

DWUWYMIAROWE UKŁADY Z ODCHYLONYMI ARGUMENTAMI ORAZ DWUWYMIAROWE UKŁADY BILINIOWE

Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

Wprowadzono nowe modele 2-W układów ciągle-dyskretnych z odchylonymi argumentami oraz 2-W układów biliniowych. Podano metodę wyznaczania rozwiązania i odpowiedzi regularnych układów ciągle-dyskretnych z opóźnieniami oraz wzory na rozwiązanie 2-W modeli biliniowych.

1. Wprowadzenie

Podstawowymi modelami liniowych układów dwuwymiarowych (2-W) są modele podane przez Roessera [31], Fornasini i Marchesini [5,6] oraz Kurka [27]. Singularne modele 2-W układów liniowych dyskretnych zostały wprowadzone w [15], ciągle-dyskretnych w [22], a biliniowych w [13,14]. Układy 2-W z odchylonymi argumentami były rozpatrywane w pracach [17,19,23]. Podstawowe wyniki dotyczące układów biliniowych jedno-wymiarowych (1-W) można znaleźć w pracach [1-4,7,9,11,30]. Przegląd wyników dotyczących 2-W układów liniowych zawierają prace [29,16,12,25,28,32]. Celem tej pracy jest podanie metody wyznaczania rozwiązań nowych modeli 2-W układów ciągle-dyskretnych z odchylonymi argumentami oraz 2-W układów biliniowych.

2. Modele 2-W układów liniowych i biliniowych

2.1. 2-W modele ciągle-dyskretnie układów liniowych z odchylonymi argumentami.

Ważny pod uwagę 2-W model ciągle-dyskretny układu liniowego z odchylonymi argumentami opisany równaniami

$$\begin{aligned} \dot{E}x(t, k+1) = & A_0x(t, k) + A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k+1) + B_0x(t-d_1, k-d_2) \\ & + B_1\dot{x}(t-d_1, k-d_2) + B_2x(t-d_1, k-d_2+1) + C_0u(t, k) + C_1\dot{u}(t, k) + C_2u(t, k+1) \end{aligned} \quad (2.1a)$$

$$y(t, k) = D_0x(t, k) + D_1\dot{x}(t, k) \quad t, d_1 \in \mathbb{R}_+, k, d_2 \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.1b)$$

przy czym $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$ jest semiwektorem stanu, $u(t, k) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem

wymuszeń, $y(t, k) \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $i=0,1,2$, $D_0 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbb{R}^{q \times n}$ jest zbiorem $q \times n$ wymiarowych macierzy o elementach rzeczywistych, a $\mathbb{R}_+$ i $\mathbb{Z}_+$ są odpowiednio zbiorem nieujemnych liczb rzeczywistych i całkowitych.

Jeżeli $q \neq n$ lub $\det E = 0$ gdy $q = n$, to model (2.1) nazywamy singularnym (uwikłanym).

Jeżeli $q = n$ oraz $\det E \neq 0$ to model ten nazywamy standardowym. W tym przypadku mnożąc lewostronnie (2.1a) przez E^{-1} otrzymamy model z macierzą $E = I_n$ (macierz jednostkowa).

Jeżeli $q = n$ oraz $\det E = 0$ ale

$$\det[Esz - A_0 - A_1s - A_2z - B_0e^{-sd_1}z^{-d_2} - B_1se^{-sd_1}z^{-d_2} - B_2e^{-d_1s}z^{1-d_2}] \neq 0$$

dla pewnych $s \in \mathbb{C}$ (ciało liczb zespolonych), to model (2.1) nazywamy regularnym.

Jeżeli $d_1 > 0$ oraz $d_2 > 0$, to model (2.1) nazywamy modelem z opóźnieniami, a jeżeli $d_1 < 0$ oraz $d_2 < 0$, to modelem z przyspieszonymi argumentami (przyspieszeniami).

Jeżeli wszystkie lub niektóre elementy macierzy $E, A_i, B_i, C_i, i = 0, 1, 2, D_0$ oraz D_1 zależą od t i k , to model (2.1) nazywamy modelem o zmiennych współczynnikach.

Z (2.1) dla $C_1 = 0$ oraz $C_2 = 0$ otrzymujemy pierwszy uogólniony 2-W model Fornasiniiego-Marchesiniiego ciągle-dyskretnego układu liniowego z odchylonymi argumentami. Podobnie dla $A_0 = 0, B_0 = 0$ oraz $C_0 = 0$ otrzymujemy drugi uogólniony 2-W model Fornasiniiego-Marchesiniiego ciągle-dyskretnego liniowego układu z odchylonymi argumentami.

Uogólniony 2-W model typu Roessera ciągle-dyskretnego układu liniowego z odchylonymi argumentami ma postać

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, k) \\ x^v(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t-d_1, k-d_2) \\ x^v(t-d_1, k-d_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \end{bmatrix} u(t, k) \quad (2.2a)$$

$$y(t, k) = \begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + D_1 u(t, k), \quad t, d_1 \in R_+, k, d_2 \in Z_+ \quad (2.2b)$$

przy czym $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x^h(t, k) \in R^{\bar{n}}$ jest horyzontalnym semiwektorem stanu, $x^v(t, k) \in R^{\bar{n}_1}$ jest

wertykalnym semiwektorem stanu, $u(t, k) \in R^m$ jest wektorem wymuszeń, $y(t, k) \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $A_{11}, B_{11} \in R^{\bar{n} \times \bar{n}}, A_{12}, B_{12} \in R^{\bar{n} \times \bar{n}_1}, A_{21}, B_{21} \in R^{\bar{n}_1 \times \bar{n}}, A_{22}, B_{22} \in R^{\bar{n}_1 \times \bar{n}_1}, C_{10} \in R^{\bar{n} \times m},$

$C_{20} \in R^{\bar{n}_1 \times m}, D_{01} \in R^{p \times \bar{n}}, D_{02} \in R^{p \times \bar{n}_1}, D_1 \in R^{p \times m}$

Analogicznie, jak dla modelu (2.1), uogólniony model typu Roessera (2.2) nazywamy singularnym, jeżeli $q_1 \neq \bar{n}_1, q_2 \neq \bar{n}_2$ lub $\det E = 0$, gdy $q_1 = \bar{n}_1, q_2 = \bar{n}_2$. Jeżeli E jest macierzą kwadratową i $\det E \neq 0$ to model (2.2) nazywamy standardowym. Model (2.2) nazywamy regularnym, jeżeli $q_1 = \bar{n}_1, q_2 = \bar{n}_2$ i $\det E = 0$ ale

$$\det \begin{bmatrix} E_{11}s - A_{11} - B_{11}e^{-sd_1}z^{-d_2}, E_{12}z - A_{12} - B_{12}e^{-sd_1}z^{-d_2} \\ E_{21}s - A_{21} - B_{21}e^{-sd_1}z^{-d_2}, E_{22}z - A_{22} - B_{22}e^{-sd_1}z^{-d_2} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{dla pewnych } s, z \in \mathbb{C},$$

przy czym

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \quad E_{11} \in R^{\bar{n} \times \bar{n}}, E_{22} \in R^{\bar{n}_1 \times \bar{n}_1}$$

Łatwo wykazać [12, 19], że uogólniony model typu Roessera (2.2) jest przypadkiem szczególnego modelu (2.1).

2.2. Modele 2-W układów biliniowych.

Weźmy pod uwagę następujące dwa modele typu Fornasiniiego-Marchesiniiego 2-W układów biliniowych

$$x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + \sum_{k=1}^m u_{i+1, j}^k B_{1k} x_{i+1, j} + \sum_{k=1}^m u_{i, j+1}^k B_{2k} x_{i, j+1} + C_1 u_{i+1, j} + C_2 u_{i, j+1} \quad (2.3)$$

$i, j \in Z_+$

$$x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + \sum_{k=1}^n x_{i+1, j}^k B'_{1k} u_{i+1, j} + \sum_{k=1}^n x_{i, j+1}^k B'_{2k} u_{i, j+1} + C_1 u_{i+1, j} + C_2 u_{i, j+1} \quad (2.4)$$

$i, j \in Z_+$

przy czym $x_{ij} := [x_{ij}^1, x_{ij}^2, \dots, x_{ij}^n]^T$ jest lokalnym wektorem stanu w punkcie $(i, j) \in Z_+ \times Z_+$, a górny indeks

T oznacza transpozycję, $u_{ij} := [u_{ij}^1, u_{ij}^2, \dots, u_{ij}^m]^T$ jest wektorem wymuszeń, $A_0, A_1, A_2, B_{1k}, B_{2k} \in R^{n \times n}, B'_{1k}, B'_{2k}, C_1, C_2 \in R^{n \times m}$.

Równanie wyjścia obu modeli ma postać

$$y_{ij} = Dx_{ij} + Hu_{ij} \quad (2.5)$$

przy czym $y_{ij} \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi w punkcie (i, j) , a $D \in R^{p \times n}$, $H \in R^{p \times m}$.

Warunki brzegowe dla (2.1), (2.3) oraz (2.4) są dane w postaci

$$x_{i0} \text{ dla } i \in Z_+ \text{ oraz } x_{0j} \text{ dla } j \in Z_+ \quad (2.6)$$

Niech B_{1k}^q (B_{2k}^q) będzie q -tą ($q = 1, \dots, n$) kolumną macierzy B_{1k} (B_{2k}), a B_{1k}^{tq} (B_{2k}^{tq}) będzie q -tą ($q = 1, \dots, m$) kolumną macierzy B_{1k}' (B_{2k}'). Zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^n x_{i+1,j}^k B_{1k}' u_{i+1,j} = \sum_{k=1}^n x_{i+1,j}^k \left(\sum_{q=1}^m B_{1k}^{tq} u_{i+1,j}^q \right) = \sum_{q=1}^m \left(\sum_{k=1}^n x_{i+1,j}^k B_{1k}^{tq} \right) u_{i+1,j}^q \quad (2.7)$$

oraz

$$\sum_{k=1}^m u_{i+1,j}^k B_{1k} x_{i+1,j} = \sum_{k=1}^m u_{i+1,j}^k \left(\sum_{q=1}^n B_{1k}^q x_{i+1,j}^q \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{q=1}^n B_{1k}^q x_{i+1,j}^q \right) u_{i+1,j}^k \quad (2.8)$$

Z zależności (2.7) i (2.8) wynika, że:

$$B_{1k}^q = B_{1k}^{tq} \text{ dla } q = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.9a)$$

Analogicznie można pokazać, że dla

$$B_{2k}^q = B_{2k}^{tq} \text{ dla } q = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m \quad (2.9b)$$

Korzystając z (2.9) możemy równanie (2.3) napisać w postaci (2.4), a równanie (2.4) w postaci (2.3).

Oznaczamy

$$\bar{u}_{ij} := u_{ij} \otimes I_n = [u_{ij}^1 I_n, \dots, u_{ij}^m I_n]^T, \quad \bar{x}_{ij} := x_{ij}^T \otimes I_n = [x_{ij}^1 I_n, x_{ij}^2 I_n, \dots, x_{ij}^n I_n]$$

przy czym $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera oraz

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &:= [B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1m}], & \bar{B}_1' &:= \begin{bmatrix} B_{11}' \\ B_{12}' \\ \vdots \\ B_{1m}' \end{bmatrix}, & \bar{B}_2' &:= \begin{bmatrix} B_{21}' \\ B_{22}' \\ \vdots \\ B_{2n}' \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_2 &:= [B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2m}] \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych oznaczeń możemy (2.3) i (2.4) napisać w postaci

$$x_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + (A_1 + \bar{B}_1 \bar{u}_{i+1,j}) x_{i+1,j} + (A_2 + \bar{B}_2 \bar{u}_{i,j+1}) x_{i,j+1} + C_1 u_{i+1,j} + C_2 u_{i,j+1} \quad (2.10)$$

$$x_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + (\bar{x}_{i+1,j} \bar{B}_1' + C_1) u_{i+1,j} + (\bar{x}_{i,j+1} \bar{B}_2' + C_2) u_{i,j+1} \quad (2.11)$$

Model typu Roessera 2-W układu biliniowego ma postać

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \left(A + \sum_{k=1}^m u_{ij}^k B_k \right) \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + C u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \quad (2.12)$$

lub

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \left(\sum_{q=1}^n x_{ij}^{hq} B_{1q} + \sum_{l=1}^m x_{ij}^{vl} B_{2l} + C \right) u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \quad (2.13)$$

przy czym: x_{ij}^{hq} jest q -tą składową horyzontalnego wektora stanu $x_{ij}^h \in R^n$ w punkcie (i, j) , x_{ij}^{vl} jest l -tą składową wertykalnego wektora stanu $x_{ij}^v \in R^n$ w punkcie (i, j) , u_{ij}^k jest k -tą składową wektora wymuszeń $u_{ij} \in R^m$, a $A, B_k, C, B_{1q}, B_{2l}$ są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

Równanie wyjścia obu modeli ma postać

$$y_{ij} = D \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + H u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \quad (2.14)$$

przy czym $y_{ij} \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi w punkcie (i, j) , a $D \in R^{p \times n}$, $n = n_1 + n_2$, $H \in R^{p \times m}$.

Warunki brzegowe dla (2.12) i (2.13) są dane w postaci

$$x_{0j}^h \text{ dla } j \in Z_+ \text{ oraz } x_{i0}^v \text{ dla } i \in Z_+ \quad (2.15)$$

Niech

$$B_k = [B_k^{h1}, \dots, B_k^{hn_1}, B_k^{v1}, \dots, B_k^{vn_2}], \quad k = 1, \dots, m$$

$$B_{1q} = [B_{1q}^1, \dots, B_{1q}^m], B_{2l} = [B_{2l}^1, \dots, B_{2l}^m], \quad q = 1, \dots, n_1, l = 1, \dots, n_2$$

Z porównania zależności

$$\sum_{k=1}^m u_{ij}^k B_k \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^{n_1} u_{ij}^k B_k^{hq} x_{ij}^{hq} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n_2} u_{ij}^k B_k^{vl} x_{ij}^{vl} \quad (2.16a)$$

oraz

$$\sum_{q=1}^{n_1} x_{ij}^{hq} B_{1q} u_{ij} + \sum_{l=1}^{n_2} x_{ij}^{vl} B_{2l} u_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^{n_1} u_{ij}^k B_{1q}^k x_{ij}^{hq} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n_2} u_{ij}^k B_{2l}^k x_{ij}^{vl} \quad (2.16b)$$

$$\text{wynika, że } B_k^{hq} = B_{1q}^k \text{ dla } k = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n_1, B_k^{vl} = B_{2l}^k \text{ dla } k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n_2 \quad (2.17)$$

Korzystając z (2.17) możemy przekształcić równanie (2.12) w równanie (2.13) oraz odwrotnie równanie (2.13) w równanie (2.12).

Zauważmy, że (2.12) można napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = (A + B \bar{u}_{ij}) \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + C u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \quad (2.18)$$

przy czym

$$B := [B_1, B_2, \dots, B_m], \quad \bar{u}_{ij} := u_{ij} \otimes I_n$$

Definiując

$$x_{ij} := \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 \in R^{n_1 \times n}, A_2 \in R^{n_2 \times n}, B_1 \in R^{n_1 \times nm}, B_2 \in R^{n_2 \times nm},$$

$C'_1 \in R^{n_1 \times m}, C'_2 \in R^{n_2 \times m}$ z równania (2.18) otrzymamy

$$x_{i+1,j+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 + B_2 \bar{u}_{i+1,j} \end{bmatrix} x_{i+1,j} + \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \bar{u}_{i,j+1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{i,j+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ C'_2 \end{bmatrix} u_{i+1,j} + \begin{bmatrix} C'_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{i,j+1} \quad (2.19)$$

Z porównania (2.10) oraz (2.19) wynika, że 2-W model typu Roessera (2.12) jest przypadkiem szczególnym modelu (2.1).

Zauważmy, że modele (2.10) i (2.18) można napisać w postaci

$$x_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + A_{i+1}^1 x_{i+1,j} + A_{i,j+1}^2 x_{i,j+1} + C_1 u_{i+1,j} + C_2 u_{i,j+1} \quad (2.20)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \bar{A}_{ij} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + C u_{ij} \quad (2.21)$$

przy czym

$$A_{i+1,j}^1 = A_1 + \bar{B}_1 \bar{u}_{i+1,j}, \quad A_{i,j+1}^2 = A_2 + \bar{B}_2 \bar{u}_{i,j+1}, \quad \bar{A}_{ij} = A + B \bar{u}_{ij}$$

Dla danych u_j (2.20) oraz (2.21) są modelami 2-W układów liniowych ze zmiennymi współczynnikami. Wykazaliśmy więc następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.1. Model typu Fornasini-Marchesini (2.1) oraz model typu Roessera (2.10) 2-W układów biliniowych są równoważne modelom (2.20) i (2.21) układów 2-W o zmiennych współczynnikach. Podobne wyniki otrzymamy dla modelu (2.11).

3. Wyznaczanie rozwiązań modeli.

3.1. Wyznaczanie rozwiązania uogólnionego modelu regularnego.

Aby uprościć oznaczenia równanie (2.1a) piszemy w postaci

$$E\dot{x}(t, k+1) = A_0 x(t, k) + A_1 \dot{x}(t, k) + A_2 x(t, k+1) + B_0 x(t-d_1, k-d_2) + B_1 \dot{x}(t-d_1, k-d_2) + B_2 x(t-d_1, k-d_2+1) + f(t, k) \quad (3.1a)$$

przy czym

$$f(t, k) := C_0 u(t, k) + C_1 \dot{u}(t, k) + C_2 u(t, k+1) \quad (3.1b)$$

Zakładamy, że $q = n$, $\det E = 0$ oraz

$$\det[Es - A_2] \neq 0 \text{ dla pewnych } s \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

Wiadomo, że [8, 12] jeżeli jest spełniony warunek (3.2) to istnieją macierze nieosobliwe $P, Q \in R^{n \times n}$ takie, że

$$P[Es - A_2]Q = \begin{bmatrix} I_n s - A_{21} & 0 \\ 0 & Ns - I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

przy czym n_1 jest równe stopniowi $\det[Es - A_2]$, $n_2 := n - n_1$, $A_{21} \in R^{n_1 \times n_1}$, $N \in R^{n_2 \times n_2}$ jest macierzą nilpotentną z indeksem ν ($N^{\nu-1} \neq 0$ oraz $N^\nu = 0$). Zauważmy, że jeżeli zachodzi (3.2) to model (3.1a) jest regularny. Mnożąc lewostronnie (3.1a) przez P , wprowadzając nowy wektor

$$Q^{-1}x(t, k) := \begin{bmatrix} x_1(t, k) \\ x_2(t, k) \end{bmatrix}, \quad x_1(t, k) \in R^{n_1}, \quad x_2(t, k) \in R^{n_2}$$

oraz korzystając (3.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, k+1) &= A_{01}x_1(t, k) + A_{02}x_2(t, k) + A_{11}\dot{x}_1(t, k) + A_{12}\dot{x}_2(t, k) + A_{21}x_1(t, k+1) + \\ &+ B_{01}x_1(t-d_1, k-d_2) + B_{02}x_2(t-d_1, k-d_2) + B_{11}\dot{x}_1(t-d_1, k-d_2) + \\ &+ B_{12}\dot{x}_2(t-d_1, k-d_2) + B_{21}x_1(t-d_1, k-d_2+1) + B_{22}x_2(t-d_1, k-d_2+1) + f_1(t, k) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2(t, k+1) &= A_{03}x_1(t, k) + A_{04}x_2(t, k) + A_{13}\dot{x}_1(t, k) + A_{14}\dot{x}_2(t, k) + x_2(t, k+1) + \\ &+ B_{03}x_1(t-d_1, k-d_2) + B_{04}x_2(t-d_1, k-d_2) + B_{13}\dot{x}_1(t-d_1, k-d_2) + B_{14}\dot{x}_2(t-d_1, k-d_2) + \\ &+ B_{23}x_1(t-d_1, k-d_2+1) + B_{24}x_2(t-d_1, k-d_2+1) + f_2(t, k) \quad \text{dla } t \in R_+, k \in Z_+ \end{aligned} \quad (3.4b)$$

przy czym

$$PA_k Q = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \\ A_{k3} & A_{k4} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \quad PB_j Q = \begin{bmatrix} B_{j1} & B_{j2} \\ B_{j3} & B_{j4} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \quad Pf(t, k) = \begin{bmatrix} f_1(t, k) \\ f_2(t, k) \end{bmatrix}$$

Macierze A_{ki} , B_{ji} , $k = 0, 1; i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2$ oraz wektory $f_1(t, k)$, $f_2(t, k)$ mają wymiary zgodne z wymiarami x_1 oraz x_2 .

Niech warunki brzegowe dla (3.1a) będą dane w postaci

$$x(t, k) \text{ oraz } \dot{x}(t, k) \text{ dla } t \geq -d_1, -d_2 \leq k \leq 0 \text{ i } -d_1 \leq t \leq 0, k > 0 \quad (3.5)$$

Zakładamy, że warunki brzegowe (3.5) oraz $u(t, k)$ są $(\nu + 1)$ - razy różnicowalne względem t . Warunki brzegowe (3.5) nazywamy dopuszczalnymi jeżeli dla danego $u(t, k)$ istnieje rozwiązanie $x(t, k)$ równania (3.1a). Znając (3.5) możemy wyznaczyć warunki brzegowe dla równań (3.4) z zależności

$$\begin{bmatrix} x_1(t, k) \\ x_2(t, k) \end{bmatrix} = Q^{-1} x(t, k) \text{ oraz } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t, k) \\ \dot{x}_2(t, k) \end{bmatrix} = Q^{-1} \dot{x}(t, k) \text{ dla } t \geq -d_1, -d_2 \leq k \leq 0, -d_1 \leq t \leq 0, k > 0 \quad (3.6)$$

Zauważmy, że równania (3.4a) i (3.4b) są sprzężane przez macierze $A_{i2}, A_{j3}, i = 0, 1, B_{j2}, B_{j3}, j = 0, 1, 2$.

Jeżeli więc przynajmniej jedna z tych macierzy jest niezerowa, to równania te nie można rozwiązywać niezależnie. Aby wyznaczyć rozwiązania $x_1(t, k), x_2(t, k)$ równań (3.4a) i (3.4b) z warunkami brzegowymi (3.6) weźmy pod uwagę te równania dla $k = 0$

$$\dot{x}_1(t, 1) = A_{21}x_1(t, 1) + F_{10}(t), \quad N\dot{x}_2(t, 1) = x_2(t, 1) + F_{20}(t) \quad (3.7)$$

przy czym

$$\begin{aligned} F_{10}(t) = & A_{01}x_1(t, 0) + A_{02}x_2(t, 0) + A_{11}\dot{x}_1(t, 0) + A_{12}\dot{x}_2(t, 0) + \\ & + B_{01}x_1(t - d_1, -d_2) + B_{02}x_2(t - d_1, -d_2) + B_{11}\dot{x}_1(t - d_1, -d_2) + \\ & + B_{12}\dot{x}_2(t - d_1, -d_2) + B_{21}x_1(t - d_1, 1 - d_2) + B_{22}x_2(t - d_1, 1 - d_2) + f_1(t, 0) \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} F_{20}(t) = & A_{03}x_1(t, 0) + A_{04}x_2(t, 0) + A_{13}\dot{x}_1(t, 0) + A_{14}\dot{x}_2(t, 0) + \\ & + B_{03}x_1(t - d_1, -d_2) + B_{04}x_2(t - d_1, -d_2) + B_{13}\dot{x}_1(t - d_1, -d_2) + \\ & + B_{14}\dot{x}_2(t - d_1, -d_2) + B_{23}x_1(t - d_1, 1 - d_2) + B_{24}x_2(t - d_1, 1 - d_2) + f_2(t, 0) \end{aligned} \quad (3.8b)$$

są znane dla danych (3.6), $f_1(t, k)$ oraz $f_2(t, k)$.

Rozwiązania $x_1(t, 1), x_2(t, 1)$ równań (3.7) mają postać [8, 12, 22]

$$x_1(t, 1) = e^{A_{21}t} x_1(0, 1) + \int_0^t e^{A_{21}(t-\tau)} F_{10}(\tau) d\tau, \quad t \in R, \quad (3.9)$$

$$x_2(t, 1) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i F_{20}^{(i)}(t) \quad (3.10)$$

Jeżeli $d_2 \geq 2$ to podstawiając $k = 1$ do (3.4a), (3.4b) i korzystając (3.9) oraz (3.10) otrzymamy

$$\dot{x}_1(t, 2) = A_{21}x_1(t, 2) + F_{11}(t) \quad (3.11a)$$

oraz

$$N\dot{x}_2(t, 2) = x_2(t, 2) + F_{21}(t) \quad (3.11b)$$

przy czym

$$\begin{aligned} F_{11}(t) = & \bar{A}_1 \left[e^{A_{21}t} x_1(0, 1) + \int_0^t e^{A_{21}(t-\tau)} F_{10}(\tau) d\tau \right] + A_{11}F_{10}(t) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \left[A_{02}N^i F_{20}^{(i)}(t) + A_{12}N^i F_{20}^{(i+1)}(t) \right] + \\ & + B_{01}x_1(t - d_1, 1 - d_2) + B_{02}x_2(t - d_1, 1 - d_2) + B_{11}\dot{x}_1(t - d_1, 1 - d_2) + \\ & + B_{12}\dot{x}_2(t - d_1, 1 - d_2) + B_{21}x_1(t - d_1, 2 - d_2) + B_{22}x_2(t - d_1, 2 - d_2) + f_1(t, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21}(t) = & \bar{A}_2 \left[e^{A_{21}t} x_1(0, 1) + \int_0^t e^{A_{21}(t-\tau)} F_{10}(\tau) d\tau \right] + A_{13}F_{10}(t) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \left[A_{04}N^i F_{20}^{(i)}(t) + A_{14}N^i F_{20}^{(i+1)}(t) \right] + \\ & + B_{03}x_1(t - d_1, 1 - d_2) + B_{04}x_2(t - d_1, 1 - d_2) + B_{13}\dot{x}_1(t - d_1, 1 - d_2) + \\ & + B_{14}\dot{x}_2(t - d_1, 1 - d_2) + B_{23}x_1(t - d_1, 2 - d_2) + B_{24}x_2(t - d_1, 2 - d_2) + f_2(t, 1), \end{aligned}$$

$$\overline{A}_1 := A_{01} + A_{11}A_{21}, \quad \overline{A}_2 := A_{03} + A_{13}A_{21}$$

Rozwiązania $x_1(t, 2)$, $x_2(t, 2)$ równań (3.11) mają postać

$$x_1(t, 2) = e^{A_{11}t} x_1(0, 2) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)} F_{11}(\tau) d\tau \quad t \in R_+$$

$$x_2(t, 2) = - \sum_{i=0}^{v-1} N^i F_{21}(t)$$

Kontynuując tę procedurę po k krokach otrzymamy

$$x_1(t, k) = e^{A_{11}t} x_1(0, k) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)} F_{1,k-1}(\tau) d\tau \quad (3.12a)$$

$$x_2(t, k) = - \sum_{i=0}^{v-1} N^i F_{2,k-1}^{(i)}(t) \quad (3.12b)$$

przy czym $F_{1,k-1}(t)$, $F_{2,k-1}(t)$ dla $k \geq d_2$ spełniają równania

$$\begin{aligned} F_{1,k}(t) = & \overline{A}_1 \left[e^{A_{11}t} x_1(0, k) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)} F_{1,k-1}(\tau) d\tau \right] + A_{11} F_{1,k-1}(t) + \\ & - \sum_{i=0}^{v-1} \left[A_{02} N^i F_{2,k-1}^{(i)}(t) + A_{12} N^i F_{2,k-1}^{(i+1)}(t) \right] + B_{01} x_1(t-d_1, k-d_2) + \\ & + B_{02} x_2(t-d_1, k-d_2) + B_{11} \dot{x}_1(t-d_1, k-d_2) + B_{12} \dot{x}_2(t-d_1, k-d_2) + \\ & + B_{21} x_1(t-d_1, k-d_2+1) + B_{22} x_2(t-d_1, k-d_2+1) + f_1(t, k) \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} F_{2,k}(t) = & \overline{A}_2 \left[e^{A_{21}t} x_1(0, k) + \int_0^t e^{A_{21}(t-\tau)} F_{1,k-1}(\tau) d\tau \right] + A_{13} F_{1,k-1}(t) + \\ & - \sum_{i=0}^{v-1} \left[A_{04} N^i F_{2,k-1}^{(i)}(t) + A_{14} N^i F_{2,k-1}^{(i+1)}(t) \right] + B_{03} x_1(t-d_1, k-d_2) + \\ & + B_{04} x_2(t-d_1, k-d_2) + B_{13} \dot{x}_1(t-d_1, k-d_2) + B_{14} \dot{x}_2(t-d_1, k-d_2) + \\ & + B_{23} x_1(t-d_1, k-d_2+1) + B_{24} x_2(t-d_1, k-d_2+1) + f_2(t, k) \end{aligned} \quad (3.13b)$$

Niech $P_i := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ będzie operatorem liniowym określonym następująco

$$\begin{aligned} P_{11} F_1(t) &:= \overline{A}_1 \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau + A_{11} F_1(t), \\ P_{12} F_2(t) &:= - \sum_{i=0}^{v-1} \left[A_{02} N^i F_2^{(i)}(t) + A_{12} N^i F_2^{(i+1)}(t) \right], \\ P_{21} F_1(t) &:= \overline{A}_2 \int_0^t e^{A_{21}(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau + A_{13} F_1(t), \\ P_{22} F_2(t) &:= - \sum_{i=0}^{v-1} \left[A_{04} N^i F_2^{(i)}(t) + A_{14} N^i F_2^{(i+1)}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

a $P^k := P \circ P \circ \dots \circ P$ jest k -krotnym założeniem P (z definicji $P^0 := I$ (operator identycznościowy)).

Korzystając (3.14) oraz

$$\begin{aligned} h_1(t, k) = & \bar{A}_1 e^{A_1 t} x_1(0, k) + B_{01} x_1(t - d_1, k - d_2) + B_{02} x_2(t - d_1, k - d_2) + \\ & + B_{11} \dot{x}_1(t - d_1, k - d_2) + B_{12} \dot{x}_2(t - d_1, k - d_2) + B_{21} x_1(t - d_1, k - d_2 + 1) + \\ & + B_{22} x_2(t - d_1, k - d_2 + 1) + f_1(t, k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} h_2(t, k) = & \bar{A}_2 e^{A_2 t} x_1(0, k) + B_{03} x_1(t - d_1, k - d_2) + B_{04} x_2(t - d_1, k - d_2) + \\ & + B_{13} \dot{x}_1(t - d_1, k - d_2) + B_{14} \dot{x}_2(t - d_1, k - d_2) + B_{23} x_1(t - d_1, k - d_2 + 1) + \\ & + B_{24} x_2(t - d_1, k - d_2 + 1) + f_2(t, k) \end{aligned}$$

możemy równania (3.13) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{bmatrix} = P_t \begin{bmatrix} F_{1,k-1}(t) \\ F_{2,k-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(t, k) \\ h_2(t, k) \end{bmatrix} \quad t \in R_+, k \in Z_+ \quad (3.16)$$

Rozwiązanie równania (3.16) ma postać [12]

$$\begin{bmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{bmatrix} = P_t^k \begin{bmatrix} F_{10}(t) \\ F_{20}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} P_t^{k-i-1} \begin{bmatrix} h_1(t, i+1) \\ h_2(t, i+1) \end{bmatrix} \quad k > 0 \quad (3.17)$$

przy czym $F_{10}(t), F_{20}(t)$ są określone zależnością (3.8).

W analogiczny sposób możemy określić operator P oraz wektory $h_1(t, k), h_2(t, k)$ dla $k < d_2$. Wykazane zostało więc następujące

Twierdzenie 3.1.

Jeżeli spełnione założenie (3.2) to rozwiązanie $x(t, k)$ równania (3.1a) z warunkami brzegowymi (3.5) ma postać

$$x(t, k) = Q \left[\begin{aligned} & e^{A_1 t} x_1(0, k) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} F_{1,k-1}(\tau) d\tau \\ & - \sum_{i=0}^{v-1} N^i F_{2,k-1}^{(i)}(t) \end{aligned} \right], \quad t \in R_+, k \in Z_+ \quad (3.18)$$

przy czym $F_{1k}(t), F_{2k}(t)$ są określone zależnością (3.17).

Podstawiając (3.18) do (2.1b) otrzymamy wzór umożliwiający wyznaczanie odpowiedzi $y(t, k)$ dla danych $u(t, k)$ oraz dopuszczalnych warunków brzegowych (3.5).

3.2. Wyznaczanie rozwiązania modelu biliniowego.

Wyznamy tylko rozwiązanie równania (2.10) z warunkiem brzegowym (2.6), gdyż równanie (2.11) można sprowadzić do równania (2.10).

Twierdzenie 3.2. Rozwiązanie x_y równania (2.10) z warunkiem brzegowym (2.6) ma postać

$$\begin{aligned} x_y = & T_{l-1, j-1} A_0 x_{00} + \sum_{k=1}^l T_{l-k-1, j-1} A_0 x_{k0} + \sum_{i=1}^l T_{l-1, j-i-1} A_0 x_{0i} + \\ & + \sum_{k=1}^l T_{l-k, j-1} [(A_1 + \bar{B}_1 \bar{u}_{k0}) x_{k0} + C_1 u_{k0}] + \sum_{i=1}^l T_{l-1, j-i} [(A_2 + \bar{B}_2 \bar{u}_{0i}) x_{0i} + C_2 u_{0i}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1=1}^i \sum_{k_2=1}^j \left[T_{i-k_1, j-k_2-1} \bar{B}_1 + T_{i-k_1-1, j-k_2} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} M_{k_1 k_2} + \left(\sum_{(1,1) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left[T_{i-k_1, j-k_2-1} \bar{B}_1 + T_{i-k_1-1, j-k_2} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{(1,1) \leq (k_1, k_2) < (k_2, j_2)} \left[T_{k_2-k_1, j_2-k_1-1} \bar{B}_1 + T_{k_2-k_1-1, j_2-k_1} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} M_{k_1 k_2} \right) + \dots + \\
& + \left(\sum_{(r, r) \leq (k_r, l_r) < (i, j)} \left[T_{i-k_r, j-l_r-1} \bar{B}_1 + T_{i-k_r-1, j-l_r} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_r l_r} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{(r, r) \leq (k_{r-1}, l_{r-1}) < (k_r, l_r)} \left[T_{k_r-k_{r-1}, l_r-l_{r-1}-1} \bar{B}_1 + T_{k_r-k_{r-1}-1, l_r-l_{r-1}} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_{r-1} l_{r-1}} \right) \times \dots \times \\
& \times \left(\sum_{(1,1) < (k_1, k_2) < (k_2, j_2)} \left[T_{k_2-k_1, j_2-k_1-1} \bar{B}_1 + T_{k_2-k_1-1, j_2-k_1} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} M_{k_1 k_2} \right) + \sum_{k_1=1}^i \sum_{k_2=1}^j \left[T_{i-k_1, j-k_2-1} C_1 + T_{i-k_1-1, j-k_2} C_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} + \\
& + \left(\sum_{(1,1) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} \left[T_{i-k_1, j-k_2-1} \bar{B}_1 + T_{i-k_1-1, j-k_2} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} \right) \times \left(\sum_{(1,1) \leq (k_1, k_2) < (k_2, j_2)} \left[T_{k_2-k_1, j_2-k_1-1} C_1 + T_{k_2-k_1-1, j_2-k_1} C_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} \right) + \\
& + \dots + \left(\sum_{(r, r) \leq (k_r, l_r) < (i, j)} \left[T_{i-k_r, j-l_r-1} \bar{B}_1 + T_{i-k_r-1, j-l_r} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_r l_r} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{(r, r) \leq (k_{r-1}, l_{r-1}) < (k_r, l_r)} \left[T_{k_r-k_{r-1}, l_r-l_{r-1}-1} \bar{B}_1 + T_{k_r-k_{r-1}-1, l_r-l_{r-1}} \bar{B}_2 \right] \bar{u}_{k_{r-1} l_{r-1}} \right) \times \dots \times \\
& \times \left(\sum_{(1,1) \leq (k_1, k_2) < (k_2, j_2)} \left[T_{k_2-k_1, j_2-k_1-1} C_1 + T_{k_2-k_1-1, j_2-k_1} C_2 \right] \bar{u}_{k_1 k_2} \right) \quad r \leq \max(i, j)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

przy czym T_{pq} jest macierzą tranzacji określoną następująco

$$\begin{aligned}
T_{00} &:= I_n \quad (\text{macierz jednostkowa}) \\
T_{pq} &= T_{p-1, q-1} A_0 + T_{p, q-1} A_1 + T_{p-1, q} A_2 \quad \text{dla } (i, j) > (0, 0) \\
T_{pq} &= 0 \quad (\text{macierz zerowa}) \quad \text{dla } i < 0 \text{ oraz } / \text{ lub } j < 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

oraz

$$\begin{aligned}
M_{pq} &= T_{p-1, q-1} A_0 x_{00} + \sum_{k=1}^p T_{p-k-1, q-1} A_0 x_{k0} + \sum_{l=1}^q T_{p-1, q-l-1} A_0 x_{0l} + \\
&+ \sum_{k=1}^p T_{p-k, q-1} \left[(A_1 + \bar{B}_1 \bar{u}_{k0}) x_{k0} + C_1 u_{k0} \right] + \sum_{l=1}^q T_{p-1, q-l} \left[(A_2 + \bar{B}_2 \bar{u}_{0l}) x_{0l} + C_2 u_{0l} \right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić metodą indukcji względem pary (i, j) [13, 14].

Mając rozwiązania modeli liniowych możemy sformułować warunki konieczne i dostateczne osiągalności i sterowalności lokalnej tych modeli. Można również rozwiązać problem sterowania optymalnego z minimalną energią tej klasy modeli stosując metodę podaną w pracach [17-21, 24-26].

References

- [1] Elliot D.L., Tam T.J., Gorka T., *Controllability of bilinear systems with bounded controls*, IEEE Trans. Automatic control. AC-18, 2, 1973, pp. 298-301.
- [2] Espana M., Landau I.D., *Reduced Order Bilinear Models for Distillation Columns*, Automatica, vol. 14, 1978, pp. 345-355.
- [3] Evans M.E., Murthy D.N.P., *Controllability of a class of discrete-time bilinear systems*, IEEE Trans. Automatic control. AC-22, 1, 1977, pp. 78-83.

- [4] Evans M.E., Murthy D.N.P., *Controllability of discrete-time inhomogeneous bilinear systems*, Automatica vol. 14, 1978, pp. 147-151.
- [5] Fornasini E. and Marchesini G., *State space realization theory of two-dimensional filters*, IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-21, No. 4, 1976, pp. 484-491.
- [6] Fornasini E. and Marchesini G., *Doubly indexed dynamical systems: State-space models and structural properties*, Math. Syst. Theory, vol. 12, 1978, pp. 59-72.
- [7] Funahashi Y., *Comments on controllability of a class of discrete-time bilinear systems*, IEEE Trans. Automatic control. AC-24, 4, 1979.
- [8] Gantmacher F.R., *The theory of matrices*, Chelsea, Hirsch, 1959.
- [9] Gorka T., Tam T.J., Zaborsky L., *On controllability of a class of discrete-time bilinear systems*, Automatica, 9.4, 1979, pp. 615-622.
- [10] Grasselli O.M., Isidori A., Nicolo F., *Dead-beat control of discrete-time bilinear systems*, Int. J. control. 1, vol. 32, 1980, pp. 31-39.
- [11] Hollis P. Murthy D.N.P., *Study of uncontrollable discrete bilinear systems*, IEEE Trans. Automatic control. vol. AC-27, 1, 1982.
- [12] Kaczorek T., *Linear Control Systems, v. 2-Synthesis of Multivariable Systems and Multidimensional Systems*, New York: Research Studies Press and John Wiley, 1992.
- [13] Kaczorek T., *2-D bilinear systems*, Bull. Pol. Acad. Tech. Sci., vol. 41, No. 3, 1993, pp. 207-214.
- [14] Kaczorek T., *General response formula for 2-D bilinear systems*, Appl. Math. and Comp. Sci., vol. 4, No. 1, 1994, pp. 79-86.
- [15] Kaczorek T., *Singular general model of 2-D systems and its solution*, IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-33, No 11, 1988, pp. 1060-1061.
- [16] Kaczorek T., *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer-Verlag-Berlin, 1985.
- [17] Kaczorek T., *Generalized multidimensional linear systems with deviating arguments*, Arch. Control Sciences, vol. 2, No 2-4, 1993, pp. 165-183.
- [18] Kaczorek T., *General Response Formula and Minimum Energy Control for the General Singular Model of 2-D Systems*, IEEE Trans. Autom. Contr. AC-35, April 1990, pp. 433-436.
- [19] Kaczorek T., *Linear two-dimensional systems with deviating arguments*, Differential Equations, Dynamical Systems and Control Science, vol. 152, 1993, pp. 623-640.
- [20] Kaczorek T., *Minimum Energy Control for General Model of 2-D Linear Systems*, Int. J. Control, vol. 47, No 5, 1988, pp. 1555-1562.
- [21] Kaczorek T., *Minimum energy control of 2-D continuous-discrete linear systems*, Proc. XVII-SPETO, Gliwice-Ustroń, 25-28 Maj 1994, pp. 265-270.
- [22] Kaczorek T., *Singular 2-D continuous-discrete linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 42, No 4, 1994, pp. 417-422.
- [23] Kaczorek T., *Singular 2-D linear systems with delays*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 40, No 4, 1992, pp. 361-365.
- [24] Kaczorek T., Klamka J., *Minimum Energy Control of 2-D Linear Systems with Variable Coefficients*, Int. J. Control, vol. 44, No 3, 1986, pp. 645-650.
- [25] Klamka J., *Controllability of Dynamical Systems*, Warszawa-London 1991, PWN and Kluwer Academic Publishers.
- [26] Klamka J., *Minimum energy control for 2-D systems*, Systems Science, vol. 9, 1983.
- [27] Kurek J., *The general state-space model for two-dimensional linear digital system*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-30, 1985, pp. 600-602.
- [28] Kurek J., Zaremba M.B., *Iterative learning control synthesis on 2-D system theory*, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 38, No 1, 1993, pp. 121-125.
- [29] Lewis F.L., *A review of 2-D implicit systems*, Automatica vol. 28, No 2, 1992, pp. 345-354.
- [30] Mohler R., *Bilinear Control Processes*, Academic Press, New York, II, 1973, pp. 21-51.
- [31] Roeser R.P., *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-21, 1975, pp. 1-10.
- [32] Rogers E., Owens D.H., *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes*. Springer-Verlag 1992.