie przy przełączaniu źródeł (2xJ) są podobne w formie do wzorów dla mostka jednoprądowego podane w wierszu 2 tabeli 1.1. Dla klarowności dalszych rozważań przytacza się tu je łącznie w skróconej formie i przy oznaczeniach podobnych jak w powtórzonym tu wzorze (2.20):

$$U_{DC}^{'\infty} = J\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{\sum R_i} = J\,r_{12} = J\,t_0'\,f'(\varepsilon_i) \qquad (2.20)$$

oraz

$$U_{DC}^{''\infty} = J\frac{R_1R_2 - R_3R_4}{\sum R_i} \equiv J\,t_{DC} \equiv J\,t_0''\,f''(\varepsilon_i) \qquad (8.44\text{-a})$$

$$U_{AB}^{\infty} = J\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{\sum R_i} \equiv J\,t_{AB} \equiv J\,t_0'''\,f'''(\varepsilon_i) \qquad (8.44\text{-b})$$

gdzie:

t_{DC} , t_{AB} - czułości napięć rozwarciowych obu wyjść mostka 2J (odpowiedniki transmitancji r_{21})

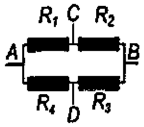
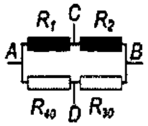
$t_0'' = R_{10}\dfrac{mn}{(n+m)(1+n)}$ – czułość początkowa parametru t_{DC}

$t_0''' = R_{10}\dfrac{mn}{(n+m)(1+m)}$ – czułość początkowa parametru t_{AB}.

Mostek dwuprądowy równoważy się równocześnie w obu przekątnych gdy: $R_{10}=R_{30}$, $R_{20}=R_{40}$, czyli dla $m = n$. Wówczas obie czułości początkowe są jednakowe:

$$t_0''=t_0'''=\frac{mR_{10}}{2(1+m)}.$$

Tabela 8.2a. Miary dokładności transmitancji rozwarciowej r_{21} mostka 4R jako czwórnika zasilanego prądowo.
Table 8.2a. Accuracy measures of the open-circuit transmittance r_{21} of the 4R bridge as twoport supplied by the current source.

Nr	Parametr i miary jego dokładności	Symbol	a)		b)
			a) Zmienne: $R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2=mR_{20}(1+\varepsilon_2)$ $R_3=mnR_{10}(1+\varepsilon_3)$ $R_4=nR_{10}(1+\varepsilon_4)$  Warunek równowagi $R_{10}R_{30}=R_{20}R_{40}$ Błędy: $\delta_{Ri}\equiv\delta_{i0}+\Delta_{\varepsilon i}(1+\varepsilon_i)^{-1}$		b) Zmienne: $R_1=R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2=mR_{20}(1+\varepsilon_2)$ $R_3=mnR_{10}$ $R_4=nR_{10}$ 
1	**Transmitancja napięciowo-prądowa:** $\frac{U'_{DC}}{I_{AB}}$ $r_{21}\equiv\frac{R_1R_3-R_2R_4}{\sum R_i}\equiv$		$\Delta_{21}\equiv\sum w_{Ri}\,\delta_{Ri}=$ $=\frac{1}{\sum R_i}\left[R_1(R_3-r_{21})\delta_{R1}-R_2(R_4-r_{21})\delta_{R2}+R_3(R_1-r_{21})\delta_{R3}-R_4(R_2-r_{21})\delta_{R4}\right]$ gdzie: - $w'_{Ri}\equiv R_i\frac{(-1)^{i+1}R_j-r_{21}}{\sum R_i}$; współczynniki wagi - indeksy: dla i = 1, 2, 3, 4, j = 3, 4, 1, 2		$=\frac{R_1(R_{30}-r_{21})\delta_{R1}-R_2(R_{40}-r_{21})\delta_{R2}+R_{30}(R_1-r_{21})\delta_{30}-R_{40}(R_2-r_{21})\delta_{40}}{\sum R_i}$ gdzie: $\varepsilon_{\Sigma R}=\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2}{(1+m)(1+n)}$ $r_{21}=\frac{R_{10}R_{30}}{\sum R_i}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$
2	$\equiv t'_0 f'(\varepsilon_i)=t'_0\frac{\Delta L'(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}(\varepsilon_i)}$ gdzie: $t'_0=\frac{R_{10}R_{30}}{\sum R_{i0}}=R_{10}\frac{mn}{(1+m)(1+n)}$	Δ_{21}	lub $=\frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\sum\left[(-1)^{i+1}(1+\varepsilon_j)-\frac{t'_0\Delta L'(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})R_{j0}}\right]\left[(1+\varepsilon_i)\delta_{i0}+\Delta_{\varepsilon i}\right]$		2) $\varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2$, $r_{21}=\frac{t'_0\,2\varepsilon}{1+a'\varepsilon}$, $\varepsilon_{\Sigma R}=\frac{\varepsilon(1-m)}{(1+m)(1+n)}\equiv\varepsilon a'$
3	$\Delta L'(\varepsilon_i)=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4$ $\varepsilon_{\Sigma R}=\frac{\varepsilon_1+m\varepsilon_2+n(\varepsilon_4+m\varepsilon_3)}{(1+m)(1+n)}$ **Błąd bieżący**		a') $\varepsilon_i\varepsilon_j<<1+\varepsilon_i+\varepsilon_j>>\varepsilon_i r_{12}/R_{j0}$ $\approx\frac{t'_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\sum\left[(-1)^{i+1}(1+\varepsilon_i+\varepsilon_j)-\frac{r_{12}}{R_{j0}}\right]\delta_i$	a'') $\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ oraz $m=1$, $n=1$ $\frac{R_{10}}{4}\left[(1+\varepsilon)(\delta_{R1}+\delta_{R3})-(1-\varepsilon)(\delta_{R2}+\delta_{R4})\right]$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ oraz $m=1=n$ $=\frac{R_{10}}{4}\left\{\begin{array}{l}(1-0{,}5\varepsilon)\left[(1+\varepsilon)\delta_{R1}-\delta_{40}\right]-\\-(1+0{,}5\varepsilon)\left[(1-\varepsilon)\delta_{R2}-\delta_{30}\right]\end{array}\right\}$
4	**Błąd graniczny**	$\lvert\Delta_{21}\rvert_m$	$\sum\left(\lvert w'_{Ri}\rvert\lvert\delta_{Ri}\rvert\right)=\sum\lvert w'_{Ri}\rvert\left(\lvert\delta_{i0}\rvert+\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\lvert\delta_{\varepsilon i}\rvert\right)$		$\lvert w_{R1}\rvert\lvert\delta_{R1}\rvert+\lvert w_{R2}\rvert\lvert\delta_{R2}\rvert+\lvert w_3\rvert\lvert\delta_{30}\rvert+\lvert w_4\rvert\lvert\delta_{40}\rvert$
5		$\lvert\Delta_{21}\rvert_m$ dla: $\lvert\delta_{Ri}\rvert=\lvert\delta_R\rvert$	$\frac{1}{\sum R_i}\lvert 2(R_1R_3+R_2R_4)+r_{21}(R_2+R_4-R_1-R_3)\rvert\lvert\delta_R\rvert$ dla zera: $\lvert\Delta_{21\,0}\rvert_m=4\frac{R_{10}R_{30}}{\sum R_{i0}}\lvert\delta_0\rvert$		$\varepsilon_1=\varepsilon$; $\varepsilon_2=-\varepsilon$; $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$, $m=1=n$ $\lvert\Delta_{21}\rvert_m=\frac{R_{10}}{4}\left\{\begin{array}{l}(1-0{,}5\varepsilon)\left[(1+\varepsilon)\lvert\delta_{R1}\rvert+\lvert\delta_{40}\rvert\right]+\\+(1+0{,}5\varepsilon)\left[(1-\varepsilon)\lvert\delta_{R2}\rvert+\lvert\delta_{30}\rvert\right]\end{array}\right\}$
6	1) gdy $\underline{\varepsilon_i=\pm\varepsilon}$ $\varepsilon_{\Sigma R}=\varepsilon\frac{(1-m)(1-n)}{(1+m)(1+n)}\equiv\varepsilon a$ $a=0$ dla $m=1$ lub $n=1$		$\varepsilon_i\varepsilon_j\le 0{,}2$ oraz $\underline{m=1}$ lub $\underline{n=1}$ $\approx 4t'_0\frac{\lvert 1+\sum\varepsilon_i\rvert}{(1+0{,}25\sum\varepsilon_i)^2}\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ oraz $\underline{m=1}$ i $\underline{n=1}$ $(a=0)$ $\lvert\Delta_{21}\rvert_m\approx R_{10}\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$; $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $\underline{m=1=n}$ $\frac{R_{10}}{2}\left[(1-0{,}5\varepsilon^2)\lvert\delta_0\rvert+\lvert\Delta_\varepsilon\rvert\right]$
7	**Losowa miara dokładności:** niepewność standard.,	$\bar{\Delta}_{21}$	$\bar{\Delta}_{21}=\sqrt{\sum\left(w'_{Ri}\bar{\delta}_{Ri}\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}w'^2_{Ri}\left[\bar{\delta}^2_{i0}+\frac{\bar{\Delta}^2_{\varepsilon i}}{(1+\varepsilon_i)^2}\right]}$	dla współczynników. korelacji $k_{ij}=0$	$\sqrt{w'^2_{R1}\bar{\delta}^2_{R1}+w'^2_{R2}\bar{\delta}^2_{R2}+w'^2_3\bar{\delta}^2_{30}+w'^2_4\bar{\delta}^2_{40}}$
8	średniokwadratowy błąd przypadkowy lub systematyczny	dla $\bar{\delta}_{Ri}=\bar{\delta}_R$	$\bar{\Delta}_{21}=\bar{\delta}_R\sqrt{\sum w'^2_{Ri}}$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $m=1$, $n=1$ $\bar{\Delta}_{21}=0{,}5R_{10}\bar{\delta}_R$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $m=n=1$ $\approx 0{,}4R_{10}\sqrt{1+\varepsilon^2}\,\bar{\delta}_0$
9	**Błędy zera r_{21}**		<u>bieżący</u>: $\Delta_{21\,0}=t'_0(\delta_{10}+\delta_{30}-\delta_{20}-\delta_{40})$	<u>graniczny</u>: $\lvert\Delta_{21\,0}\rvert_m=t'_0\sum\lvert\delta_{i0}\rvert$	losowy: $\bar{\Delta}_{21\,0}=t'_0\sqrt{\sum\bar{\delta}^2_{i0}}$

c d n. (to be continued)

Tabela 8.2b. Miary dokładności transmitancji rozwarciowej k_{21} mostka 4R jako czwórnika zasilanego napięciowo.
Table 8.2b. Accuracy measures of the open-circuitry transmittance k_{21} of the 4R bridge as twoport supplied by the voltage source.

10	**Transmitancja napięciowa:** $\frac{U'_{DC}}{U_{AB}} \equiv k_{21} = \frac{r_{21}}{R^{\infty}_{AB}} = \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \equiv k_0 \cdot f'_E(\varepsilon_i)$ gdzie: $k_0 \equiv \frac{m}{(1+m)^2}$ $f'_E(\varepsilon_i) = \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{34})}$	Δ_{21}	$\Delta'_{21} = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2}) + \frac{R_3R_4}{(R_3+R_4)^2}(\delta_{R3}-\delta_{R4})$		Wzór jak obok gdy: $R_3=R_{30}$; $R_4=R_{40}$; oraz $\delta_{R3}=\delta_{30}$; $\delta_{R4}=\delta_{40}$
11			lub $\Delta'_{21}=k_0\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{34})^2}(\delta_{R3}-\delta_{R4})\right]$		$k_0\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\delta_{30}-\delta_{40}\right]$
12			$\varepsilon_2=-\varepsilon_1$ $\varepsilon_4=-\varepsilon_3$ $k_0\frac{1-\varepsilon_1^2}{\left(1+\varepsilon_1\frac{1-m}{1+m}\right)^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+k_0\frac{1-\varepsilon_3^2}{\left(1+\varepsilon_3\frac{1-m}{1+m}\right)^2}(\delta_{R3}-\delta_{R4})$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2}+\delta_{R3}-\delta_{R4})$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $\frac{m}{(1+m)^2}\left[\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\delta_{30}-\delta_{40}\right]$
13	**Błąd bieżący**	$m=1$	$\frac{1}{4}\left[(1-\varepsilon_1^2)(\delta_{R1}-\delta_{R2})+(1-\varepsilon_3^2)(\delta_{R3}-\delta_{R4})\right]$	$\frac{1}{4}(1-\varepsilon^2)(\delta_{R1}-\delta_{R2}+\delta_{R3}-\delta_{R4})$	$\frac{1}{4}\left[(1-\varepsilon^2)(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\delta_{30}-\delta_{40}\right]$
14			$\Delta'_{21}=\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{4[1+0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{4[1+0{,}5(\varepsilon_3+\varepsilon_4)]^2}(\delta_{R3}-\delta_{R4})$		$\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{4[1+0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]^2}(\delta_{R1}-\delta_{R2})+\frac{1}{4}(\delta_{30}-\delta_{40})$
15	**Błąd graniczny**	$\lvert\Delta_{21}\rvert_m$	$k_0\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}(\lvert\delta_{R1}\rvert+\lvert\delta_{R2}\rvert)+\frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{34})^2}(\lvert\delta_{R3}\rvert+\lvert\delta_{R4}\rvert)\right]$		$k_0\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}(\lvert\delta_{R1}\rvert+\lvert\delta_{R2}\rvert)+\lvert\delta_{30}\rvert+\lvert\delta_{40}\rvert\right]$
16		$\lvert\Delta_{21}\rvert_m$ dla $\lvert\delta_{Ri}\rvert=\lvert\delta_R\rvert$	$k_0\left[\frac{\lvert(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\rvert}{(1+\varepsilon_{12})^2}+\frac{\lvert(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\rvert}{(1+\varepsilon_{34})^2}\right]\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $4k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $2k_0\frac{1-\varepsilon^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\lvert\delta_R\rvert+2k_0\lvert\delta_0\rvert$
17			$m=1$ $\frac{1}{4}\left[\frac{\lvert(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\rvert}{(1+0{,}5\varepsilon_1+0{,}5\varepsilon_2)^2}+\frac{\lvert(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\rvert}{(1+0{,}5\varepsilon_3+0{,}5\varepsilon_4)^2}\right]\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $m=1$ $\lvert\Delta'_{21}\rvert_m=(1-\varepsilon^2)\lvert\delta_R\rvert$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $m=1$ $\lvert\Delta''_{21}\rvert_m=0{,}5\left[(1-\varepsilon^2)\lvert\delta_R\rvert+\lvert\delta_0\rvert\right]$
18	**Losowa miara dokładności**	$\bar{\Delta}_{21}$	$\bar{\Delta}_{21}\equiv\sqrt{\sum w'^2_{Ri}(\bar{\delta}_{Ri})^2}$ gdzie: $w'_{R1}=w'_{R2}=k_0\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{12})^2}$; $w'_{R3}=w'_{R4}=k_0\frac{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{34})^2}$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $\frac{1-\varepsilon^2}{4\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^2}\sqrt{\bar{\delta}^2_{R1}+\bar{\delta}^2_{R2}+\bar{\delta}^2_{R3}+\bar{\delta}^2_{R4}}$	$\varepsilon_1=\varepsilon$ $\varepsilon_2=-\varepsilon$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $\bar{\delta}_{R1}=\bar{\delta}_{R2}=\bar{\delta}_R$, $\bar{\delta}_{30}=\bar{\delta}_{40}=\bar{\delta}_0$ $\frac{m\sqrt{2}}{(1+m)^2}\sqrt{\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-m}{1+m}\right)^4}\bar{\delta}_R^2+\bar{\delta}_0^2}$
19		dla $\bar{\delta}_{Ri}=\bar{\delta}_R$	$\bar{\Delta}_{21}\equiv\sqrt{\sum w^2_{Ri}}\,\bar{\delta}_R$	$\varepsilon_i=\pm\varepsilon$ $m=1$ $=0{,}5\,(1-\varepsilon^2)\,\bar{\delta}_R$	$\varepsilon_2=-\varepsilon_1$ $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ $m=1$ $=0{,}25\sqrt{2}\sqrt{(1-\varepsilon^2)\bar{\delta}_R^2+\bar{\delta}_0^2}$
20	**Błędy zera**		bieżący: $\Delta_{210}=k_0(\delta_{10}+\delta_{30}-\delta_{20}-\delta_{40})$	graniczny: $\lvert\Delta_{210}\rvert_m=k_0\Sigma\lvert\delta_{i0}\rvert$	losowy: $\bar{\Delta}_{210}=k_0\sqrt{\Sigma\bar{\delta}^2_{i0}}$

Błędy bezwzględne czułości t_{DC} i t_{AB} mostka dwuprądowego wynikają z różniczki zupełnej i są następujące:

$$\Delta_{tDC} = \frac{R_1 R_2 \left(\delta_{R1} + \delta_{R2}\right) - R_3 R_4 \left(\delta_{R3} + \delta_{R4}\right) - t_{DC} \sum R_i'' \delta_{Ri}}{\sum R_i} \tag{8.45a}$$

oraz

$$\Delta_{tAB} = \frac{R_1 R_4 \left(\delta_{R1} + \delta_{R4}\right) - R_2 R_3 \left(\delta_{R2} + \delta_{R3}\right) - t_{AB} \sum R_i''' \delta_{Ri}}{\sum R_i} \tag{8. 45b}$$

lub po zgrupowaniu wyrażeń poszczególnych błędów δ_{Ri}

$$\Delta_{tDC} = \frac{R_1 \left(R_2 - t_{DC}\right)\delta_{R1} + R_2 \left(R_1 - t_{DC}\right)\delta_{R2} - R_3 \left(R_4 + t_{DC}\right)\delta_{R3} + R_4 \left(R_3 + t_{DC}\right)\delta_{R4}}{\sum R_i} \tag{8.45c}$$

oraz:

$$\Delta_{tAB} = \frac{R_1 \left(R_4 - t_{AB}\right)\delta_{R1} + R_4 \left(R_1 - t_{AB}\right)\delta_{R4} - R_2 \left(R_3 + t_{AB}\right)\delta_{R2} - R_3 \left(R_2 + t_{AB}\right)\delta_{R3}}{\sum R_i} \tag{8.45d}$$

gdzie:

Δ_{tDC}, Δ_{tAB} – wartości chwilowe błędów bezwzględnych czułości t_{AB}, t_{DC}

$\delta_{Ri} \equiv \frac{\Delta_{Ri}}{R_i}$ – wartości bieżące błędu względnego rezystancji R_i mostka.

Wzory te można też przedstawić w wartościach względnych rezystancji początkowych i ich przyrostów. Są one podobne w formie do odpowiadających im wzorów (8.12) i (8.14) dla błędów transmitancji r_{21} mostka jednoprądowego.

Błędy graniczne $\left|\Delta_{tDC}\right|_m$, $\left|\Delta_{tAB}\right|_m$ **obu czułości** wynikają z (8.45c i d) i są opisane następującymi wzorami:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[R_1\left(R_2 - t_{DC}\right)\left|\delta_{R1}\right| + R_2\left(R_1 - t_{DC}\right)\left|\delta_{R2}\right| + R_3\left(R_4 + t_{DC}\right)\left|\delta_{R3}\right| + R_4\left(R_3 + t_{DC}\right)\left|\delta_{R4}\right|\right] \tag{8.46a}$$

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[R_1\left(R_4 - t_{AB}\right)\left|\delta_{R1}\right| + R_4\left(R_1 - t_{AB}\right)\left|\delta_{R4}\right| + R_2\left(R_3 + t_{AB}\right)\left|\delta_{R2}\right| + R_3\left(R_2 + t_{AB}\right)\left|\delta_{R3}\right|\right] \tag{8.46b}$$

lub po podstawieniu wzorów dla czułości t_{DC} i t_{AB}

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \left[\begin{array}{l} \frac{R_1\left(R_2+R_3\right)\left(R_2+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R1}\right| + \frac{R_2\left(R_1+R_3\right)\left(R_1+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R2}\right| + \\ + \frac{R_3\left(R_1+R_4\right)\left(R_2+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R3}\right| + \frac{R_4\left(R_1+R_3\right)\left(R_2+R_3\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R4}\right| \end{array}\right] \tag{8.46c}$$

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \left[\begin{array}{l} \frac{R_1\left(R_2+R_4\right)\left(R_3+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R1}\right| + \frac{R_2\left(R_1+R_3\right)\left(R_3+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R2}\right| + \\ + \frac{R_3\left(R_1+R_4\right)\left(R_2+R_4\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R3}\right| + \frac{R_4\left(R_1+R_2\right)\left(R_1+R_3\right)}{\left(\sum R_i\right)^2}\left|\delta_{R4}\right| \end{array}\right] \tag{8.46d}$$

Ze wzorów (8.46c i d) wynika, że wszystkie współczynniki wagi błędów $|\delta_{Ri}|$ są dodatnie, gdyż $R_i > 0$.

Przy jednakowych błędach granicznych wszystkich rezystancji mostka, tj. gdy $\left|\delta_{Ri}\right| \equiv \left|\delta_R\right|$, otrzymuje się:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[2\left(R_1R_2 + R_3R_4\right) - t_{DC}\left(R_1 + R_2\right) + t_{DC}\left(R_3 + R_4\right)\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.47a}$$

oraz

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[2\left(R_1R_4 + R_2R_3\right) - t_{AB}\left(R_1 + R_4\right) + t_{AB}\left(R_2 + R_3\right)\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.47b}$$

Po uwzględnieniu wzorów dla czułości t_{DC} i t_{AB} oraz przekształceniach:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(1 + 2\frac{R_3 + R_4}{\sum R_i}\right)R_1R_2 + \left(1 + 2\frac{R_1 + R_2}{\sum R_i}\right)R_3R_4\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.48a}$$

lub

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(3 - 2\frac{R_1 + R_2}{\sum R_i}\right)R_1R_2 + \left(3 - 2\frac{R_3 + R_4}{\sum R_i}\right)R_3R_4\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.48b}$$

oraz

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(1 + 2\frac{R_1 + R_4}{\sum R_i}\right)R_2 R_3 + \left(1 + 2\frac{R_2 + R_3}{\sum R_i}\right) R_1 R_4\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.48c}$$

lub

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{1}{\sum R_i}\left[\left(3 - 2\frac{R_1 + R_4}{\sum R_i}\right)R_1 R_4 + \left(3 - 2\frac{R_2 + R_3}{\sum R_i}\right) R_2 R_3\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.48d}$$

Zaś w wartościach względnych przy założeniu, że dla określonego m oraz n wyjście DC osiąga równowagę przy $R_{30} = m/n$, a wyjście AB – przy $R_{30} = n/m$, otrzymuje się:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{t_0''}{1+\varepsilon''_{\Sigma R}}\left[\begin{aligned}&\left(1 + 2t_0''\frac{m\left(1+\varepsilon_3\right)+n^2\left(1+\varepsilon_4\right)}{\left(1+\varepsilon''_{\Sigma R}\right)mnR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)+\\ &+\left(1 + 2t_0''\frac{\left(1+\varepsilon_1\right)+m\left(1+\varepsilon_2\right)}{\left(1+\varepsilon''_{\Sigma R}\right)m R_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_3\right)\left(1+\varepsilon_4\right)\end{aligned}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.49a}$$

lub

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{t_0''}{1+\varepsilon''_{\Sigma R}}\left[\begin{aligned}&\left(3 - 2t_0''\frac{\left(1+\varepsilon_1\right)+m\left(1+\varepsilon_2\right)}{\left(1+\varepsilon''_{\Sigma R}\right)mR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)+\\ &+\left(3 - 2t_0''\frac{m\left(1+\varepsilon_3\right)+n^2\left(1+\varepsilon_4\right)}{\left(1+\varepsilon''_{\Sigma R}\right)mnR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_3\right)\left(1+\varepsilon_4\right)\end{aligned}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.49b}$$

gdzie:

$$\varepsilon''_{\Sigma R} = \frac{n\varepsilon_1 + m\varepsilon_3 + n\left(m\varepsilon_2 + n\varepsilon_4\right)}{\left(1+n\right)\left(m+n\right)}$$

oraz

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{t_0'''}{1+\varepsilon'''_{\Sigma R}}\left[\begin{aligned}&\left(1 + 2t_0'''\frac{n\left(1+\varepsilon_3\right)+m^2\left(1+\varepsilon_2\right)}{\left(1+\varepsilon'''_{\Sigma R}\right)mnR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_4\right)+\\ &+\left(3 - 2t_0'''\frac{\left(1+\varepsilon_1\right)+n\left(1+\varepsilon_4\right)}{\left(1+\varepsilon'''_{\Sigma R}\right)nR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right)\end{aligned}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.49d}$$

lub

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{t_0'''}{1+\varepsilon'''_{\Sigma R}}\left[\begin{aligned}&\left(3 - 2t_0'''\frac{\left(1+\varepsilon_1\right)+n\left(1+\varepsilon_4\right)}{\left(1+\varepsilon'''_{\Sigma R}\right)nR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_4\right)+\\ &+\left(3 - 2t_0'''\frac{n\left(1+\varepsilon_3\right)+m^2\left(1+\varepsilon_2\right)}{\left(1+\varepsilon'''_{\Sigma R}\right)mnR_{10}}\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right)\end{aligned}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.49d}$$

gdzie:

$$\varepsilon'''_{\Sigma R} = \frac{m\varepsilon_1 + n\varepsilon_3 + m(m\varepsilon_2 + n\varepsilon_4)}{(1+m)(m+n)}$$

Dla mostka dwuprądowego antysymetrycznego, tj. o $m = n$, w którym równoważą się równocześnie oba wyjścia, wzory te częściowo się upraszczają ze względu na $m = n$ oraz $t''_0 = t'''_0$. Otrzymuje się. wówczas np.:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{t''_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\begin{array}{l}\left(3 - 2t''_0\frac{(1+\varepsilon_1)+m(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})mR_{10}}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)+ \\ +\left(3 - 2t''_0\frac{(1+\varepsilon_3)+m(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})mR_{10}}\right)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\end{array}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.50a}$$

oraz

$$\left|\Delta_{tAB}\right|_m = \frac{t''_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\begin{array}{l}\left(3 - 2t''_0\frac{(1+\varepsilon_1)+m(1+\varepsilon_4)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})mR_{10}}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_4)+ \\ +\left(3 - 2t''_0\frac{(1+\varepsilon_3)+m(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})mR_{10}}\right)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\end{array}\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.50b}$$

gdzie:

$$\varepsilon''_{\Sigma R} = \varepsilon'''_{\Sigma R} \equiv \varepsilon_{\Sigma R} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + m(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)}{2(1+m)};$$

$$t''_0 = t'''_0 = \frac{mR_{10}}{2(1+m)}$$

Dla $\varepsilon_i\varepsilon_j < 0{,}2$ w przybliżeniu:

$$\left|\Delta_{21}\right|_m \approx 4\left|t''_0\right|\frac{\left|1+\sum\varepsilon_i\right|}{(1+\varepsilon_{\Sigma R})^2}\left|\delta_R\right| \tag{8.50c}$$

Wzór ten ma podobną postać jak (8.26e) dla mostka jednoprądowego, ale znaki przyrostów ε_i, warunek równowagi i czułość t_0" są w ogólnym przypadku inne.

Dla mostka dwuprądowego o jednakowych wszystkich rezystancjach początkowych, tj. gdy $m = n = 1$ zachodzi: $\varepsilon_{\Sigma R} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4}{4}$ oraz $t''_0 = \frac{R_{10}}{4}$ i wówczas:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{R_{10}}{4+\sum\varepsilon_i}\left[\left(1+2\frac{2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4+\sum\varepsilon_i}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)+\left(1+2\frac{2+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4+\sum\varepsilon_i}\right)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.51a}$$

$$\left|\Delta_{1AB}\right|_m = \frac{R_{10}}{4+\sum\varepsilon_i}\left[\left(1+2\frac{2+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{4+\sum\varepsilon_i}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_4)+\left(1+2\frac{2+\varepsilon_1+\varepsilon_4}{4+\sum\varepsilon_i}\right)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\right]\left|\delta_R\right| \tag{8.51b}$$

Nawet dla mostka o jednakowych wartościach początkowych R_{i0} rezystancji, ale niezależnych ich przyrostach ε_i, błędy graniczne obu wyjść są opisane różnymi wzorami. Dotyczy to też ich miar losowych.

Podane tu ścisłe wzory na błędy są dosyć rozbudowane. Dla niektórych przypadków szczególnych mostka upraszczają się one dość istotnie po uwzględnieniu zależności istniejących pomiędzy jego parametrami. Na przykład, przy jednakowych modułach przyrostów, tj. **dla** $\varepsilon_i = \pm\,\varepsilon$, dzięki analogii z wzorami dla mostka jednoprądowego, otrzymuje się wzór na błąd graniczny o wspólnej postaci dla obu napięć wyjściowych

$$\left|\Delta_{tCD}\right|_m = \left|\Delta_{tAB}\right|_m = 4\left|t''_0\right|\frac{\left|1+\varepsilon^2\varepsilon_{\Sigma R}\right|}{\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)^2}\left|\delta_R\right| \tag{8.52}$$

Gdy $m = 1 = n$ i ponadto przyrosty $\varepsilon_i = \pm\,\varepsilon$, wzór (8.52) przyjmuje postać:

$$\left|\Delta_{tCD}\right|_m = \left|\Delta_{tAB}\right|_m \approx R_{10}\left|\delta_R\right| \tag{8.52a}$$

W równowadze, tj. gdy wszystkie przyrosty $\varepsilon_i = 0$, błąd graniczny zera obu wyjść wynosi:

$$\left|\Delta_{21}\right|_{m0} = R_0\left|\delta_0\right|$$

Rozpatrzmy jeszcze inne dwa przypadki szczególne.

Przykład 8.2.

Mostek dwuprądowy jest symetryczny względem przekątnej DC, tj. zmieniają się w nim cztery ramiona, ale tak, że są parami sprzężone, tj.:

$$R_1 = R_2 = R_{10}(1+\varepsilon_1) \neq R_4 = R_3 = nR_{10}(1+\varepsilon_4).$$

Stąd:

$$t_{DC} = R_1 - R_4; \qquad t_{AB} = 0; \qquad \Sigma R_i = 2(R_1 + R_4).$$

Z zależności (8.44-b) oraz (8.44-c) wynika odpowiednio:

$$U''^{\infty}_{DC} = J\frac{R_1^2 - R_4^2}{2(R_1 + R_4)} = \frac{J}{2}(R_1 - R_4);$$

oraz $$U^{\infty}_{AB} = 0$$

Warunek równowagi dla $U''^{\infty}_{DC}=0$ to jednakowe rezystancje:

$$R_{10} = R_{40} = R_{20} = R_{30}.$$

a stąd:

$$U''^{\infty}_{DC} = \frac{J R_{10}}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$$

Z tych uproszczonych zależności pomiędzy parametrami mostka nie można jednak bezpośrednio wyznaczać wzorów dla błędów. Należy posłużyć się pełnymi równaniami napięć oraz ich błędów i dopiero do nich wstawiać zależności pomiędzy parametrami. Ze wzorów (8.44) i (8.45) wynika, że:

$$\Delta_{tDC} = \frac{R_1 R_4}{2(R_1 + R_4)}(\delta_{R1} + \delta_{R2} - \delta_{R3} - \delta_{R4})$$

oraz:

$$\Delta_{tAB0} = \frac{R_1 R_4}{2(R_1 + R_4)}(\delta_{R1} + \delta_{R4} - \delta_{R2} - \delta_{R3})$$

Stan równowagi $U^{\infty}_{AB} = 0$ ma charakter dynamiczny, tj. zero sygnału na wyjściu AB zależy od bieżących wartości kombinacji błędów rezystancji w nawiasie ostatniego wzoru. Błędy graniczne są jednakowe, gdyż wynoszą:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \frac{R_1 R_4}{2(R_1 + R_4)}\left(|\delta_{R1}| + |\delta_{R2}| + |\delta_{R3}| + |\delta_{R4}|\right)$$

oraz

$$\left|\Delta_{tAB0}\right|_m = \frac{R_1 R_4}{2(R_1 + R_4)}\left(|\delta_{R1}| + |\delta_{R4}| + |\delta_{R2}| + |\delta_{R3}|\right)$$

lub w wartościach względnych:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \left|\Delta_{tAB0}\right|_m = \frac{R_{10} R_{40}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_4)}{2\left[\left(R_{10}(1+\varepsilon_1) + R_{40}(1+\varepsilon_4)\right)\right]}\left(|\delta_{R1}| + |\delta_{R2}| + |\delta_{R3}| + |\delta_{R4}|\right)$$

Dla jednakowych rezystancji początkowych $R_{10} = R_{40}$ i przeciwnych przyrostów $\varepsilon_1 = +\varepsilon$ oraz $\varepsilon_4 = -\varepsilon$ czułość wynosi:

$$t_{DC} = \frac{R_{10}}{2}\varepsilon$$

zaś błędy bieżące:

$$\Delta_{tDC} = \frac{R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)}{4}\left(\delta_{R1}+\delta_{R2}-\delta_{R3}-\delta_{R4}\right)$$

$$\Delta_{tAB0} = \frac{R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)}{4}\left(\delta_{R1}+\delta_{R4}-\delta_{R2}-\delta_{R3}\right)$$

Błędy graniczne obu czułości są wówczas równe:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \left|\Delta_{tAB0}\right|_m = \frac{R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)}{4}\sum_{i=1}^{4}\left|\delta_{Ri}\right|$$

oraz przy jednakowych błędach granicznych rezystancji $\left|\delta_{Ri}\right| \equiv \left|\delta_R\right|$:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = \left|\Delta_{tAB0}\right|_m = R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)\left|\delta_R\right|.$$

Natomiast miary losowe opisuje zależność

$$\overline{\Delta}_{tDC} = \overline{\Delta}_{tAB0} = \frac{R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\overline{\delta}_{Ri}}$$

i dla jednakowych średniokwadratowych miar losowych $\overline{\delta}_{Ri} \equiv \overline{\delta}_R$

$$\overline{\Delta}_{tDC} = \overline{\Delta}_{tAB0} = \frac{R_{10}\left(1-\varepsilon^2\right)}{2}\overline{\delta}_R$$

Współczynnik w tym wzorze jest o połowę mniejszy niż przy jednakowych błędach granicznych.

Przykład 8.3

Określimy błędy graniczne czułości obu napięć rozwarciowych mostka dwuprądowego z rys. 5.1, antysymetrycznego w równowadze, tj. gdy $m = n$, przy tylko dwu zmiennych sąsiednich ramionach $R_1 = R_{10}(1+\varepsilon_1)$, $R_2 = R_{20}(1+\varepsilon_2)$ oraz przy jednakowych błędach granicznych $|\delta_{Ri}| = |\delta_R| = |\delta_{R0}|$ rezystancji wszystkich ramion, tj. o takiej samej wartości, jak dla rezystancji początkowych w równowadze mostka. Ze wzorów (8.44b) i (8.44c) przy $R_3 = R_{10}$, $R_4 = R_{20}$ wynika:

$$t_{DC} = \frac{R_1R_2 - R_{10}R_{20}}{\sum R_i} = t_0'' \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$$

oraz

$$t_{AB} = \frac{R_1R_{20} - R_2R_{10}}{\sum R_i} = t_0'' \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$$

gdzie:

$$\sum R_i = R_1 + R_2 + R_{10} + R_{20} = R_{10}\left[2(1+m) + \varepsilon_1 + m\varepsilon_2\right] = 2R_{10}(1+m)(1+\varepsilon_{\Sigma R});$$

$$\varepsilon_{\Sigma R} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{2(1+m)};$$

$$t_0'' = R_{10}\frac{m}{2(1+m)}.$$

Stąd i ze wzoru (8.48a) po przekształceniach otrzymuje się błąd graniczny czułości t_{DC}:

$$|\Delta_{tDC}|_m = \frac{R_{10}R_{20}}{\left(\sum R_i\right)^2}\left\{4(R_{10}+R_{20})\left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)+1\right] + (R_{10}\varepsilon_1 + R_{20}\varepsilon_2)\left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)+3\right]\right\}|\delta_R|$$

lub w wartościach względnych:

$$|\Delta_{tDC}|_m = \frac{mR_{10}}{(1+m)(1+\varepsilon_{\Sigma R})^2}\left\{1 + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{4(1+m)}\left[3 + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\right]\right\}|\delta_R|$$

Dla niezbyt dużych przyrostów można ograniczyć się w liczniku i mianowniku do członów liniowych względem ε_1 i ε_2. Wówczas:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m \approx 4\,t''_0\,\frac{1+\frac{1}{2(1+m)}\left[\varepsilon_1(2+m)+\varepsilon_2(1+2m)\right]}{1+\frac{1}{2(1+m)}\left(\varepsilon_1+m\varepsilon_2\right)}\left|\delta_R\right|$$

Gdy ponadto przyrosty względne rezystancji są jednakowe, czyli $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, to po skróceniu otrzymuje się:

$$\left|\Delta_{tDC}\right|_m = 4t''_0(1+0{,}5\varepsilon)\left|\delta_R\right|$$

Błąd graniczny zależy od m tylko poprzez czułość t''_0. Podobne wzory obowiązują też dla klasycznego mostka jednoprądowego o zmiennych tylko dwu przeciwległych rezystancjach.

W podobny sposób otrzymuje się błąd graniczny $\left|\Delta_{tAB}\right|_m$ czułości t_{AB}.

Błędy bezwzględne wyjściowych napięć rozwarciowych każdego z układów b) oraz c) mostka dwuprądowego są następujące:

$$\Delta_{U''DC} = J\,\Delta_{tDC} + t_{DC}\,\Delta_J \tag{8.53}$$

oraz

$$\Delta_{U\,AB} = J\,\Delta_{tAB} + t_{AB}\,\Delta_J \tag{8.54}$$

Odnosząc je do stałej wartości napięć wyjściowych, np. do pełnych ich zakresów, otrzymuje błędy względne

$$\delta''_{Um} \equiv \frac{\Delta_{U''DC}}{U''_{DC\,max} - U''_{DC\,min}} = \frac{\Delta_{tDC}}{t_{DC\,max} - t_{DC\,min}} + \delta_J \tag{8.55}$$

$$\delta'''_{Um} \equiv \frac{\Delta_{U\,AB}}{U_{AB\,max} - U_{AB\,min}} = \frac{\Delta_{tAB}}{t_{AB\,max} - t_{AB\,min}} + \delta_J \tag{8.56}$$

gdzie

δ''_{Um}, δ'''_{Um} – błędy względne napięć U''_{DC} oraz U_{AB} odniesione do pełnego zakresu ich zmian;

$\delta_J \equiv \frac{\Delta_J}{J}$ – bieżąca wartość błędu względnego prądu J.

Przy równowadze mostka błędy te mają skończone wartości. Gdy J = const., $\delta_J \to 0$ we wzorach (8.53 – 8.56) pozostają tylko pierwsze składniki.

Błędy zera napięć wyjściowych występują wtedy, gdy wszystkie przyrosty ε_i=0. Wynikają one tylko z wartości błędów początkowych δ_{i0} rezystancji mostka i wynoszą:

$$\Delta_{U''DC0} = J\,\Delta_{tDC\,0} = T''_0\left(\delta_{10} + \delta_{20} - \delta_{30} - \delta_{40}\right) \qquad (8.57)$$

$$\Delta_{UAB\,0} = J\,\Delta_{tAB\,0} = T'''_0\left(\delta_{10} + \delta_{40} - \delta_{20} - \delta_{30}\right) \qquad (8.58)$$

Stan równowagi każdego z wyjść mostka dwuprądowego może pozostać bez zmian przy wielu kombinacjach wartości błędów początkowych jego rezystancji, różnych dla każdego z wyjść i innych niż dla mostka jednoprądowego. Wszystkie błędy obu napięć są ze sobą powiązane poprzez parametry mostka i wspólne błędy jego rezystancji. Wzory częściowo upraszczają się dla mostka dwuprądowego o obu wyjściach równocześnie zrównoważonych.

Przy znanych wartościach i znakach poszczególnych błędów rezystancji mostka można ze wzorów (8.45) – (8.58) wyznaczać błędy wypadkowe. Jeśli jednak znane są co najwyżej różne miary zbiorów tych błędów, np. ich błędy graniczne systematyczne lub przypadkowe, czy przedziały niepewności, to na podstawie odpowiednich, podanych tu wzorów znajduje się zależności wypadkowe dla tych miar postępując podobnie jak dla mostka jednoprądowego.

8.10. Miary dokładności pomiarów 2D w mostku 4R

Przykładem zagadnienia odwrotnego wyznaczania niedokładności jest ocena błędów przyrostów rezystancji ramion mostka jako czwórnika otrzymanych z pomiarów napięcia wyjściowego U'_{DC} i przyrostu ε_{AB} rezystancji wejściowej R^{∞}_{AB}. Te dwa parametry mostka można zmierzyć w układzie kaskadowym z rys. 4.1.

8.10.1. Dokładność pomiarów dwu przyrostów rezystancji sąsiednich ramion mostka

Na podstawie zmierzonego napięcia wyjściowego U'_{DC} i przyrostu ε_{AB} rezystancji wejściowej mostka nieobciążonego określa się przyrosty dwu jego rezystancji, np. ε_1, ε_2 rezystancji R_1, R_2 przy $\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_4 = 0$ opisane w rozdziale 4 wzorami (4.7a,b):

$$\varepsilon_1 = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB} + \frac{U'_{DC}}{JR_{10}}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left(\varepsilon_{AB} - \frac{U'_{DC}}{mJR_{10}}\right)$$

Jeśli założy się, że składowe stałe błędów elementów mostka i jego zasilania zostały skorygowane lub wskalowane, a składowe zmienne w czasie pomiarów są pomijalne, to błędy obu przyrostów zależą tylko od niedokładności określenia ε_{AB} i U'_{DC}. Wówczas otrzymuje się następujące wzory podstawowe dla błędów bezwzględnych obu przyrostów:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{AB}+\frac{U'_{DC}}{JR_{10}}}{n-\varepsilon_{AB}}\right)\Delta\varepsilon_{AB} + \frac{\Delta U'_{DC}}{JR_{10}}\right] \tag{8.59a}$$

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{1+n}{n-\varepsilon_{AB}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{AB}-\frac{U'_{DC}}{mJR_{10}}}{n-\varepsilon_{AB}}\right)\Delta\varepsilon_{AB} - \frac{\Delta U'_{DC}}{mJR_{10}}\right] \tag{8.59b}$$

Wzory '(47a,b) i (8.59a,b) upraszczają się dla małego sumarycznego przyrostu rezystancji dwu zmiennych gałęzi w stosunku do sumy rezystancji mostka, tj. gdy $|\Delta R_1 + \Delta R_2| << \sum R_{i0}$ i również dla przypadków szczególnych - gdy: $m = n$, $m = 1$, lub $n = 1$. Dwa, trzy, lub wszystkie z tych warunków mogą być spełnione równocześnie. Gdy zachodzi tylko $|\Delta R_1 + \Delta R_2| << \sum R_{i0}$, to $\varepsilon_{AB} << n$ i wówczas:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{1+n}{n}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{AB}+\frac{U'_{DC}}{JR_{10}}}{n}\right)\Delta\varepsilon_{AB} + \frac{\Delta U'_{DC}}{JR_{10}}\right] \tag{8.60a}$$

oraz

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{1+n}{n}\left[(1+\frac{\varepsilon_{AB}-\frac{U'_{DC}}{m\,JR_{10}}}{n})\,\Delta\varepsilon_{AB} - \frac{\Delta U'_{DC}}{mJR_{10}} \right] \tag{8.60b}$$

W oparciu o (8.59a, b) i (8.60a, b) można wyznaczyć wzory opisujące graniczne błędy systematyczne i przypadkowe oraz niepewności pomiaru.

8.10.2 Dokładność pomiarów dwu skojarzonych par przyrostów rezystancji

W rozdziale 2 podano, że jeśli cztery przyrosty ramion nieobciążonego mostka są odpowiednio sprzężone parami, to napięcie wyjściowe i jedna z rezystancji rozwarciowych zależą od nich liniowo. Np. gdy $\varepsilon_3 = m\varepsilon_1$, $\varepsilon_4 = m\varepsilon_2$, sign($\varepsilon_2$) = -sign($\varepsilon_1$), to wartości przyrostów ε_1, ε_4, opisują podane w rozdziale 4 równania (4.17a, b):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0{,}5(1+m)\,\varepsilon_{AB} + 0{,}5\frac{1+n}{n}\frac{U'_{DC}}{JR_{10}} \equiv w_E\,\varepsilon_{AB} + w_U\,U'_{DC} \\ \varepsilon_4 &= 0{,}5(1+m)\,\varepsilon_{AB} - 0{,}5\frac{1+n}{n}\frac{U'_{DC}}{JR_{10}} \equiv w_E\,\varepsilon_{AB} - w_U\,U'_{DC} \end{aligned} \tag{4.17a,b}$$

gdzie współczynniki:

$$w_E \equiv 0{,}5(1+m); \qquad w_U \equiv 0{,}5\frac{1+n}{n}\frac{1}{JR_{10}}.$$

Zależności pomiędzy wartościami bieżącymi błędów otrzymuje się z tych równań metodą różniczki zupełnej

$$\Delta_{\varepsilon 1} = w_E\left(\varepsilon_{AB}\,\delta_{wE} + \Delta_{\varepsilon AB}\right) + w_U\left(U'_{DC}\,\delta_{wU} + \Delta_{UDC}\right) \tag{8.61a}$$

$$\Delta_{\varepsilon 4} = w_E\left(\varepsilon_{AB}\,\delta_{wE} + \Delta_{\varepsilon AB}\right) - w_U\left(U'_{DC}\,\delta_{wU} + \Delta_{UDC}\right) \tag{8.61b}$$

gdzie:

$\Delta_{\varepsilon 1}$, $\Delta_{\varepsilon 4}$, $\Delta_{\varepsilon AB}$, Δ_{UDC}, oraz δ_{wE} i δ_{wU} – wartości bieżące błędów bezwzględnych kolejno dla parametrów: ε_1, ε_4, ε_{AB}, U'_{DC}, oraz błędów względnych współczynników w_E i w_U .

Zazwyczaj wartości bieżące wszystkich błędów po prawej stronie tych równań nie są znane, zmieniają się w czasie i są trudne do określenia poprzez dodatkowe pomiary. Należy więc posługiwać się różnymi miarami zbiorów tych błędów, w tym ich wartościami uśrednionymi oraz granicami przedziałów i obszarów ich występowania przy określonym prawdopodobieństwie. Należy tu oprzeć się na danych, zawartych w opisach niedokładności całego mostka, jego elementów i zastosowanych przyrządów pomiarowych, podawanych przez producenta bądź uzyskanych w wyniku ich wiarygodnego metrologicznie sprawdzenia. W tym celu na podstawie powyższych zależności pomiędzy bieżącymi wzorami trzeba określić zależności zarówno dla błędów systematycznych granicznych jak i średniokwadratowych błędów przypadkowych (lub niepewności pomiarowych) z uwzględnieniem stopnia korelacji ich składowych. Mają one jednakowe postacie dla obu przyrostów $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ i wynoszą odpowiednio:

błąd graniczny

$$|\Delta_{\varepsilon 1}| = |\Delta_{\varepsilon 4}| \le w_E\left(|\varepsilon_{AB}|\,|\delta_{wE}| + |\Delta_{\varepsilon AB}|\right) + w_U\left(|U'_{DC}|\,|\delta_{wU}| + |\Delta_{UDC}|\right) \quad (8.62)$$

oraz błąd przypadkowy, gdy nie ma korelacji

$$\bar{\Delta}_{\varepsilon 1} = \bar{\Delta}_{\varepsilon 4} = +\sqrt{w_E^2\left(\varepsilon_{AB}^2\,\bar{\delta}_{wE}^{\,2} + \bar{\Delta}_{\varepsilon AB}^{\,2}\right) + w_U^2\left(U'^2_{DC}\,\bar{\delta}_{wU}^{\,2} + \bar{\Delta}_{UDC}^{\,2}\right)} \quad (8.63)$$

gdzie:

$|\Delta_{\varepsilon 1}|, |\Delta_{\varepsilon 4}|, |\Delta_{\varepsilon AB}|, |\Delta_{UDC}|$ oraz $|\delta_{wE}|$ i $|\delta_{wU}|$ – błędy systematyczne graniczne: bezwzględne kolejno dla pomiarów parametrów: ε_1, ε_4, ε_{AB} U'_{DC} oraz takież błędy względne współczynników w_E i w_U określone z opisów niedokładności elementów mostka

$\bar{\Delta}_{\varepsilon 1}$, $\bar{\Delta}_{\varepsilon 4}$, $\bar{\Delta}_{\varepsilon AB}$, $\bar{\Delta}_{UDC}$, oraz $\bar{\delta}_{wE}$, $\bar{\delta}_{wU}$ - takież średniokwadratowe błędy przypadkowe (lub niepewności pomiarowe) odpowiednio dla tych samych jak wyżej parametrów.

Wzory (8.62), (8.63) można przekształcić do postaci o jednorodnych obu stronach, tj. gdy występują w nich tylko same błędy względne bądź bezwzględne. Dla pierwszego z tych przypadków zachodzi następująca zależność podwójna:

$$\frac{|\delta_{\varepsilon 1}|}{|\delta_{\varepsilon 4}|} \le \frac{|\varepsilon_4|}{|\varepsilon_1|} = \frac{\bar{\delta}_{\varepsilon 1}}{\bar{\delta}_{\varepsilon 4}} \quad (8.64)$$

A więc względne błędy systematyczne graniczne i średniokwadratowe przypadkowe przyrostów ε_1, ε_4, wyznaczanych z pomiarów przyrostu ε_{AB} i napięcia U'_{DC}, są odwrotnie proporcjonalne do ich wartości bezwzględnych, czyli większy z nich obarczony jest mniejszym błędem względnym. Takiego wniosku można było oczekiwać intuicyjnie opierając się na zdrowym rozsądku. Jednakże, jeśli w stanie równowagi mostka błędy bezwzględne są różne od zera, to dla przyrostów ε_1, ε_4 i ε_{AB} oraz napięcia U'_{DC} wartości błędów względnych wzrastają do ∞. Dlatego też przy małych wartościach tych parametrów należy posługiwać się bądź samymi błędami bezwzględnymi, bądź każdy z nich odnosić do stałej, np. maksymalnej wartości zakresu zmian jego parametru.

Szacowanie błędów lub niepewności pomiarowych współczynników w_E, w_U przeprowadza się według istniejących lub hipotetycznych opisów niedokładności elementów mostka i źródła prądowego J. Można tego dokonać w oparciu o wzory wynikające z ogólnych zależności dla parametrów mostka jako czwórnika, podanych w rozdz. 2. Dla każdej rezystancji R_i należy uwzględniać odpowiednie miary jej błędu całkowitego bądź błędów składowych określonych dla rezystancji początkowej R_{i0} oraz przyrostów ε_i.

Wyznaczone ze wzoru (8.63) błędy średniokwadratowe umożliwiają dalsze oszacowywanie szerokości przedziałów ufności błędów przypadkowych o zadanym poziomie prawdopodobieństwa (np. błąd 3σ dla rozkładu normalnego). Można też, po wyznaczeniu za pomocą tego wzoru standardowych niepewności pomiarowych typu A, znajdować ich niepewności o określonym współczynniku rozszerzenia wg międzynarodowych zaleceń, które stosuje już wiele służb miar.

Wzory opisujące błędy lub niepewności pomiarowe stają się prostsze w sytuacjach szczególnych, na przykład gdy podczas pomiarów stałe są błędy systematyczne δ_{wE} i δ_{wU} współczynników w_E, w_U. Zależą one tylko od parametrów mostka i jego źródła J. Wówczas, jeśli są one znane, można je wyeliminować przez poprawki, lub też ich nie uwzględniać, gdy są pomijalnie małe, bądź gdy dokonuje się tylko pomiarów porównawczych określonym egzemplarzem mostka. Jeśli ponadto błędy przypadkowe tych parametrów, np. pochodzące od szumów i zakłóceń, również są pomijalne, to wypadkowe błędy, lub niepewności pomiarowe przyrostów ε_1, ε_4 wynikają jedynie z niedokładności pomiarów napięcia U'_{DC} i przyrostu ε_{AB}, a wzory (8.62), (8.63) upraszczają się do drugich składników w każdym z nawiasów. Stąd wynika się:

$$|\Delta_{\varepsilon 1}| = |\Delta_{\varepsilon 4}| \le w_E |\Delta_{\varepsilon AB}| + w_U \left(|U'_{DC}| |\delta'_U| + |\Delta_{U0}| \right) \tag{8.65}$$

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon 1} = \overline{\Delta}_{\varepsilon 4} = +\sqrt{w_E^2 \overline{\Delta}^2_{\varepsilon AB} + w_U^2 \left(U'^2_{DC} \overline{\delta'}^2_U + \overline{\Delta}^2_{U0} \right)} \tag{8.66}$$

gdzie: $|\delta'_U|$, $|\Delta_{U0}|$ – błędy systematyczne graniczne nachylenia i zera woltomierza lub przetwornika analogowo-cyfrowego, podane przez producenta

$\overline{\delta'}^{2}_{U}, \overline{\Delta}^{2}_{U0}$ –ich błędy przypadkowe lub niepewności pomiarowe.

Pozostałe oznaczenia są takie jak poprzednio.

Jeśli przyrost ε_{AB} wyznacza się za pomocą pomiarów napięcia, np. tak jak w układzie dwu sprzężonych mostków z rys.4.1, to jego błędy bezwzględne $|\Delta_{\varepsilon AB}|$, $\overline{\Delta}_{\varepsilon AB}$ można też rozłożyć na składowe, w podobny sposób jak powyżej dla błędów napięcia U'_{DC}.

W pomiarach technicznych, w tym głównie przemysłowych, stosuje się też tzw. „randomizację" błędów systematycznych, tj. traktuje się składowe tych błędów jako przypadkowe i liczy według takich samych jak dla nich wzorów, a ich wariancję sumuje się z wariancją wypadkowego błędu przypadkowego danego parametru. Można wyznaczać też różne uśrednione miary zmian błędu systematycznego dla wyników pomiarów wielu wartości w określonym ich zakresie i przy różnych ich wagach. Podobnie postępuje się też przy wyznaczaniu uśrednionych miar oceny niedokładności wielu urządzeń w produkcji lub w eksploatacji.

8.11. Podsumowanie rozdziału 8

Przedstawiono w sposób jednolity podstawy teoretyczne oceny niedokładności parametrów zewnętrznych różnych układów pasywnych mostków niezrównoważonych 4T i niedokładności pomiarów 2D (dwu parametrów) z ich udziałem. Ze względu na ogromną popularność w praktyce niezrównoważonego mostka jednoźródłowego omówiono w pierwszej kolejności szczegółowo błędy jego parametrów, a następnie błędy mostka dwuprądowego. Podano wiele wzorów nie występujących w literaturze, a przydatnych w różnych zastosowaniach, w tym przede wszystkim w pomiarach wieloparametrowych.

Liczbowa analiza błędów dla różnych wartości początkowych rezystancji mostka i ich przyrostów oraz rodzaju współpracy z obwodami zewnętrznymi wymaga danych liczbowych charakteryzujących określone zadanie pomiarowe bądź zakłada się ich różne warianty przy modelowaniu numerycznym. Użyteczne do tego celu może m.in. być np. oprogramowanie do modelowania układów elektronicznych SPICE [81] lub inne, po odpowiedniej adaptacji algorytmów służących do wyznaczania wrażliwości.

9. PODSUMOWANIE. KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ UKŁADÓW O DWUPRĄDOWYM ZASILANIU. GŁÓWNE WNIOSKI

Głównym celem dociekań tej monografii było opracowanie jednolitych podstaw teoretycznych dla pośrednich pomiarów równoczesnych zmian kilku parametrów (nD) sprzężonych ze sobą w odwracalnych i nieodwracalnych układach immitancyjnych. Tak postawione zagadnienie nie było opracowane w literaturze światowej. W monografii dokonano tego na reprezentatywnych przykładach zastosowania do takich pomiarów (głównie 2D) różnych postaci układu 4T (o czterech końcówkach), w tym niezrównoważonych czterogałęziowych mostków klasycznych pojedynczych i kaskadowo sprzężonych, niekonwencjonalnych mostków dwuprądowych - oraz hallotronów.

Oryginalnie opracowane problemy to w szczególności:

- ogólne równania pośrednich pomiarów nD i 2D oraz zastosowanie równań macierzowych do jednolitego opisu parametrów zewnętrznych i właściwości metrologicznych powyżej podanych układów pomiarowych jako postaci szczególnych liniowego układu 4T o zmiennych impedancjach wewnętrznych, (punkty 1.3.-1.5., 1.7.)
- klasyfikacja rodzajów układów dwuwyjściowych do pomiarów 2D i ich podstawowe równania (punkt 1.8)
- odkrycie w mostkach klasycznych kilku nieznanych dotąd zależności, tj.:

  możliwości przekształcenia odwrotnego dowolnego nieplanarnego układu mostka z przekątnymi (czworoboku zupełnego) w kilka układów planarnych, w tym 4 mostki z gałęziami szeregowymi w dwu kolejnych wierzchołkach (p.1.6);

  rozszerzenie warunku równowagi mostka 4R o iloczyn rezystancji wejściowych dla jego przekątnych (p.2.2.3);

  sformułowanie dla parametrów zewnętrznych mostka 4R dwu ogólnych warunków liniowości w funkcji przyrostów rezystancji ramion (p. 2.2.4)

  schemat zastępczy o strukturze 2T, który dla mostków jako czwórników X zachowuje zarówno ich parametry zewnętrzne jak i potencjały zacisków (p 2.5.)
- uogólniony opis zmian parametrów roboczych na zaciskach mostka jako czwórnika typu X w funkcji elementów jego macierzy impedancyjnej Z_R w równowadze i ich przyrostów od tego stanu (p.2.1 - 2.4.)
- gruntowna analiza podstawowych właściwości odkrytych przez autora mostków dwuprądowych, czyli mostków o dwu wyjściach z przekątnych i niekonwencjonalnym dwuprądowym zasilaniu - równolegle do ramion

przeciwległych ze źródeł dołączonych na stałe - układ 2J lub przełączanych – układy 2x2J, 2xJ (rozdział 3)

- analiza możliwości zastosowań mostka klasycznego (rozdział 4) oraz mostka dwuprądowego (rozdział 5) w pomiarach dwu- i wieloparametrowych
- szczegółowy opis właściwości metrologicznych nieodwracalnych czujników 4T na przykładzie hallotronów, w tym nieopisywane przez innych autorów pełne schematy zastępcze hallotronu rzeczywistego (ze zjawiskami pasożytniczymi) i ich wersje uproszczone oraz uwzględnienie równoczesnego wpływu dwu wielkości - pola magnetycznego **B** i temperatury *T* (rozdział 6),
- przykład dwuprądowego układu aktywnego prądu stałego (p. 7.1.),
- omówienie podstawowych właściwości przemiennoprądowych mostków dwuprądowych na przykładzie mostków o gałęziach zbudowanych z elementów RC (p. 7.2),
- opracowaniu jednolitego opisu miar dokładności parametrów zewnętrznych mostków klasycznych i dwuprądowych dla różnych wariantów zmian rezystancji ich ramion oraz analiza dokładności dwuparametrowych pomiarów przyrostów tych rezystancji (rozdział 8)

Wymienione powyżej zagadnienia są priorytetowe dla opisu właściwości metrologicznych oraz doboru parametrów i budowy układów wstępnego kondycjonowania sygnałów pochodzących od zmian kilku sprzężonych ze sobą immitancji.

Mostki dwuprądowe wg pomysłu autora, nawet już przy prądzie stałym stwarzają wiele zupełnie nowych możliwości budowy układów pomiarowych przydatnych i wystarczająco dokładnych w praktyce, w tym do kondycjonowania sygnałów pochodzących od analogowych czujników immitancyjnych stosowanych w wieloparametrowych, inteligentnych przetwornikach pomiarowych i w diagnostyce. Dotyczy to też równoczesnych badań kilku powiązanych ze sobą parametrów schematu zastępczego obiektu lub układu pomiarowego z jego zacisków.

Omówione w rozdziale 6 pełne schematy zastępcze hallotronów stanowiły podstawę opracowanych przez autora oryginalnych układów do skutecznego kompensowania napięć pasożytniczych i do pomiaru sygnałów z hallotronów. Wykorzystano je w budowie wielu rozwiązań mili- i mikroteslomierzy hallotronowych o unikalnych parametrach i najwyższej osiągalnej ówcześnie dokładności [26], a nawet wyprzedzających technikę światową.[1] Zaś syntetycznie opisane i przedstawione na Kongresie IMEKO w Londynie zasady budowy hallotronowych przetworników o układzie zamkniętym [25], [26] są

[1] na podstawie tych prac autor został powołany na stanowisko docenta za dorobek równoważny habilitacji.

nawet cytowane ostatnio jako pozycja podstawowa [20] w tej dziedzinie. Nadal nadają się też one do zastosowania w opracowywanych współcześnie scalonych układach oraz mikrosystemach galwanomagnetycznych i hallotronowych (w zamierzeniu autora osobna monografia).

9.1. Potencjalne obszary zastosowań mostków 4T i innych układów dwuprądowo zasilanych

Podana przez autora idea wykorzystania dwuprądowego zasilania immitancyjnych układów 4T ma bardzo szerokie potencjalne możliwości aplikacyjne w pomiarach wieloparametrowych. Rysują się następujące obszary zastosowań mostków i innych dwuprądowych układów pasywnych i aktywnych w technice pomiarowej:

- równoczesne pomiary kilku immitancji, ich stosunku oraz przyrostów i różnych ich kombinacji dwuprądowymi mostkami zrównoważonymi i niezrównoważonymi przy prądzie stałym
- zastosowanie dwuprądowych niezrównoważonych mostków prądu stałego w układach kondycjonowania sygnałów czujników immitancyjnych przy pomiarach wieloparametrowych
- dwuprądowe mostki aktywne prądu stałego ze sprzężeniem zwrotnym
- podobne jak wszystkie powyższe zastosowania dwuprądowych mostków prądu zmiennego
- dwuprądowe mostki w układach z przetwarzaniem na częstotliwość
- dwuprądowe mostki w układach z przetwarzaniem na przesunięcia fazowe
- inne układy dwuprądowo zasilane zawierające mostki, w tym układy z hallotronami i mnożnikami analogowymi
- pomiary wszystkimi układami dwuprądowymi obiektów wieloparametrowych oraz rozkładów przestrzennych właściwości materiałów i rozkładów pól mierzonych wielkości, w tym do celów diagnostyki technicznej.
- badania diagnostyczne wieloczujnikowych układów pomiarowych i czujników wieloparametrowych.

Zakres potencjalnych zastosowań układów dwuprądowych w inteligentnej technice pomiarowej jest więc dosyć rozległy. Zagadnienia podstawowe dla pierwszych dwu obszarów i częściowo dwa następne zostały już omówione w tej pracy. Charakterystykę prac z tej dziedziny podjętych przez innych badaczy przedstawia się poniżej.

9.2. Prace innych autorów w dziedzinie mostków dwuprądowych i pomiarów 2D z wykorzystaniem mostków

Z inspiracji publikacjami autora o układach dwuprądowych tematykę tę podjęto też w trzech ośrodkach akademickich w Polsce. Wstępną analizę możliwości zastosowania mostków dwuprądowych prądu przemiennego do pomiarów zmian składowych pojedynczej impedancji metodą z przetwarzaniem w kąty przesunięć fazowych zawierała zainicjowana przez W. Miczulskiego wspólna z nim publikacja autora z 2000 r. [48]. Pierwsze otrzymane wyniki analizy były podobne jak dla mostków klasycznych. W tych pilotowych badaniach nie wykorzystywano jeszcze w pełni oryginalnych właściwości mostków dwuprądowych, które umożliwiają pomiar jednakowych co do znaku przyrostów składowych immitancji w sąsiednich jego ramionach. Ten kierunek badań kontynuował W. Miczulski wraz z W. Kuleszą z Uniwersytetu Zielonogórskiego [49]. W kolejności należy wymienić związanego z Politechniką Śląską wynalazcę i producenta aparatury B. Tynca, który postanowił zbadać możliwość połączenia dwuprądowego mostka prądu stałego z opatentowanym przez niego oryginalnym układem przetwornika przyrostów rezystancji na częstotliwość o zasadzie działania zbliżonej do przetworników typu sigma-delta i handlowej nazwie - mostki tybo® [50]. Po konsultacjach z autorem podszedł on do zagadnienia twórczo, zaproponował, i wstępnie sprawdził eksperymentalnie model układu o zasilaniu ze wspólnego źródła napięcia, z wyjściem zarówno z jednej, jak i z dwu przekątnych mostka [51].

Z tematyką pomiarów 2D układami mostkowymi wiążą się też prace H. Urzędniczoka [52-55] z Politechniki Śląskiej, w których omawiał on zastosowanie do tego celu mostków Wiena równoważonych częstotliwościowo. Natomiast w ślad za kilkoma publikacjami autora o pomiarach 2D w mostkach zastosowanie niezrównoważonych mostków Wiena do równoczesnych pomiarów dwu rezystancji zaproponował ostatnio A.Rybski z Politechniki Rzeszowskiej [57].

W działalności praktycznej, na przykład przy budowie przetworników na określone zakresy i dla określonych czujników lub przy projektowaniu systemu pomiarowego, jako uzupełnienie może być użyteczna szczegółowa analiza numeryczna właściwości metrologicznych różnych wariantów układu przewidywanego do realizacji z uwzględnieniem specyfiki danego zastosowania. Prace laboratoryjne i konstrukcyjne można wtedy poprzedzać komputerowym eksperymentem symulacyjnym. Po zapoznaniu się z publikacjami autora o mostkach dwuprądowych tym nurtem prac w dziedzinie mostków dwuprądowych zainteresował się A. Idźkowski z Politechniki Białostockiej. Rozpoczął on modelować komputerowo takie mostki omówione w pracach autora [27-36], wykorzystując do tego celu standardowe oprogramowanie SPICE [81]. Wspólnie z dr. J. Makalem, opisali eksperyment symulacyjny prowadzący do otrzymania zależności napięcia wyjściowego dla dwu wariantów dwuprądowego mostka prądu stałego oraz własną propozycję układu ze wzmacniaczem operacyjnym i wyjściem napięciowym [52]. Budują też stanowisko dydaktyczne do pomiarów tensometrycznych 2D wykorzystujące mostek dwuprądowy. Metody symulacyjne mogą natomiast okazać się przydatne do badania dość skomplikowanych zależności w rozbudowanych pasywnych i aktywnych wieloparametrowych układach pomiarowych z nieliniowymi czujnikami, zwłaszcza dla błędów pomiarowych.

Oryginalne prace autora nad nowymi układami mostkowymi znalazły już też pewien oddźwięk poza krajem. Dzięki ich prezentacji na wspólnych dorocznych sympozjach Politechnik Rzeszowskiej i Lwowskiej, zainteresowało się nimi kilku pracowników tych uczelni zajmujących się tomografią impedancyjną. W języku angielskim ukazała się dotąd na temat mostków dwuprądowych jedna publikacja autora [31], referowana na Sympozjum Komitetu TC-4 Międzynarodowej Konfederacji Pomiarów IMEKO w maju 2002 r. w Krakowie. Zagadnienia okazały się na tyle aktualne, że tuż po tym wystąpieniu znany międzynarodowy autor książek z metrologii i techniki pomiarowej prof. P. Sydenham z Australii zaproponował autorowi opracowanie sześciu obszernych bloków tematycznych o mostkach do multimedialnego poradnika techniki pomiarowej o roboczej nazwie *Measure Mentor*, przygotowywanego przez angielską filię wydawnictwa J. Wiley & Sons na 2005 rok i przewidywanego również do udostępniania w internecie na hasło-klucz. Autor opracował dotychczas ujęte oryginalnie dwa takie bloki o mostkach prądu stałego [46, 47].

9.3. Ocena potencjalnych możliwości dwuprądowych układów 4T prądu przemiennego (AC)

Zaproponowana przez autora idea dwuprądowego zasilania (2J) mostków innych i układów pomiarowych je zawierających oraz jej alternatywa (2xJ) - uśrednianie dwu pomiarów przy przełączaniu pojedynczego źródła, stwarza możliwości budowy wielu pasywnych i aktywnych dwuwyjściowych analogowych układów kondycjonowania sygnałów prądu stałego i przemiennego o nowych właściwościach metrologicznych.

Po raz pierwszy w literaturze światowej podano też i omówiono samokompensujący się mostek dwuprądowy o sprzężeniu zwrotnym oraz mostki dwuprądowe prądu przemiennego, na przykładzie mostków o ramionach R i C oraz RC i R. Wnioski szczegółowe zamieszczone są w rozdziale 7.

Dla każdego z istniejących rozwiązań mostków klasycznych prądu zmiennego można podać po dwa (a z permutacją gałęzi i źródeł - nawet aż 6) układów mostków dwuprądowych. Przy dwuprądowym zasilaniu dają się zrównoważyć nawet takie układy, w których przy zasilaniu klasycznym impedancje strukturalnie nie spełniają warunku równości sumy faz w ramionach przeciwległych – patrz rozdział 7.

Ze względu na podobieństwo formy wzorów dla napięć niezrównoważenia mostków dwuprądowych do znanego wzoru dla mostków klasycznych zasilanych prądowo, przebiegi amplitudy i fazy w funkcji przyrostów składowych immitancji ramion są też podobne, ale dotyczą innych ramion.

Układy (2J) i (2xJ) mogą służyć do równoczesnych pomiarów kilku parametrów wewnętrznych układu z jego zacisków oraz do pośrednich pomiarów kilku wielkości wpływających różnie na składowe immitancji czujników nieselektywnych, które podlegają mierzeniu przy jednej lub kilku częstotliwościach.

Zasilanie dwuprądowe może też znaleźć zastosowanie w układach AC z detektorami fazoczułymi i quasi-zrównoważonych, w układach z hallotronami i innymi mnożnikami sygnałów oraz w układach z szybkim wielokrotnym próbkowaniem w czasie jednego okresu.

Układy 2J i 2xJ można też częściowo realizować wirtualnie.

Wiele zagadnień szczegółowych, wymagać będzie jeszcze dalszych wnikliwych badań i opracowań technicznych.

Zdaniem autora, koncepcja dwuprądowego zasilania ramion przeciwległych mostków stanowi istotny przełom w pomiarach z wykorzystaniem mostków. Jest ona, jak dotychczas, rozwijana tylko w Polsce. Może więc stać się, - trwałym polskim wkładem w rozwój techniki pomiarowej.

9.4. Kilka ważniejszych wniosków i szczegółowych uwag końcowych

Na zakończenie warto jeszcze nieco bardziej szczegółowo scharakteryzować opracowaną w monografii tematykę z punktu widzenia znaczenia praktycznego rozwiązanych w niej zagadnień i wynikłe stąd ważniejsze wnioski.

Opracowanie niniejsze powstało głównie z potrzeby łącznego ujęcia problemów, które wyłoniły się przy tworzeniu zasad i podstaw teoretycznych zastosowania jedno- i dwuprądowo zasilanych mostków niezrównoważonych w wieloparametrowych pomiarach pośrednich parametrów ze sobą sprzężonych [38 – 42]. Pomimo bardzo zaawansowanego i długoletniego rozwoju teorii oraz zastosowań klasycznych rezystancyjnych mostków niezrównoważonych w technice pomiarowej autor natrafił na szereg zagadnień wymagających jeszcze opracowania. Podstawowym celem było stworzenie jednolitego teoretycznego narzędzia do bardziej skutecznego rozwiązywania wyłaniających się w tych pomiarach szeregu nowych zagadnień o istotnym znaczeniu aplikacyjnym w technice pomiarowej. Dotyczy to zwłaszcza układów pomiarowych tworzonych metodami współczesnej technologii elektronowej, w których nie ma możliwości lub nie jest opłacalne indywidualne doregulowywanie elementów wewnętrznych mostka lub czujników po jego wykonaniu, a także dotyczy badań różnych obiektów, w schemacie zastępczym których znajduje się mostek.

Przyjęto metodę ścisłego analitycznego rozwiązywania problemów wybranych wg oceny ich znaczenia opartej na doświadczeniu praktycznym. Takie podejście wynikło stąd, że istniejące, numeryczne metody komputerowo wspomaganej analizy układów elektronicznych [76, 79, 81, 82], w tym i ich wrażliwości, są bardziej dostosowane do specyfiki technicznego projektowania określonych układów elektronicznych wg wymagań zadawanych liczbowo. Nie dają one takich jak wzory ścisłe, możliwości eleganckiej, wszechstronnej analizy metrologicznej oraz porównywania i syntezy wariantów układów o różniących się właściwościach. Wyspecjalizowane oprogramowanie komputerowej techniki pomiarowej [24] również nie jest w wystarczającym stopniu przystosowane do analizy zagadnień metrologicznych pomiarów wieloparametrowych układami 4T. Metody numeryczne nie zastępują w pełni ścisłych wzorów analitycznych w przypadkach, gdy takie wzory istnieją. Stanowią one natomiast cenne uzupełnienie badań teoretycznych i doświadczalnych poprzez symulację przykładów przy różnych założeniach i danych liczbowych, tworzenie diagramów, opracowywanie przybliżonych algorytmów przetwarzania cyfrowego o zadanej dokładności itp.

Wśród zagadnień omawianych w monografii istotne w praktyce znaczenie ma między innymi podanie rodzajów rozwiązań układów do pomiarów dwuparametrowych i określenie schematów płaskich układów pasywnych równoważnych układowi mostka z przekątnymi. Dzięki „czwórnikowemu" potraktowaniu czteroramiennego mostka 4R wyznaczono też zależności współczynników jego równań impedancyjnych od niezależnych od siebie zmian rezystancji ramion,. w tym wyrażonych w wartościach względnych. Podano też kilka nieznanych dotąd, a użytecznych w praktyce, ogólnych właściwości tego mostka, w tym warunek równowagi rozszerzony o iloczyn rezystancji wejściowych oraz uogólnione warunki linearyzacji napięcia wyjściowego i jednej z rezystancji wejściowych przy zasilaniu prądowym i wyjściu napięciowym. W oparciu o powyższe wzory wyznaczono też parametry robocze na zaciskach mostka o dowolnych rezystancjach obciążenia i zasilania. Funkcje te wyrażono zarówno bezpośrednio przez rezystancje ramion mostka i obwodów współpracujących lub przez wartości względne tych rezystancji w równowadze i ich przyrosty od tego stanu oraz pośrednio – poprzez parametry mostka jako czwórnika. Ten ostatni, nie stosowany dotąd opis mostków niezrównoważonych, ma prostsze w formie wzory, które pozwalają lepiej zrozumieć i opisać istotę procesów zachodzących w każdym przypadku zasilania mostka i przy dowolnie dużych zmianach jego rezystancji, w tym niezależnych od siebie oraz przy zmianach rezystancji obwodów z nim współpracujących. Przedstawiono też dwa schematy zastępcze mostka niezrównoważonego przy jego pracy jako czwórnika, w tym nie podawany dotąd w literaturze układ 2T, który odwzorowuje przy zmianach rezystancji ramion nie tylko jego parametry zewnętrzne ale i potencjały zacisków.

Z analizy wszystkich podanych wzorów dla parametrów roboczych mostka - jako czwórnika typu **X** z dołączonymi doń obwodami, wynika, że do zastosowania w pomiarach przyrostów jednej i kilku rezystancji oraz ich prostych funkcji, istotnymi zaletami dysponuje przede wszystkim jednoprądowy, nieobciążony mostek niezrównoważony (czyli gdy: $R_G = \infty$, $R_L=\infty$). Jego parametry zewnętrzne są bezpośrednio elementami macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z_R}$ tego czwórnika. Czułość początkowa, oraz przyrosty sygnału wyjściowego i rezystancji są największe, a zależności najprostsze i najmniej nieliniowe. Nawet przy dużych wartościach przyrostów względnych ε_i ramion mostka można uzyskać liniowe zmiany napięcia wyjściowego i jednej z rezystancji wejściowych. Wykazano też ponadto, że dla pomiarów opartych na przyrostach konduktancji najkorzystniejszy będzie mostek zasilany napięciowo i o wyjściu w postaci prądu zwarcia.

Podane w pracy wzory są użyteczne do wyznaczania dwu przyrostów rezystancji lub wielkości je wywołujących, otrzymywanych pośrednio na podstawie pomiarów dwu parametrów na zaciskach zewnętrznych mostka zasilanego jednoprądowo i nieobciążonego, np. w układzie kaskadowym.

Oryginalna analiza zależności mostków klasycznych stanowiła też punkt wyjścia do szczegółowego przedstawienia teorii podanych przez autora mostków o niekonwencjonalnym, obocznym dwuprądowym zasilaniu ich ramion przeciwległych. Omówiono bardzo szczegółowo teorię tych mostków i oryginalne możliwości ich zastosowania w pomiarach 2 – 4-ech przyrostów rezystancji przy prądzie stałym i w pomiarach składowych kilku impedancji ramion przy prądzie zmiennym.

Teoria „ czwórnikowa" mostka umożliwiła też opracowanie zasad i wyprowadzenie wzorów do oszacowania miar dokładności niezrównoważonych mostków rezystancyjnych przy różnych warunkach pracy i w pomiarach kilkuparametrowych (nD) z ich udziałem. Pełne takie opisy dla miar dokładności mostków niezrównoważonych nie występowały w literaturze, a mają one duże znaczenie dla praktyki. Opierając się na analogii postaci podstawowych wzorów, wyznaczono również niedokładności dla mostków dwuprądowych.

Podane w pracy podstawy teoretyczne mogą ponadto posłużyć do różnych szczegółowych opisów możliwości kształtowania przebiegu charakterystyki mostków niezrównoważonych przy dużych przyrostach rezystancji kilkuparametrowych czujników, do oszacowania dodatkowych błędów w przetwarzaniu sygnałów przy wymianie zarówno tych czujników jak i innych elementów układu oraz do wyznaczania optymalnych nastaw korekcji cyfrowej dla zadanych liczbowo zbiorów wartości parametrów tych elementów.

Niniejsza praca uzupełnia też dotychczasową wiedzę o pomiarach pojedynczych wielkości mostkami klasycznymi przy dużych przyrostach rezystancji ich ramion. Może więc ona z powodzeniem służyć zarówno konstruktorom jaki i użytkownikom jako narzędzie do analizy metrologicznych właściwości istniejących i syntezy nowych mostkowych układów do wstępnego kondycjonowania sygnałów pomiarowych dla różnych czujników i ich zestawów.

Innym ogromnym obszarem aplikacji treści pracy jest jej zastosowanie do opisu zmian parametrów schematów zastępczych obiektów i ośrodków badanych z czterech i więcej końcówek lub elektrod. Potrzeby takie występują w diagnostyce urządzeń i procesów, w pomiarach właściwości materiałów i w badaniach rozkładów pól, w tym w tomografii przemysłowej.

Wyniki pracy można też będzie wykorzystać w dydaktyce akademickiej oraz pogłębieniu wiedzy inżynierskiej o układach mostkowych. Można jednolicie i w sposób uogólniony zaprezentować właściwości zarówno dla pomiarów jednej jak i kilku wielkości przy dowolnie dużych i niezależnych przyrostach rezystancji ramion mostka.

Podany sposób opisu właściwości dowolnego przypadku pracy rezystancyjnych mostków niezrównoważonych poprzez ich parametry na zaciskach zewnętrznych, ujęte w wartościach względnych, można łatwo rozszerzyć na opisy przy prądzie zmiennym mostków i innych układów z czujnikami, oraz mostkowych schematów zastępczych obiektów mierzonych i diagnozowanych.

Zasilane mostków lub innych układów pomiarowych z dwu znanych źródeł prądu (lub jednego odpowiednio przełączanego) stwarza nowe możliwości w pomiarach dwu-, trzy-, i czteroparametrowych (2D, 3D i 4D), np. w układach kondycjonowania sygnałów dla jednej, lub dwu par czujników rezystancyjnych lub konduktancyjnych. W niektórych pomiarach z takimi czujnikami mogą stać się one np. alternatywą lub uzupełnieniem klasycznych niezrównoważonych mostków prądu stałego i pętli prądowej Andersona [16]. Przede wszystkim uzasadnione jest ich zastosowanie w układach z czujnikami w postaci nierozłączalnej struktury mostkowej oraz dla czujników zintegrowanych i monolitycznych o 4-zaciskowym schemacie zastępczym oraz w badaniach diagnostycznych nierozłączalnych układów czterokońcówkowych. Takim nowym, omówionym w pracy zastosowaniem, są pomiary dwuparametrowe jednym mostkiem dwuprądowym oraz osobne wyznaczanie wartości każdego z przyrostów rezystancji (lub konduktancji) ramion mostka, np. kilku czujników. Parametry, które wywołują jednakowe co do znaku przyrosty rezystancji w ramionach sąsiednich mostka, nie dają się łatwo zmierzyć innymi metodami, gdyż przy jednakowych ich wartościach, nie otrzymuje się sygnału na wyjściu mostka zasilanego klasycznie po przekątnej, a zastosowanie pętli prądowej Andersona wymaga rozłączania mostka.

BIBLIOGRAFIA

B1. Literatura podstawowa

1. Hague B. Foord T.R.: *Alternating Current Bridge Methods*, 6 ed. Pitman Publishing 1971.

2. Karandiejew K.B.: *Pomiary elektryczne metodami mostkowymi i kompensacyjnymi*, (tłum. z ros.), Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1969 (tłumaczenie oryginału rosyjskiego z 1963 r.).

3. Levin M.I.: *Osnovy elektro- izmeritelnoj techniki*, Energia, Moskwa 1972.

4. Erler W. Walthier L.: *Elektriczeckie izmerenia nieelektriczeskich veliczyn połuprovodnikovymi tenzorezistorami*, MIR Moskwa 1974 ss. 31–48, 160–164 (tłum. z niem.: *Elektrisches Messen Nichtelektrischer Grossen mit Halbleiterwiderständen*, Veb Verlag Technik, Berlin, 1973).

5. Kolcov A.A.: *Elektriczeskije schemy uravnovieszyvania*, Energia, Moskwa 1976.

6. Szulce A.: *Mostki elektryczne pomiarowe*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa. 1977.

7. Oliver B.M., Cage J.M.: *Pomiary i przyrządy elektroniczne*, WKiŁ Warszawa 1978, s. 262 (tłumaczenie z ang. *Electronic measurements and instrumentation*, McGraw-Hill New York 1971).

8. Lichtcinder B.Ia., Szirikow S.M.: *Mnogomiernyje izmeritelnyje ustroistva*, Energia, Moskwa 1978.

9. Osadczyj E.P. i inni; *Projektirovanie datczikov dla izmerenia mechaniczeskich veliczyn*, Maszinostrojenie, Moskwa 1979, ss. 347–393

10. Szumilewicz i inni: *Pomiary elektroniczne w technice*, WNT, Warszawa 1982.

11. Dally i inni: *Instrumentation for Engineering Measurements*, J. Wiley & Sons, 2 ed. 1993.

12. Schnell L. (ed.) i inni: *Technology of Electrical Measurements*, Series on Measurement Science (ed. Sydenham P.H.), John Wiley & Sons 1993 (rozdz. 4 – autor P. Osvath, ss.162-218).

13. Bentley J.P.: *Principles of Measurement Systems*, 3rd edn, Longman Scientific & Technical UK Ltd. 1995 (ss. 178-187).

14. Angrisani L. i inni: *A Digital Signal-Processing Instrument for Impedance Measurement*, IEEE Transactions on Instrumentation and Meas., vol. 45, no. 6, pp. 930-934, 1996.

15. Tattamangalam R.Padmanabhan: *Industrial Instrumentation*. Springer Verlag, London 2000, (ss.29-51).

16. Anderson K.F.: *The New Current Loop: An Instrumentation and Measurement Circuit Topology.* IEEE Transactions on Instrumentation and Meas., October 1997.

17. Miłek M.: *Pomiary wielkości nieelektrycznych metodami elektrycznymi*, Politechnika Zielonogórska 1998, s.40.

18. Zakrzewski J.: *Error Propagation in the Interface Electronics for Passive Sensors.* Politechnika Śląska, Gliwice 2001 Internet.

19. Zakrzewski J., *The Analog Signal Processing in Measuring Systems with a Single Passive Sensors.* Proc. of XVI IMEKO World Congress, vol IX ss. 185–190, Viena 2000.

20. Dyer S. A. (ed) i inni: *Survey of Instrumentation and Measurements*, Wiley- Interscience New York..., 2001 s. 70, ss. 309–326.

21. Kester W.: *Practical Design Techniques for Sensor Signal Conditioning.* Materiały firmy Analog Devices Co., Norwood MA USA, 1999.

22. *Dual Current Source / Current SIM*, Materiały firmowe: IC Data Book Linear Products, Burr-Brown.

23. *Measurement and Automation Catalogue*, Condensed Version. National Instruments™, *modules SCXI, SCC*, Austn TX, USA, 2003.

24. Lesiak P., Świsulski S.: *Komputerowa technika pomiarowa w przykładach.* Agenda Wydawnicza Pomiary Automatyka Kontrola, Warszawa 2002.

25. Warsza Z.L.: *Hall effect feedback transducers and their application*, Acta of 7th IMEKO Congress in London May 1976, Elsevier 1976, s.551–559.

26. Warsza Z.L.: rozdziały 1, 3 i 6 w monografii: Kobus A., Tuszyński J., Warsza Z.L.: *Technika Hallotronowa*, WNT, Warszawa 1980.

27. Warsza Z.L.: *Antymostki – nowy rodzaj układów do pomiaru impedancji.* Materiały Konferencji: Systemy Pomiarowe w Badaniach Naukowych i Przemyśle, Politechnika Zielonogórska, Zielona Góra, 2000, s. 233–240.

28. Warsza Z.L.: *Nowe dwuźródłowe układy do pomiarów impedancji.* Materiały sympozjum „Aktualne Problemy w Metrologii", Zeszyty Naukowe Wydz. Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, 2000. s. 145–154.

29. Warsza Z.L.: *Pomiary impedancji układami mostkowymi o dwuprądowym zasilaniu.* a) Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 178, Gliwice 2001, ss. 131-143. b) Pomiary, Automatyka, Robotyka, 5/2001, ss. 17-21.

30. Warsza Z.L.: *Zastosowanie dwuprądowo zasilanych mostków prądu stałego do kondycjonowania sygnałów z czujników pomiarowych.* Materiały IX Międzynarodowego Seminarium Metrologów „Metody i Technika Przetwarzania Sygnałów Fizycznych", Zeszyt Naukowy Politechniki Rzeszowskiej nr 192 (Elektrotechnika 22), s. 231–241, 2002.

31. Warsza Z. L.: *Bridges Supplied by Two Current Sources – New Tool for Impedance Measurements and Signal Conditioning*, Proc. of IMEKO-TC 7 Symposium, Kraków 2002, s. 231–236.

32. Warsza Z.L: *Analiza czułości mostków rezystancyjnych dwuprądowo zasilanych*. Materiały konferencji SP 2002 Zielona Góra, Pomiary Automatyka Kontrola 7/8 2002, s. 109-112.

33. Warsza Z.L: *Dwuprądowe mostki pomiarowe*. część I i II. Prace naukowe Politechniki Radomskiej, seria Elektryka 1/4 , 2002, s.6-60.

34. Warsza Z.: *Rodzaje zastosowań mostków dwuprądowych*. Materiały X Międzynarodowego Seminarium Metrologów „Metody i Technika Przetwarzania Sygnałów Fizycznych", Zeszyt Naukowy Politechniki Rzeszowskiej nr 200 (Elektrotechnika 24), s. 163-170, 2002.

35. Warsza Z.L.: *Mostki dwuprądowe – podstawowe właściwości i propozycje zastosowań* ,Elektronizacja - wkładka Technika Sensorowa, część (1).- nr 2/2003 s.31-35; część (2) – nr 3/2003 s.31-34.

36. Warsza Z.L.: *Dwuprądowe mostki prądu stałego*. Część I *Zależności podstawowe, układy zrównoważone*, Pomiary Automatyka Kontrola 4/2003 – wkładka Metrologia Technika Pomiarowa, s. II – IV; Część II *Układy niezrównoważone, przykłady i obszary ich zastosowań* Pomiary Automatyka Kontrola 12/2003 – wkładka Metrologia Technika Pomiarowa, s. I – IV.

37. Warsza Z.L.: *Zastosowania dwuprądowego mostka prądu stałego w pomiarach wieloparametrowych*. Materiały konferencji Podstawowe Problemy Metrologii -PPM'03 Ustroń 2003, Prace Komisji Metrologii oddziału PAN w Katowicach, seria Konferencje nr 5, s. 257-270.

38. Warsza Z.L.: *Pomiary wieloparametrowe mostkami rezystancyjnymi o różnym prądowym zasilaniu*, Pomiary Automatyka Robotyka, część 1: 7/8 2003 s.5-11, część 2: 9 2003, s. 21- 25.

39. Warsza Z.L.: *Rezystancyjny mostek jednoprądowy w pomiarach dwuparametrowych*, część 1 Pomiary Automatyka Kontrola 12/2003, wkładka s. V - VIII.

40. Warsza Z.L.: *Mostek rezystancyjny jako czwórnik typu X do pomiarów wieloparametrowych*. Materiały XXXVI Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów Ustroń, czerwiec 2004 Politechnika Śląska, Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej, s.107-111;

41. Warsza Z.L.: *Samokompensujące się oraz przemiennoprądowe mostki dwuprądowe*, Materiały Sympozjum SP 04, Uniwersytet Zielonogórski, Pomiary Automatyka Robotyka 7/8 2004 s.134 - 141.

42. Warsza Z.L.: *Mostki rezystancyjne jako układy kondycjonowania sygnałów w pomiarach kilkuparametrowych*. Elektryka Prace Naukowe 1(7)2004, Politechnika Radomska, Radom, s.78- 157.

43. Warsza Z.L.: *Właściwości i nieznane zależności mostka rezystancyjnego 4T jako czwórnika*. Pomiary Automatyka Robotyka 10/2004, s. 9-15.

44. Warsza Z.L.: *Mostki dwuprądowe prądu przemiennego Podstawowe zależności i przykłady*. Materiały XII Międzynarodowego Seminarium Metrologów „Metody i Technika Przetwarzania Sygnałów Fizycznych", Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 220 (Elektrotechnika 27), s.199-210, 2004.

45. Warsza Z.L.: Zastosowanie prądowo zasilanego mostka rezystancyjnego w pomiarach dwuparametrowych (2D) Elektronika (wkładka Technika Sensorowa) część 1 nr 12 2004 s. 84 – 87, część 2 nr 1 2005, s.63-68.

46. Warsza Z.L.: *Electrical Bridge Circuits – Basic Information* - part 126, *Handbook of Measuring Systems Design*, ed. by P. Sydenham and R. Thorn, 2005 Jon Wiley & Sons, Ltd., Chichester UK.

47. Warsza Z.L.: *Unbalanced DC Bridges*, part 127, *Handbook of Measuring Systems Design*, ed. by P. Sydenham and R. Thorn, 2005 Jon Wiley & Sons, Ltd., Chichester UK.

48. Miczulski W., Warsza Z.: *Układ antymostka z przetwarzaniem kąta przesunięć fazowych*, Materiały Konferencji: Systemy Pomiarowe w Badaniach Naukowych i Przemyśle, Politechnika Zielonogórska, Zielona Góra 2000,

49. Kulesza W., Miczulski W.: *Zastosowanie metody PKPF w układzie mostka dwuprądowego* Materiały XIII Sympozium Modelowanie i symulacja systemów pomiarowych, Wydawnictwo Katedry Metrologii Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 2003, s.245–254

50. Tync B.: *Mostki Tybo ® ładunkowo* równoważone układy jako oryginalne przetworniki A/C, Pomiary Automatyka Kontrola 3/2002, s. 21–23.

51. Tync B.: *Ładunkowo równoważony układ mostkowy o dwuprądowym zasilaniu*, Materiały Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów Ustroń 2004, Prace Komisji Metrologii Oddz. PAN w Katowicach , seria Konferencje Nr 5, s. 67-78.

52. Idźkowski A. Makal J.: *Mostek zasilany dwuprądowo – eksperyment i symulacja*. Materiały Sympozjum SP 04, Uniwersytet Zielonogórski, Pomiary Automatyka Robotyka, Nr 7-8 2004 s. 61-65.

53. Urzędniczok H.: *Wyznaczanie współczynników modelu odwrotnego obszarowo - liniowego dla przetwornika dwuparametrowego nieliniowego*. Z-ty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z.165, Gliwice 1999, s. 119–127.

54. Urzędniczok H.: *Odtwarzanie wartości wielkości wejściowych przetwornika dwuparametrowego nieliniowego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Elektryka z.184, Gliwice 1999 s. 29–38.

55. Urzędniczok H.: *Układy przetworników pomiarowych dwuparametrowych*. Z-ty. Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z.181, Gliwice 2002 s. 199–208.

56. Domański W.: *Analiza porównawcza metod odtwarzania w pomiarach dwuparametrowych*. Materiały Konferencji Grantowej Instytutu Metrologii Automatyki El., Ustroń czerwiec 2004, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach, seria: Konferencje nr 7,. s.95–104.

57. Rybski A.: *Jednoczesny pomiar dwu rezystancji niezrównoważonym mostkiem prądu przemiennego*, Materiały XII Międzynarodowego Seminarium Metrologów „Metody i Technika Przetwarzania Sygnałów Fizycznych", Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 220 (Elektrotechnika 27), s.141-149, 2004.

B2. Literatura uzupełniająca

B2.1. Wybrane, wcześniejsze publikacje o pomiarowych układach mostkowych

58. Drewnowski K.: *Pomiary elektryczne*, PWN, Warszawa 1959, s. 17.

59. Nesterenko A.D. *Osnovy rasczeta elektrizmieritelnych schem uravnovierszyvania*, Wydawnictwo Akademii Nauk Ukrainy (USSR) 1953

60. Milsztejn W.N.: *Zależności energetyczne w miernikach elektrycznych* Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1963 (tłumaczenie oryginału ros. z 1960 r.).

61. Kużma E.: *O kompensacji wpływów temperatury na układ niezrównoważonego mostka Wheatstone'a*, Archiwum Elektrotechniki tom IX, zeszyt 2, 1960.

62. Kużma E. i C.: *Niezrównoważony mostek Wheatstone'a z podwójnym czujnikiem pomiarowym*, Archiwum Elektrotechniki tom XI, zeszyt 1, 1962.

63. Kużma E.: *O pewnym sposobie kompensacji niezrównoważonego mostka Wheatstone'a*, Archiwum Elektrotechniki tom XI, zeszyt 4 1962.

64. Sawicki J.: *Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone,a*, Archiwum Elektrotechniki tom X, zeszyt 1 1961 ss 175–187.

65. Sawicki J.: *Skalowanie i dokładność mostka odchyłowego*, Archiwum Elektrotechniki tom X, zeszyt 1 1961, ss 189–199.

66. Sawicki J.: *Liniowe przybliżenie charakterystyki mostka odchyłowego*, Archiwum Elektrotechniki tom XII, zeszyt 2 1963, ss 265 – 285.

67. Sawicki J.: *Czułość i dobór elementów odchyłowego mostka Wheatstone,a*, Archiwum Elektrotechniki tom XIII, zeszyt 3 1964, ss.459 – 476.

68. Sawicki J.: Charakterystyka pomiarowa wielo-czujnikowego mostka Wheatstone,a, Archiwum Elektrotechniki tom XIII, zeszyt 3 1964 ss. 621–650.

69. Sawicki J.: *Liniowość charakterystyki mostka o przetworniku nieproporcjonalnym*, Rozprawy Elektrotechniki tom XIII, z. 3 1964 ss.257–298.

70. Spichalski A.: *Nieliniowość charakterystyki mostka niezrównoważonego*, Archiwum Elektrotechniczne tom XIV, zeszyt 2, 1968.

71. Warsza Z.L. Żyła B.: Termistorowe urządzenie do ciągłych pomiarów, rejestracji i dwupołożeniowej *regulacji temperatury*, Pomiary Automatyka Kontrola, 2, 1968 s. 74.

72. Kaliazin E.A.: *Termorezistory w sudowoj apparature temperaturnogo kontrola*, Sudostrojenie, Leningrad 1969.

73. Hołuszko E.: *Czterogałęziowe układy mostkowe o podwójnym zasilaniu*, (rekomendacja: Z. Warsza) Materiały XII Międzyuczelnianej Narady Metrologów, Politechnika Poznańska, s. 33-38, Poznań – Kiekrz 1977.

B2.2. Podstawowa literatura z teorii obwodów

74. Cholewicki T.: *Elektrotechnika Teoretyczna* tom 1 Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1967 s. 185-1810.

75. Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1974

76. Chua O.L., Pen- Min Lin: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*, WNT Warszawa 1981, s.200 (tłumaczenie z oryginału ang.: *Computer Aided Analysis of Electronic Circuits*, Prentice– all Inc. 1975).

77. Kaczorek T.: Macierze w automatyce i elektrotechnice, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1984

78. Mikołajuk K. Trzaska Zd.: *Elektrotechnika Teoretyczna*, tom 1 *Analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984

79. Ogrodzki J.: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994

80. Osiowski J. Szabatin J.: *Podstawy teorii obwodów*, tom 3 Wydawnictwa Naukowo- Techniczne Warszawa 1995 rozdział 8 Czwórniki, ss.113–216.

81. Moczko J., Król A.: *SPICE – Symulacja i optymalizacja układów elektronicznych*, Wydawnictwo NAKOM, Poznań 2000.

82. Korytkowski J. *Wzmacniacze monolityczne i metody analizy elektronicznych układów z tymi wzmacniaczami,* Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów, Warszawa 2000.

83. Morawski R.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w systemach pomiarowych.* Materiały Krajowego Kongresu Metrologii KKM2001, Politechnika Warszawska 2001, tom I ss. 9–24.

84. Bartosiński B.: *Diagnostyka układów analogowych z wykorzystaniem magistrali testującej mieszanej sygnałowo IEEE 1194.4.* Pomiary Automatyka Kontrola 7/8 2002, s. 17-20.

Dodatek 1. WIADOMOŚCI UZUPEŁNIAJĄCE

D1.1. Zadania współczesnej techniki pomiarów impedancji

Zadania pomiarowe dotyczące układów zawierających immitancje są bardzo zróżnicowane. Mogą one polegać na znalezieniu pojedynczych wartości parametrów opisujących jedną, lub szereg gałęzi schematu zastępczego przy prądzie stałym lub określonej częstotliwości, na wyznaczeniu ich charakterystyk częstotliwościowych, lub na zbadaniu odpowiedzi na różne wymuszenia w dziedzinie amplitudy i czasu. Bardziej rozbudowane układy mają 4, 5 lub więcej dostępnych zacisków i wiele gałęzi, często nierozłączalnych, których parametry podlegają mierzeniu. Jeżeli układ nie zawiera źródeł wewnętrznych, to pomiar składowych immitancji jego schematu zastępczego wymaga doprowadzenia odpowiedniego zasilania z zewnątrz. W układach pomiarowych z czujnikami immitancyjnymi mierzy się zależności ich sygnałów wyjściowych od parametrów, które zazwyczaj zależą od wielkości zewnętrznych elektrycznych, bądź nieelektrycznych, a jedna lub kilka z nich stanowią wielkości mierzone. Niepożądane wpływy pozostałych wielkości na wyniki pomiaru należy wyeliminować poprzez korekcję, lub kompensację.

Sygnał pomiarowy powinien być odpowiednio ukształtowany w celu przekazania go dalej torem pomiarowym. Wykonujący tę operację zespół jego początkowych członów funkcjonalnych nazwany jest **układem kondycjonowania sygnału**. Układ ten może być analogowy, lub analogowo-cyfrowy i poprzedza dalsze cyfrowe przetwarzanie sygnałów.

Dla wielu obiektów pomiarowych np. w diagnostyce układów elektrycznych, przy badaniu zmian własności elektrycznych materiałów lub przy badaniu zmian rozkładu przestrzennego pól oraz dla części układów z czujnikami, nie jest konieczne zmierzenie wartości wszystkich parametrów układu. Wystarczy znaleźć stosunki badanych składowych impedancji odniesione do impedancji wzorcowej, lub ich przyrosty od pewnych wartości początkowych, czy też też prostą, zazwyczaj liniową kombinację tych przyrostów.

Wśród różnych metod pomiarów składowych impedancji, do niedawna najdokładniejsze były metody mostkowe i kompensacyjne zarówno prądu stałego, jak i zmiennego równoważone ręcznie regulowanymi elementami pasywnymi R i C. W ostatnich kilkudziesięciu latach opracowano wiele innych rozwiązań układów zarówno tylko analogowych, jak i ze wskazaniem cyfrowym [1-24], wykorzystujących dzielniki indukcyjne, komparatory prądów, wzmacniacze operacyjne, człony mnożące i dzielące, detektory fazoczułe oraz szybkie przetwarzanie analogowo-cyfrowe, cyfrowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. Przy automatyzacji procesu równoważenia dokładnych klasycznych układów prądu zmiennego natrafiono jednak na duże trudności praktyczne.

Nowe możliwości w dziedzinie układów pomiarowych stwarza rozwijająca się ostatnio technika budowy tzw. przyrządów wirtualnych, w której część procedur przetwarzania sygnałów układu rzeczywistego (dotąd realizowanego sprzętowo) dokonuje się już cyfrowo i jest programowalne w systemie mikroprocesorowym. Opracowano m.in. układ wirtualny do pomiaru składowych RC impedancji [16], którego tylko dwie gałęzie (rezystor wzorcowy i impedancja mierzona) są zrealizowane fizycznie. Napięcie zasilające te gałęzie jest dokładnie syntetyzowane cyfrowo w zaprogramowany sposób, zaś spróbkowane napięcia tych gałęzi przetwarza się dalej cyfrowo, realizując wirtualnie określone algorytmy. Stosując dostępne na rynku przetworniki A/C i układy DSP uzyskano dokładności niewiele gorsze niż dla najdokładniejszych mostków cyfrowych. Te nowe układy są przy tym bardzo szybkie. Otrzymuje się wynik w czasie krótszym od jednego okresu napięcia zasilającego.

Dzięki wirtualnym możliwościom realizacji układów, ogromna dotychczasowa wiedza o właściwościach metrologicznych i algorytmach opisujących działanie różnych układów analogowych i cyfrowych, w tym mostków, nabiera znów dużego znaczenia. Należy jednak ująć ją syntetycznie i zweryfikować możliwości jej stosowania w ramach tej nowej metody realizacji zadań pomiarowych. Obok nowych metod przetwarzania sygnałów w układzie otwartym opartych na próbkowaniu wartości chwilowych oraz o dokładności zależnej od przetworników A/C i procesorów DSP, można będzie realizować częściowo wirtualnie nawet bardzo rozbudowane algorytmy równoważenia w układach zamkniętych, w tym dla mostków prądu stałego i zmiennego. Ponadto, w wirtualnej części układu nie występują wpływy sprzężeń pasożytniczych. Można też będzie budować układy do równoczesnego pomiaru i identyfikacji parametrów układów o wielu zaciskach i pomiarów pośrednich kilku wielkości oraz stosować rozwiązania, które były dotychczas zbyt trudne do realizacji czysto fizycznej. Niezbędne są jednak do tego celu odpowiednio dostosowane do tych pomiarów podstawy teoretyczne ich wejściowych członów analogowych, w tym w szczególności dla pomiarów wieloparametrowych.

D1.2. Podstawowe rodzaje i właściwości układów kondycjonowania sygnałów

Pomimo rozwoju techniki cyfrowej mierzy się w większości wielkości analogowe a czujniki parametryczne są w większości analogowe. Dlatego też na wejściu torów pomiarowych trzeba też stosować nadal układy analogowe. Pomimo, że dotychczas znanych jest wiele układów do pomiarów impedancji, to nadal, dzięki nowym możliwościom technologicznym pojawiają się dalsze propozycje ich rozwiązań, w tym nowe układy prądu stałego do kondycjonowania (kształtowania i dopasowywania) sygnałów z czujników pomiarowych.

Tory pomiarowe współpracujące z czujnikami immitancyjnymi powinny spełniać szereg następujących zadań.

- Doprowadzać napięcia lub prądy zasilające konieczne do pomiarów immitancji i do działania czujników oraz do kompensacji zera.

- Wytwarzać sygnał wygodny do dalszego przetwarzania, bądź analogowy np. w postaci: pojedynczego napięcia lub prądu, kilku napięć lub prądów, częstotliwości, bądź też sygnał cyfrowy, lub zbiór obu tych sygnałów.

- Odpowiednio kształtować i zapewniać powtarzalny przebieg charakterystyk. przetwarzania – liniowych, lub nieliniowych względem mierzonej wielkości.

- Umożliwiać wymienialność czujników bądź tylko jednego rodzaju np. wielu egzemplarzy termorezystorów Pt 100 lub tensometrów o tej samej nominalnej rezystancji; bądź kilku rodzajów - np. Pt 100, Pt 500 i Ni 100, a nawet i różnych termoelementów, poprzez dostrajanie charakterystyki przetwornika do każdego z nich. Przy dopuszczalnym rozrzucie parametrów czujników powinno to być realizowalne w zadanym zakresie pomiarowym i z dopuszczalną niepewnością pomiarową.

- Minimalizować lub eliminować niepożądane oddziaływania innych wielkości wpływających na sygnały z czujników i na układ pomiarowy, w tym wywoływane przez zmiany warunków otoczenia, napięć zasilających, parametrów linii łączących i niektórych elementów układu oraz zakłócenia.

Stosowane w praktyce układy kondycjonowania nie zawsze realizują wszystkie te zadania. Niektóre z nich wykonuje zazwyczaj wejściowy układ analogowy, samodzielnie lub wspólnie z współpracującym z nim bezpośrednio przetwornikiem analogowo-cyfrowym [19-24]; inne – dalsze człony cyfrowe toru pomiarowego, w tym układy DSP (*digital signal processing*).

W najnowszych rozwiązaniach aparatury pomiarowej unika się jakichkolwiek elementów analogowych regulowanych ręcznie. Funkcje dostrajania toru pomiarowego do parametrów czujnika i kształtowania przebiegu charakterystyki wyjściowej toru pomiarowego wykonuje się zazwyczaj cyfrowo w sposób programowy. Przeprowadza się to z prostej wbudowanej klawiatury, z zewnętrznego komputera, lub też ze specjalnego komunikatora. Trzeba więc znać szczegółowo zależności wyjściowych sygnałów układów analogowych od rozrzutu parametrów czujników i od wartości pozostałych elementów tych układów, tym bardziej, że część zadań kondycjonowania sygnałów nadal jest łatwiej realizować analogowo [4, 9–24].

W pomiarach wielkości nieelektrycznych używa się zarówno pojedynczych czujników, jak i jedną lub więcej ich par. Mogą one być konstrukcyjnie rozdzielone, lub też różnie ze sobą połączone dla zmniejszenia liczby doprowadzeń, a nawet stanowić nierozłączalne układy wielokońcówkowe np. mostki z czterech czujników, czujniki anizotropowe lub hallotrony. Parametry większości czujników zależą zazwyczaj nie tylko od wielkości mierzonej, ale i od innych wielkości wpływających, np. rezystancja tensometru obok naprężenia zależy też od temperatury otoczenia, zaś na wynik pomiaru przepływu przetwornikami różnicy ciśnień oddziałuje też temperatura i ciśnienie statyczne. Wpływ niepożądanych wielkości kompensuje się lub koryguje na drodze układowej lub programowej. W tym celu stosuje się pary czujników o parametrach w różny sposób zależnych od poszczególnych wielkości wpływających bądź też umieszcza się obok dodatkowe czujniki służące tylko do pomiaru wielkości wpływających i korekcji ich wpływów.

Coraz częściej trzeba mierzyć równocześnie kilka wielkości w jednym miejscu i nie można stosować kilku czujników selektywnych na każdą z nich np. ze względu na brak miejsca, koszty, czy też wzajemne oddziaływanie takich czujników na siebie lub ich nieistnienie. Z układu czujników nieselektywnych trzeba uzyskać wówczas tyle sygnałów, ile jest wielkości wpływających na nie w różny sposób, a następnie dokonać przekształcenia odwrotnego, tj. rozwiązać poprzez przetwarzanie w torze pomiarowym układ równań opisujących te zależności. Są to pomiary pośrednie wieloparametrowe.

Dotychczasowe układy pracy czujników immitancyjnych [4, 8–12, 19–24] mają zarówno zalety, jak i wady, w zależności od aplikacji. Pojawiające się na rynku coraz to nowe scalone układy analogowe, analogowo-cyfrowe oraz specjalizowane układy ASIC i kondycjonery umożliwiające stosowanie nowych różnych sposobów kondycjonowania sygnałów (np. FFT, falki). Dobrym przykładem pierwszych z nich jest dość niedawno opracowana prądowa pętla Andersona (w NASA w 1992 r.)[16] i jej różne modyfikacje. Stanowi ona dla grupy jednakowych czujników rezystancyjnych. nieco mniej dokładną alternatywę niezrównoważonego mostka Wheatstone'a. Powstały też uniwersalne kondycjonery sygnałów [23, 24] o wielu odizolowanych wejściach zawierających stabilizowane źródła prądowe. Po dokładnym zbadaniu nowych, innych niż dotychczasowe układów pracy czujników, można będzie je programować również dla tych układów. Możliwości te są też potencjalnie do wykorzystania w pomiarach kilkuparametrowych dwuprądowymi mostkami omawianymi w tej pracy.

Do wstępnego kształtowania sygnałów pomiarowych przed dalszym ich przetwarzaniem w postaci cyfrowej wykorzystuje się różne układy analogowe. Działają one zazwyczaj przy prądzie stałym (DC) lub przy jego przełączaniu (np. układy całkujące, sigma-delta i inne) [21–24, 48, 49]. W pomiarach immitancyjnych wykorzystuje się m.in. mostki niezrównoważone, prądowo zasilane układy różnicowe, w tym niedawno opracowaną prądową pętlę Andersona [16], układy aktywne ze wzmacniaczami operacyjnymi oraz układy ilorazowe, w tym o napięciach odniesienia przetworników analogowo-cyfrowych powiązanych z zasilaniem. Znacznie rzadziej stosuje się układy prądu przemiennego (AC) – głównie dla czujników o zmiennych parametrach L, C, lub M. Stosunkowo mało rozwinięte są układy kondycjonowania do równoczesnych pomiarów w jednym obiekcie badanym dwu- i ogólnie – wielu różnych parametrów, wykonywanych pojedynczym wieloparametrowym czujnikiem bądź też ich zespołem zintegrowanym konstrukcyjnie. Jednakże pojawiły się już inteligentne przemysłowe multiprzetworniki pomiarowe do badania kilku parametrów np. przepływającego płynu i uniwersalne programowalne wielowejściowe kondycjonery [23, 24] przeznaczone do współpracy z różnymi czujnikami

Opracowanie w syntetycznym ujęciu nowego, pełniejszego opisu podstaw teoretycznych pomiarów z wykorzystaniem układów mostkowych jest też niezbędne z następujących szczegółowych powodów praktycznych:

- pojawia się coraz to więcej różnych czujników o dużych przyrostach rezystancji lub konduktancji, w tym nieselektywnych. Dla wielu z nich; można będzie dzięki dokładnemu opisowi układu mostkowego opracować bardziej doskonałe kondycjonowanie sygnałów, w tym dla pomiarów kilku parametrów
- technologie elektroniczne stosowane współcześnie w produkcji urządzeń pomiarowych często uniemożliwiają, lub czynią bardzo kosztowną operację tzw. „podciągania" wartości ich elementów analogowych w sposób na tyle precyzyjny, aby zawsze uzyskać pożądane parametry układu po jego wytworzeniu, np. zero i określoną czułość. Nie w pełni zadawalającym rozwiązaniem jest przełączalny cyfrowo układ w postaci drabinki rezystorów. Przy projektowaniu trzeba więc posługiwać się pełnym opisem napięcia wyjściowego i innych parametrów zewnętrznych mostka, bez zakładania uproszczeń wynikłych z przeprowadzania regulacji układu, a następnie szacować i wyznaczać z pomiarów rzeczywiste parametry wewnętrzne egzemplarzy i ich rozrzuty w serii danego typu układu, na podstawie pomiarów na dostępnych zaciskach
- w budowanych obecnie urządzeniach do pomiarów ciągłych unika się konieczności wykonywania przez użytkownika po stronie analogowej regulacji przebiegu charakterystyki, czułości, czy nawet zera układu. Niezbędne modyfikacje ich parametrów, np. przy wymianie lub zmianie rodzaju czujników, zmianach zakresu pomiarowego lub stosowanych w praktyce jednostek, realizuje się przez odpowiednie zmiany w przetwarzaniu sygnałów po stronie cyfrowej. Użytkownik powinien jednak dysponować szczegółowym opisem równań i miar niedokładności mostka, w tym do opracowania poprawek do tych algorytmów
- właściwości metrologiczne i inne parametry każdego z urządzeń pomiarowych wynikają z aktualnego poziomu technologii wytwarzania. Można zazwyczaj uzyskać ich poprawę, nawet o rząd wielkości, dzięki odpowiednim dla danego przypadku modyfikacjom procedur przeprowadzania pomiarów i

przetwarzania wyników, zmniejszającym niektóre błędy i zakłócenia, np. przez podstawienie, przeciwstawienie, specjalizowanie oprogramowania itp.

- opis właściwości mostków do pomiarów jednej wielkości powinno się rozpatrywać jako przypadek szczególny ogólniejszego zagadnienia pomiarów kilku wielkości, nawet jeśli wpływy pozostałych wykorzystywane są tylko wewnątrz układu do jego korekcji i kompensacji. Uzyskuje się więcej informacji cennych metrologicznie i ma to znaczenie przy prezentacji tych zagadnień w dydaktyce.

D1.3. Zarys wybranych wcześniejszych prac polskich w dziedzinie układów mostkowych i hallotronowych

Warto też omówić w zarysie polski wkład w rozwój dziedziny mostków niezrównoważonych i innych układów 4T stosowanych do pomiarów jednej wielkości. Dotyczy to głównie prac z lat 1960–76. Na początku tego okresu bracia E. i C. Kuźmowie z Instytutu Technologii Elektronowej omawiali wielokrotnie problemy budowy mostków z termistorami, między innymi w publikacjach [61–63]. Teorię i analizę właściwości jednoparametrowych mostków niezrównoważonych oraz dobór ich parametrów i przybliżanie charakterystyk opisywał J. Sawicki [64-69] i również A. Spichalski [70], obaj z Politechniki Gdańskiej, zaś A. Szulce z Instytutu Elektrotechniki w Warszawie opracował bardzo gruntownie przystępną monografię o mostkach prądu stałego i zmiennego [6]. Budowę układów o dużej dokładności do pomiarów impedancyjnych z dzielnikami indukcyjnymi zainicjował w Polsce M. Miłek w Politechnice Śląskiej, a prace te twórczo kontynuuje tam do dziś T. Skubis wraz z zespołem.

W latach 1960- 71 autor opracował i z kilku współpracownikami z Katedry Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej zbudował kilkanaście hallotronowych przyrządów o dużej czułości, rozdzielczości i dokładności do pomiarów i rejestracji pola magnetycznego oraz niezrównoważone mostki wielozakresowe do pomiarów temperatury z termistorami i z termorezystorami metalowymi. Stosowano w nich oryginalny rezystancyjny wielozakresowy układ kompensacyjno–odchyłowy, stanowiący modyfikację układu mostkowego, który umożliwiał bezpośredni odczyt o rozdzielczości 4,5 znaków bez regulacji elementów układu, jedynie poprzez wybór przełącznikiem odpowiedniego przesunięcia początku zakresu dla stałego podzakresu przyrządu odchyłowego [26]. To rozwiązanie wyprzedzało układy cyfrowe, a prace te prezentowano między innymi na dwu Kongresach IMEKO w Warszawie w 1967 r. i w Londynie w 1976.r.

Ponadto autor podał oryginalną metodę wymienności czujników, w tym hallotronów [26] i termistorów [71], polegającą na zmianie wraz z każdym z nich, dwu, indywidualnie do niego dobieranych rezystorów do rozdzielnej regulacji zera i nachylenia charakterystyki. Dla termistorów były to dodatkowe rezystancje w jednym z ramion i w przekątnej mostka [71]. Było to prostsze w realizacji niż stosowane poprzednio do tego celu układy rezystancji szeregowych i równoległych do termistora o powiązanych ze sobą wartościach [72]. Ponadto autor podał też oryginalny schemat zastępczy hallotronu jako nieodwracalnego rezystancyjnego układu czterokońcówkowego (4T), zawierający wewnątrz mostek z przekątnymi. Dzięki temu mógł opracować mostkowe układy samokompensacji zera hallotronu skuteczne przy zmianach temperatury oraz zmianach wartości i rozkładu pola magnetycznego w szerokim zakresie. Opracował też podstawy teoretyczne budowy układów hallotronowych, w tym zasady ich wymienności [25, 26]. Prace te zostały z powodzeniem zweryfikowane praktycznie. To dzięki tym opracowaniom stała się też możliwa budowa wysokoczułych i dokładnych militeslomierzy i innych przetworników hallotronowych do pomiarów ciągłych, w tym z zastosowaniem oryginalnych układów ze sprzężeniem zwrotnym [25, 26]. Przetworniki hallotronowe o układzie zamkniętym zostały omówione syntetycznie na Kongresie IMEKO: w Londynie w 1976 r. [25], w tym między innymi idea układu przetwornika prądu stałego, takiego, jaki parę lat później zastosowano w szerokopasmowych przekładnikach prądu, produkowanych masowo do dziś przez szwajcarską firmę pomiarową LEM [1]. Praca ta miały charakter na tyle podstawowy, że jest jeszcze dziś uznawana za aktualną pomimo upływu lat, gdyż publikację [25] cytuje się między innymi w najnowszym obszernym ogólnoświatowym Poradniku Techniki Pomiarowej (*Survey of Instrumentation and Measurement)* pod redakcją S. A. Dyera [20 – s.70]. Było też zapytanie firmy brytyjskiej o zakup technologii „know–how" (pozostawione wówczas bez odpowiedzi przez Politechnikę Warszawską z przyczyn formalnych), a jedna z polskich publikacji autora i jego doktoranta została wyselekcjonowana do tłumaczenia przez Ośrodek Informacyjny brytyjskiego Ministerstwa Obrony[2]. Autor rozwijał jeszcze dalej zagadnienia zastosowania hallotronów i przedstawił je w samodzielnych autorsko rozdziałach 1, 6 i 7 [3] monografii Technika Hallotronowa [26]. Tam też można znaleźć opis wcześniejszych prac

[1] Z zakresu tej tematyki autor, jako promotor prowadził doktorat J. Galińskiego dotyczący opracowania i optymalizacji konstrukcji militeslomierzy o ilorazowym układzie zamkniętym prądu przemiennego, obroniony w 1976 roku przed Radą wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej.

[2] Dotyczy to publikacji: Warsza Z. L., Galiński J.: a) *Militeslomierze pól stałych o układzie ilorazowym*. Pomiary Automatyka Kontrola (20) 9, 1974, s.396–397; b) wersja angielska: *Hall effect fluxmeters of quotient system type for measuring constant magnetic fields*, Defence Research Information Centre, London, DRIC Transl. No 4267, Oct. 1975. (Był to, na 30 lat z wyprzedzeniem, swoisty miniwkład intelektualny w rozwój NATO, po ujawnieniu skutkujący wówczas co najmniej odmową paszportu).

[3] - informacja o autorstwie tych rozdziałów znajduje się w przedmowie do książki.

innych polskich autorów z dziedziny techniki hallotronowej. Zaktualizowany opis stanu tej techniki wraz z zestawieniem bibliografii aż do dziś, zgodnie z sugestią recenzenta, autor przeniósł do zamierzonej, innej pozycji wydawniczej.

D1.4. Kilka refleksji ogólnych

Opracowane w tej monografii jednolite podstawy teoretyczne i nowe układy mostkowe umożliwiają szczegółowy opis właściwości metrologicznych zastosowania różnych, głównie rezystancyjnych układów 4-T w pomiarach kilkuparametrowych oraz nadbudowywanie dalszych kolejnych pięter wiedzy o tych układach, w tym i o mostkach[4]. **Odkrycie** nie stosowanego dotąd, **oryginalnego rodzaju układów mostkowych, podwójnie prądowo zasilanych, stwarza**, zdaniem autora, **istnie rewolucyjną możliwość wzrostu stosowanych ich** rodzajów i rozszerzenia obszarów aplikacji, gdyż **dla każdego z kilkudziesięciu znanych dotąd mostków, w przeważającej liczbie - prądu zmiennego, zarówno pasywnych jak i aktywnych, istnieją dwa** (a z **permutacją ramion – cztery) układy dwuprądowo zasilane.** Każdy z nich może pracować jako jednowyjściowy lub dwuwyjściowy, zarówno zrównoważony jak i niezrównoważony. Ich właściwości i propozycje zastosowań autor opisał niemal w 20 publikacjach, w tym dotąd tylko jednej angielskiej. Mostki dwuprądowe mogą stanowić początek pewnego przełomu w dość długiej, jak dla techniki, dotychczasowej 170-letniej historii rozwoju pomiarowych układów mostkowych, w której nie zapisały się dotąd na trwałe wśród jej twórców polskie nazwiska (za wyjątkiem Amerykanina o nazwisku Warszawski), chociaż ostatnio między innymi Mućko z Politechniki Wrocławskiej, Tync współpracujący z Politechniką Śląską oraz Miczulski, Kaczmarek i Rybski z Uniwersytetu Zielonogórskiego i inni mają w tej dziedzinie też swoje oryginalne osiągnięcia. Trudno przewidywać jaki los spotka mostki dwuprądowe? Czy uda się je na tyle rozpropagować w postaci publikacji angielskich, by stały się szerzej znane, zadomowiły się w praktyce i były kojarzone z Polską, czy powtórzy się też historia mostka 4R podanego przez Christi'ego, a nazywanego obecnie nazwiskiem Wheatstone'a, który go 10 lat później zastosował?

---

[4] Zagadnienia rozwiązywane w pracy, ze względu na stopień trudności, można by porównywać do problemów w teorii liczb lub nabudowywania już istniejącej, dość zabytkowej budowli, której konstrukcja pierwotnie tego nie przewidywała. Aby takie zadanie wykonać właściwie, należy wnikliwie poznać właściwości tej budowli, w tym i te dotychczas ukryte, odnowić ją i wzmocnić oraz odpowiednio dostosować do niej konstrukcję nadbudowy. Bywa to zazwyczaj trudniejsze, niż tworzenie od nowa, ale autor miał tu nieco ułatwioną sytuację, gdyż w swej wieloletniej działalności zawodowej musiał opanować gruntownie poprzednie piętra wiedzy o układach mostkowych i hallotronowych, a nawet współuczestniczył w jej tworzeniu.

FOUR-TERMINAL (4T) IMMITANCE CIRCUITS In MULTIVARIABLE MEASUREMENTS

Titles of Chapters and Sections

Preface 11

1. Backgrounds of this Work Problems and Basic Relations 17

1.1. Introduction 17

1.2. Outline of the bridge history, theme backgrounds and scope of the knowledge of 4T measurement circuits 18

1.3. Tasks and essence of multivariable (nD) measurements 23

1.4. Two variables (2D) indirect measurements applying resistance sensors. 27

1.5. Main equations of 4T- circuit 31

1.6. Passive reciprocal 4T-circuits: quadrilateral with diagonals, bridge, four-arm star and twoport 38

1.7. Impedance equations of 4T-circuit working as twoport and its matrix **Z** 43

1.8. Types of two-output impedance circuits 50

1.9. Examples of two variable interactions on elements of the four-arm (4R) bridge as the passive 4T-circuit 53

1.10. Basic terms related to DC current supplied 4R-bridges. 55

2. Resistance 4T Circuit as a type X Twoport of Variable Parameters 60

2.1 Equivalent scheme and basic equations of 4T resistance circuit working as twoport 60

2.2 Parameters of the 4R bridge as X type twoport and their relations 62

2.2.1. Elements of 4R bridge impedance matrix $\mathbf{Z}_R$ as functions of its arms, initial resistances, and their increments 62

6.2. Admittance matrix and equivalent schemes of linear n-terminal Hall sensor circuit 177

6.3. Complete equivalent schemes of 4- terminal Hall sensors 180

6.4. Simplified equivalent schemes of Hall sensors 188
6.4.1. Five resistance equivalent schemes 188
6.4.2. Twoport and two-terminal equivalent schemes 191
6.4.3. Other Hall sensors' equivalent schemes 194

7. Examples of Other Double–Current Supplied 4T Circuits: Active DC Bridge and AC Current RC Bridges 195

7.1 Self-balancing active double current 4R bridge 195

7.2. Double current passive 4T AC circuits 197
7.2.1 Main formulas of the double current AC bridge 197
7.2.2 Comparison of conventional and double current bridges of single R or C arms 198
7.2.3. Bridges of serial RC and R arms 202
7.2.4. Three parameter measurements in the 2RC-2R double current twice balanced bridge 206
7.2.5. Unbalanced double current 2RC-2R bridge 206
7.3. Summary of the chapter 7 207

8. Accuracy Measures of Resistance 4T-Circuits in Multivariable Measurements 209

8.1. Introduction 209

8.2. Description of inaccuracy of resistances variable in broad ranges 211

8.3. Accuracy measures of the open circuit transmittance r_{21} of the 4R bridge as twoport type X 217
8.3.1. Instantaneous error Δ_{21} 217
8.3.2. Limited systematic error $|\Delta_{21}|_{\cdot m}$ of the transmittance r_{21} 219
8.3.3. Random accuracy measures $\bar{\Delta}_{21}$ of the transmittance r_{21} 221

8.4 Accuracy of terminal resistances of 4R bridge 222
8.5. Accuracy measures of r_{21} for selected cases 225
8.5.1. Bridge inaccuracy if $r_{21} = 0$ 225
8.5.2. Equal relative errors $\delta_{R\,i}$ of bridge resistances 226
8.5.3. Equal relative errors δ_i 226
8.5.4. Negligible errors of resistance increments $\Delta_{\varepsilon i} \to 0$ 226
8.5.5. Limited error $|\Delta_{21}|_m$ for equal limited errors $|\delta_{R\,i}|$ of arms resistances 227
8.5.6. Errors of the maximum value of the transmittance r_{12} range 229
8.5.7. Transmittance r_{21} errors for increments ±ε of neighbouring bridge arm 230
8.5.8. Equal limited errors and opposite resistance increments $\varepsilon_i = \pm\varepsilon$ of neighbouring arms 233
8.6. Accuracy of open circuit output voltage U'_{DC} of the 4R bridge supplied by current source 238
8.7. Accuracy of open circuit output voltage U'_{DC} of the 4R bridge supplied by voltage source 239
8.8. Accuracy measures of working parameters of the loaded twoport of arbitrary supply 242
8.9. Inaccuracy of sensitivities and of output voltages of the double current bridge 244
8.10. Accuracy measures of 2D measurements in the 4R bridge 258
8.10.1 Accuracy of measured increments of two neighbouring bridge resistances 258
8.10.2 Accuracy of measurements of two pairs jointed resistance increments 260
8.11. Summary of Chapter 8 263
9. Summary - Directions of Further Research on Double Supplied Circuits - Main Conclusions 264