

# Zastosowanie wskaźnika minimalnej sumy modułów błędów oszacowania parametrów modelu

dr hab. inż. Krzysztof B. Janiszowski  
 Profesor Politechniki Warszawskiej  
 Instytut Automatyki i Robotyki

W artykule przedstawiono zasady wyznaczania estymatora w sensie najmniejszej sumy modułów błędów modelu wyjścia układu. Podano efektywny algorytm obliczeniowy oparty na wykorzystaniu algorytmu ważonej najmniejszej sumy kwadratów w wersji off-line jak i w wersji on-line. Porównane zostały wyniki uzyskiwane za pomocą tego algorytmu z wynikami oszacowań w sensie najmniejszej sumy kwadratów błędów. Podano przykład zastosowań dla obiektu opisanego równaniem statycznym.

## WPROWADZENIE

Metody najmniejszej sumy kwadratów błędów (NSKB) są stosowane w nauce i technice i są bardzo popularne ze względu na jednoznaczność [1, 2] i globalność rozwiązań oraz prosty, efektywny algorytm obliczeniowy. Celem tych metod jest wyznaczenie rozwiązania w takim sensie, aby suma kwadratów różnic między wynikiem oszacowania za pomocą modelu i rzeczywistą wartością była jak najmniejsza. Postępowanie to jest w przypadku, gdy straty będące wynikiem błędu modelu są kwadratowo zależne od popełnionego błędu, np. podczas szacowania strat w modelach wielkości elektrycznych. W przypadku tzw. zagadnień minimalizacji wydatku, gdy wskaźnik jakości jest proporcjonalny do wartości bezwzględnej błędów, ten sposób podejścia jest mniej uzasadniony i może prowadzić do znacznych błędów, np. rys 1a.

Estymator najmniejszej sumy wartości bezwzględnej (NSWB) jest niewygodny w obliczeniach, ponieważ prowadzi do wskaźnika, którego wartość nie ma ciągłej pochodnej względem poszukiwanych parametrów. W przypadku estymatora NSWB wpływ zmian różnicy między wyjściem z modelu i wartością zmierzoną jest taki sam zarówno w przypadku małych jak i bardzo dużych błędów, co prowadzi do oszacowań bardziej bliskich wartościom oczekiwany, rys. 1b.

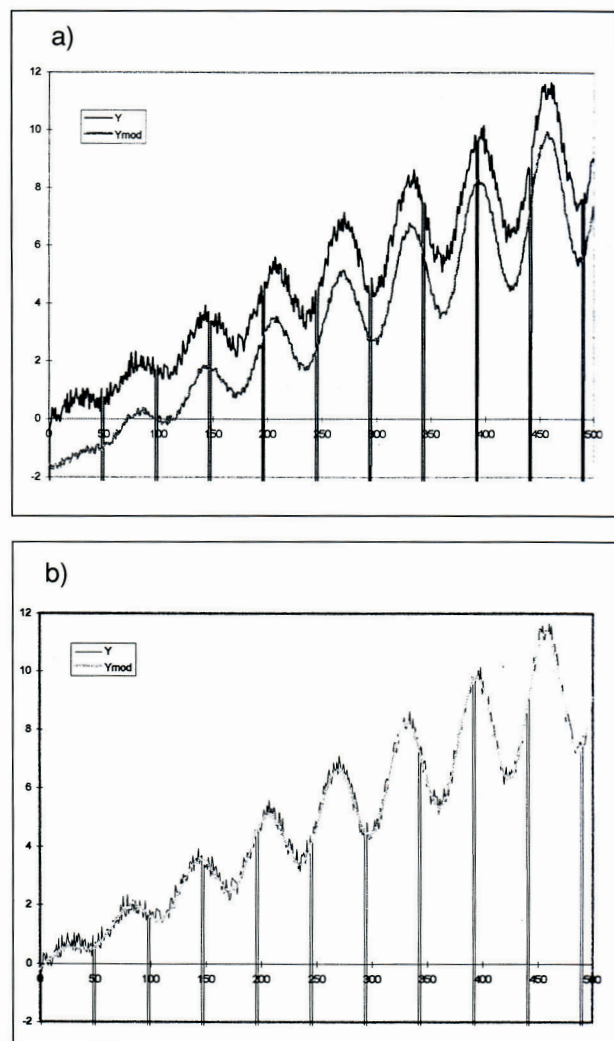
Zadanie wyznaczenia modelu układu, opisanego przez zbiór pomierzonych wartości wyjściowych  $Y = \{y_i, i=1, \dots, n\}$  oraz zbiory wartości  $X_j = \{x_{ij}, i=1, \dots, n\}$  różnych wielkości  $j = 1, \dots, n$ , które można rozważać jako sygnały wejściowe, można formalnie przedstawić jako poszukiwanie liniowej funkcji

$$\hat{y}_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{ij}, \quad j=1, \dots, n \quad (1)$$

gdzie  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$  oznacza wektor nieznanych parametrów modelu. Oszacowanie w sensie NSKB będzie oznaczać wyznaczenie modelu (1), który minimalizuje wyrażenie

$$I_{NSKB} = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (2)$$

Oznaczając następnie przez  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$  transponowany wektor zawierający pomierzone wartości sygnału wyjściowego oraz  $X = [x_1, x_2, \dots, x_k]'$  macierz zawierającą wektory  $x_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]'$  wejść modelu, wówczas oszacowanie wektora współczynników mode-



Rys. 1. Oszacowanie przebiegu  $y(x_j)$  wyznaczone w sensie:  
 a) NSKB, b) NSWB

lu  $\alpha$  może być określone za pomocą estymatora NSKB za pomocą wyrażenia

$$\alpha_{\text{NSKB}} = [\mathbf{X}' \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \quad (3)$$

Powyzsza zależność może być wyprowadzona bezpośrednio na podstawie warunku koniecznego minimum wyrażenia (2), które jest funkcją ciągłą współczynników wektora  $\alpha^*$ . Rozwiązanie (3) jest jednoznaczne i ma charakter globalny.

Oszacowanie w sensie NSWB będzie określone przez model, który minimalizuje wyrażenie

$$I_{\text{NSKB}} = \sum_{j=1}^n |y_j - \hat{y}_j| \quad (4)$$

Wyrażenie powyższe jest ciągłą funkcją wektora  $\alpha$ , ale wyłącznie klasy  $C^0$  i posiada punkty nieciągłości w miejscach, którym odpowiadają lokalne minima wskaźnika (4).

### ESTYMATOR W SENSIE NSWB

Można wykazać [3], że oszacowanie w sensie NSWB w odniesieniu do modelu (1) spełnia następującą zależność

$$\alpha_{\text{NSWB}} = [\mathbf{X}' \mathbf{E} \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{E} \mathbf{Y} \quad (5)$$

gdzie macierz  $\mathbf{E}$  pełni rolę współczynników wagowych

$$\mathbf{E} = \text{diag} \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad (6)$$

gdzie  $e_j = 1/|y_j - \hat{y}_j(\alpha_{\text{NSWB}})|$ ,  $j = 1, \dots, n$

przy czym  $\hat{y}_j(\alpha_{\text{NSWB}})$  oznacza wyjście modelu obliczonego w sensie NSWB. Zależność (5) stanowi estymator tzw. „ważonej” najmniejszej sumy kwadratów błędów modelu, np. [1,2].

Podstawową trudnością w wykorzystaniu formuły (5) jest konieczność znajomości błędów modelu NSWB przed obliczeniem tego oszacowania. Ponieważ model ten nie jest znany, można w tym celu wykorzystać oszacowania błędów wyjścia modelu za pomocą estymatora NSKB (3), a następnie iteracyjnie wyznaczać model NSWB w przypadku algorytmu off-line. Można zatem zaproponować następujący algorytm obliczeń dla wyznaczenia oszacowania w sensie NSWB w wersji off-line.

1. Wyznaczyć oszacowanie  $\alpha_{\text{NSWB}}^0$  (5) przyjmując  $e_j=1$ , dla  $j=1, \dots, n$ ,

$$\alpha_{\text{NSKB}}^0 = [\mathbf{X}' \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \quad (7)$$

2. Wyznaczyć błędy w oszacowaniu wyjścia z modelu

$$\varepsilon_j = |y_j - \hat{y}_j(\alpha_{\text{NSWB}}^0)|, \quad j = 1, \dots, n$$

oraz podstawić

$$e_j = \begin{cases} 1/\varepsilon_j, & \varepsilon_j > \varepsilon_{\min} \\ e_j = 0 & \end{cases}$$

gdzie  $\varepsilon_{\min}$  może być określony na podstawie błędów kwantyzacji pomiarów

$$\mathbf{E} = \text{diag} [e_1, e_2, \dots, e_n] \quad (8)$$

3. Wyznaczyć oszacowanie  $\alpha_{\text{NSWB}}^1$  (6) z wagami  $e_j$  określonymi w (8).

4. Etapy 2 i 3 powinny być powtarzane, aż do chwili uzyskania właściwej zbieżności.

W przypadku algorytmu w wersji on-line obliczenia można wyrażenie uprościć; powstający na bieżąco model sam stanowi podstawę do szacowania błędów. Odpowiedni algorytm ma następującą formę.

1. Oszacowanie błędów wyjścia modelu dla chwili o indeksie  $j$

$$\varepsilon_j = y_j - [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}] \alpha_{\text{NSWB}}(j-1) \quad (9)$$

2. Oznaczenie wielkości wagi z jaką należy wprowadzić dane z chwili  $j$

$$e_j = \begin{cases} 1/|\varepsilon_j|, & |\varepsilon_j| \geq \varepsilon_{\min} \\ 0, & |\varepsilon_j| < \varepsilon_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

3. Obliczenie wektora filtrowanych wejść do modelu

$$\mathbf{v}_j = [x_{1j}e, x_{2j}e, \dots, x_{kj}e], \quad \mathbf{v}_j \in \mathbf{R}^k \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu}_j = [\rho + \mathbf{v}_j' \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{v}_j]^{-1}, \quad \boldsymbol{\mu}_j, \mathbf{r} \in \mathbf{R}^k \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \boldsymbol{\mu}_j \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{v}_j', \quad \boldsymbol{\gamma}_j \in \mathbf{R}^k \quad (13)$$

4. Modyfikacja współczynników modelu

$$\alpha_{\text{NSWB}}(j) = \alpha_{\text{NSWB}}(j-1) + \text{sign}(\varepsilon_j) \boldsymbol{\gamma}_j \quad (14)$$

$$\alpha_{\text{NSWB}}(0) = [0, 0, \dots, 0], \quad \alpha_{\text{NSWB}} \in \mathbf{R}^k$$

5. Modyfikacja oszacowania macierzy kowariancji

$$\mathbf{P}_j = [1 - \boldsymbol{\gamma}_j \mathbf{v}_j] \mathbf{P}_{j-1}, \quad \mathbf{P}_j \in \mathbf{R}^{k \times k} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$$

przy czym  $\rho$  jest współczynnikiem zapominania,  $\rho \in (0.95, 1.0)$ . Wszystkie z wymienionych kroków obliczeń odpowiadają standardowemu algorytmowi w sensie NSKB z wyjątkiem (11), przemnożenia wejść do modelu przez błąd  $e$ . Warunki początkowe  $\mathbf{P}_0$  są określone przez  $\lambda \in (10^3, 10^6)$ .

Tablica 1.

Poziom zakłóceń f	Metoda	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$I_{NSKB}$	$I_{NSWB}$	$I_{NSWB0}$
0,01							13,299
	RNSKB	0,9643	0,5007	-2,0719	17,241	29,802	
	RNSWB	1,0107	0,5007	-1,9797	15,442	20,254	
	NSKB	0,9643	0,5007	-2,0720	10,773	21,336	
	NSWB	1,0073	0,4997	-1,9858	10,994	12,203	
0,1							132,97
	RNSKB	0,6427	0,5071	-2,7195	1634,03	294,30	
	RNSWB	1,1155	0,5316	-1,8134	1235,62	171,09	
	NSKB	0,6427	0,5071	-2,7196	1077,15	213,36	
	NSWB	1,0729	0,4974	-1,8582	1098,83	122,04	
0,4							531,90
	RNSKB	-0,4293	0,5282	-4,8780	26044,2	1175,95	
	RNSWB	1,2850	0,6131	-1,4332	18516,6	626,69	
	NSKB	0,4293	0,5282	-4,8780	17234,4	853,44	
	NSWB	1,2914	0,48797	-1,4330	17581,3	488,13	

## PORÓWNANIE OSZACOWAŃ ZA POMOCĄ ALGORYTMÓW NSKB I NSWB

W przypadku zakłóceń o charakterze przypadkowym i symetrycznym rozkładzie, oszacowania NSWB będą prowadziły do wyników bardzo zbliżonych do uzyskanych za pomocą oszacowań NSKB. Różnice są widoczne dopiero w obecności silnie asymetrycznych zakłóceń przebiegu sygnału wyjściowego. Jako przykład został przebadany sygnał opisany następującymi równaniami

$$y(k) = 1,0 \cdot v_1(k) + 0,5 \cdot v_2(k) - 2,0 \cdot v_3(k) + e(k)$$

$$v_1(k) = 0,01 \cdot k + 0,05 \cdot \sin(0,1 \cdot k) + 0,1 \cdot \rho_1(k)$$

$$v_2(k) = 0,0095 \cdot k + 0,05 \cdot \sin(0,0095 \cdot k) + 0,2 \cdot \rho_2(k)$$

$$v_3(k) = 0,2 - 0,005 \cdot k + 0,033 \cdot \rho_3(k)$$

$$e(k) = f \cdot [\rho_4(k) + \delta(k)]$$

$$\delta(k) = 100 \text{ dla } (k+49=0), k=1, \dots, 500$$

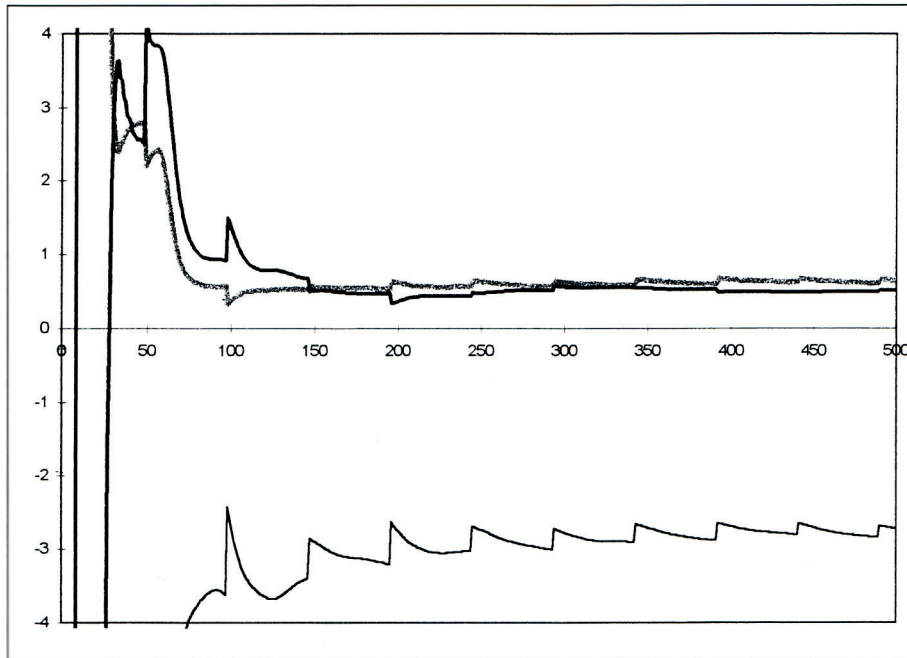
przy czym  $\rho_1 + \rho_4$  stanowiły wzajemnie niezależne, losowo generowane. Zakłócenie  $\delta(k)$  miało za zadanie modelować pojedyncze, silne impulsy zniekształcające sygnał wyjścia. Poszukiwany model obiektu zawierał trzy składniki

$$\hat{y}(k) = \alpha_1 v_1(k) + \alpha_2 v_2(k) + \alpha_3 v_3(k).$$

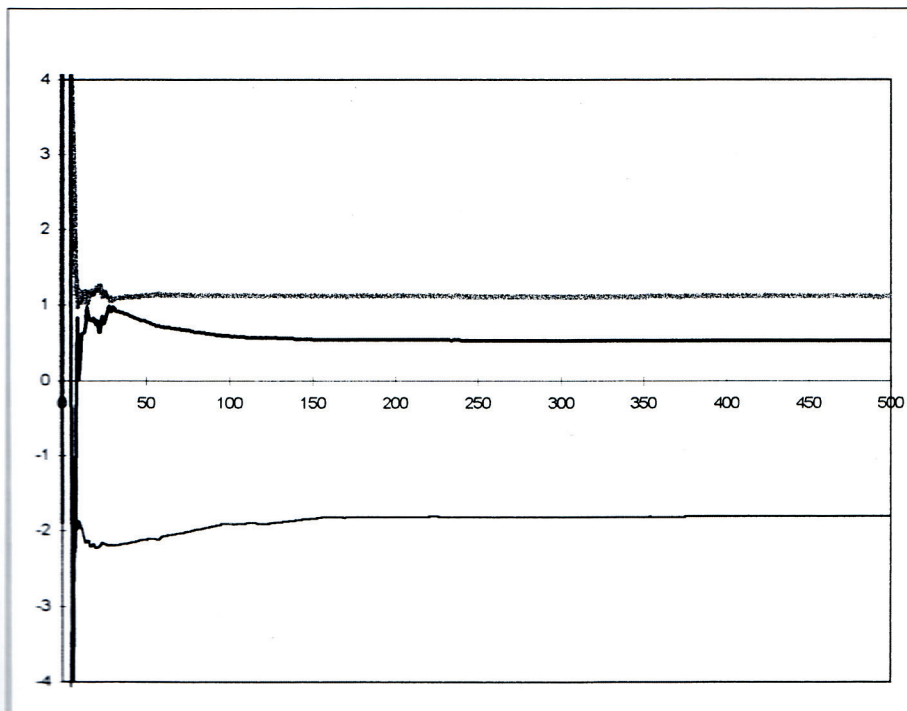
Oszacowania wartości współczynników  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  były prowadzone za pomocą metod NSKB i NSWB, odpowiednio do wskaźników (3) i (6). W przypadku algorytmów iteracyjnych on-line NSKB i NSWB zastosowano ten sam algorytm (9) - (15), przy czym dla algorytmu NSKB podstawiano  $e_j = 1$ . Obydwa algorytmy rozpoczęły obliczenia od tych samych zerowych warunków początkowych oraz zastosowano te same parametry algorytmu  $\lambda = 105$  i  $\rho = 0.995$ .

W tablicy 1 zostały przedstawione wyniki oszacowań współczynników  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , wyznaczonych dla różnych poziomów zakłóceń wraz z błędami modeli określonymi za pomocą wskaźników  $I_{NSKB}, I_{NSWB}$ . Wskaźnik  $I_{NSWB0}$  był liczony tak jak  $I_{NSWB}$ , ale dla nominalnych współczynników. W przypadku oszacowań off-line stosowano wyłącznie podwójne powtórzenie obliczeń – etap 4 w podanym algorytmie.

Dla tego samego poziomu zakłóceń zostały przedstawione oszacowania sygnału wyjściowego dla obu modeli (rys. 1a i 1b). Pomimo bardzo silnych impulsów zakłócających oszacowania uzyskane na podstawie modelu wyznaczonego metodą NSWB były bardzo bliskie wartości sygnału modelowanego – rys 1b. Oszacowania w sensie NSWB pozwalały uzyskać wartości wskaźnika  $I_{NSWB}$  wyraźnie zbliżone do wartości określonych przez  $I_{NSWB0}$ . Różnice w oszacowaniu tego wskaźnika za pomocą oszacowań w sensie NSKB są



Rys. 2. Oszacowania współczynników modelu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  wyznaczone w sensie NSKB dla zakłóceń  $f=0,1$



Rys. 3. Oszacowania współczynników modelu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  wyznaczone w sensie NSWB dla zakłóceń  $f=0,1$

bardzo znaczne. Na wykresach (rys. 2 i 3) przedstawiono wyniki oszacowań współczynników  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  modelu uzyskane dla poziomu zakłóceń  $f = 0,1$ . Należy zwrócić uwagę na bardzo szybką zbieżność oszacowań wyznaczonych metodą RNSWB. Po 40 początkowych krokach oszacowania te, zbliżone do wartości nominalnych, były praktycznie stałe, podczas gdy oszacowania uzyskane metodą RNSKB wykazują wolniejszą zbieżność oraz wyraźną wrażliwość na chwilowe, gwałtowne zakłócenia.

## PODSUMOWANIE

Opisany algorytm oszacowania na podstawie wskaźnika  $I_{NSWB}$  wykazuje wyraźną wyższość nad oszacowaniami uzyskanymi w oparciu o wskaźnik  $I_{NSKB}$  w przypadku niesymetrycznego rozkładu zakłóceń. Należy jednak podkreślić fakt bardzo podobnych wyników uzyskiwanych dla zakłóceń o charakterze symetrycznym – w takim przypadku nie można mówić o zdecydowanej wyższości jednego estymatora nad drugim. Analizując uzyskane wyniki, można zaobserwować lepsze

szacowanie przy zastosowaniu metody on-line (RNSWB) niż za pomocą algorytmu off-line (NSWB), zwłaszcza dla większych poziomów zakłóceń. Ten pozornie nieoczekiwany efekt jest w pełni wytłumaczalny – w przypadku metody rekursywnej, algorytm jest wyposażony w filtrację (wprowadzaną przez właściwe oszacowanie błędu modelu) ulepszaną co krok iteracji, a więc poprawianą ok. 500 razy podczas, gdy w algorytmie off-line, krok 4, został powtórzony wyłącznie jeden raz.

Przykład obiektu statycznego został wybrany w celu uwypuklenia wpływu zakłóceń impulsowych na oszacowania współczynników modelu. W przypadku modelu układu dynamicznego, efekt ten byłby mniej widoczny, ponieważ impulsowe zakłócenie sygnału wyjściowego wchodziłoby do struktury regresyjnej modelu i efekty zniekształceń oszacowań byłyby bardziej rozłożone na wszystkie współczynniki modelu.

kształceń oszacowań byłyby bardziej rozłożone na wszystkie współczynniki modelu.

## BIBLIOGRAFIA:

- [1] Draper N.R., Smith H.: Analiza regresji stosowana. PWN, 1973,
- [2] Eykhoff P: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, 1980,
- [3] Janiszowski K.: Towards Estimation in Sense of Least Sum of Absolute Errors (w przygotowaniu).

## Abstracts

### **Application of the index of minimum sum of error modules for the estimation of model parameters**

**Krzyszof B. Janiszowski** – p. 12

The paper presents estimates derived in sense of least sum of absolute errors (LSA). Direct minimization of LSA not possible, an approximate formula for LSA assessment for regressive models is derived. This formula is based on a stable and fast least squares sum (LSS) assessment algorithm. In case of off-line approach it yields repetitions of weighted LSS assessment but in case of on-line recursive scheme it.