

PROJEKTOWANIE WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW DYSKRETYNYCH ZA POMOCĄ METOD CZASU CIĄGŁEGO

Ryszard Gessing

Politechnika Śląska, Instytut Automatyki,

ul. Akademicka 16, 44-101 Gliwice,

fax: +4832371165, email: gessing @ ia.gliwice.edu.pl

Streszczenie. Na początku pracy zwraca się uwagę na trudności w stosowaniu metod bazujących na transformacji Z do opisu układów dyskretnych przy dużych częstotliwościach próbkowania. Proponuje się metodę projektowania regulatorów dyskretnych przy wykorzystaniu metod czasu ciągłego. Stosuje się w niej proste modele ciągłe układu dyskretnego. Zaprojektowany przy użyciu tych modeli regulator ciągły jest następnie przybliżany regulatorem dyskretnym. Pokazano możliwość zastosowania metody do projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych z oddzielnymi regulatorami poszczególnych pętli regulacji i z różnymi częstotliwościami próbkowania. Zauważono, że dla tych ostatnich układów nie istnieje opis za pomocą transmitancji dyskretnych co utrudnia ich projektowanie przy wykorzystaniu modeli dyskretnych. Zaproponowano także oryginalną metodę projektowania ciągłych układów wielowymiarowych. Metody zilustrowano przykładami.¹

1 Wprowadzenie

Ostatnio coraz częściej w układach automatyki stosuje się regulatory zrealizowane na mikroprocesorach, przy czym zazwyczaj stosuje się duże częstotliwości próbkowania. Wiadomo, że wtedy układy takie zbliżają się swoimi własnościami do układów ciągłych. Tym niemniej regulator zrealizowany na mikroprocesorze pozostaje jednak regulatorem dyskretnym i dla zaprojektowania dla niego algorytmu musi być to brane pod uwagę. Aktualnym więc pozostaje pytanie, jakie metody stosować do opisu i projektowania takich układów?

W literaturze zwraca się uwagę na trudności związane z zastosowaniem opisu bazującego na transformacji Z do takich układów. Przyczyna tych trudności jest wyeksponowana również na początku niniejszej pracy. W związku z tym zostały rozwinięte inne transformacje, takie jak np. transformacja δ [5]. Wzrasta również zainteresowanie stosowaniem metod czasu ciągłego do opisu układów dyskretnych. Ale propozycje takie jak w pracach [6, 3] nie wydają się być trafione ze względu na stopień ich skomplikowania.

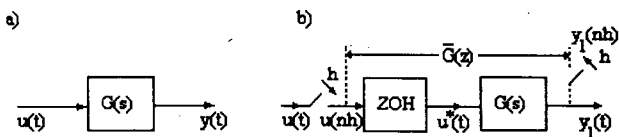
W niniejszej pracy proponuje się oryginalną i prostą metodę projektowania regulatorów dyskretnych za pomocą metod czasu ciągłego. Istotą metody jest zastosowanie modelu ciągłego uwzględniającego próbkowanie i podtrzymywanie realizowane przez ekstrapolator zerowego rzędu. Regulator dyskretny otrzymuje się z odpowiedniego przybliżenia regulatora ciągłego zaprojektowanego za pomocą jednej z metod czasu ciągłego.

2 Przypadek małych okresów próbkowania

Rozważmy układ dyskretny złożony z szeregowo połączonych elementów: próbkującego, ekstrapolatora zerowego rzędu EO i obiektu ciągłego G . (Rys. 1b.). Załóżmy, że obiekt posiada transmitancję wymierną o postaci

$$G(s) = \frac{C(s)}{D(s)} \quad (1)$$

¹Praca wykonana w ramach grantu nr. 3P40301006 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.



Rys. 1 a) Układ ciągły, b) układ dyskretny.

gdzie $C(s)$ i $D(s)$ są wielomianami odpowiednio stopnia m i n , przy czym $m < n$. Rozpatrywany układ dyskretny można opisać za pomocą transmitancji dyskretniej określonej przez wzór

$$\bar{G}(z) = (1 - z^{-1})Z^h[y(kh)] \quad (2)$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ jest czasem dyskretnym, Z^h oznacza transformację Z o okresie próbkowania h , $y_1(t)$ oznacza odpowiedź skokową obiektu ciągłego G , h jest okresem próbkowania oraz $(1 - z^{-1})$ jest odwrotnością transformaty Z dyskretnego skoku jednostkowego. Niechaj s_j i z_j , $j = 1, 2, \dots, n$ są biegunami odpowiednio transmitancji $G(s)$ i $\bar{G}(z)$. Mamy wtedy

$$z_j = e^{s_j h}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Warto zauważyć, że za pomocą podstawienia $t = kh$ zmieniamy skalę czasu od czasu rzeczywistego t z jednostką "1" do czasu dyskretnego k z jednostką "h". W związku z tym położenie biegunów z_j transmitancji $\bar{G}(z)$ nie odpowiada przebiegom czasu rzeczywistego. Można zauważyć, że te ostatnie przebiegi są związane z pierwiastkami

$$z_j^* = z_j^{1/h} = e^{s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

w przypadku czasu dyskretnego, oraz z pierwiastkami s_j , $j = 1, 2, \dots, n$, w przypadku czasu ciągłego.

Przypadek graniczny, gdy h dąży do zera należy traktować ostrożnie. Wtedy, po pierwsze, wszystkie bieguny z_j dążą do granicy równej 1, co oznacza, że ta granica nie zawiera żadnej informacji o przebiegach sygnału wyjściowego. Po drugie, jeżeli traktujemy z jako zmienną zespoloną niezależną od h i różną od 1 wtedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{G}(z) = 0 \quad (5)$$

Przypadek $z \neq 1$ odpowiada stanom nieustalonym dla skończonych wartości czasu dyskretnego k . Granica (5) wynika stąd, że w rozważanym przypadku $y_1(kh) \rightarrow 0$ dla $h \rightarrow 0$, ponieważ $y_1(0) = 0$. Granica (5) nie ma żadnego znaczenia praktycznego i wynika stąd, że użyty został czas dyskretny k z jednostką "h" zdążającą do zera. Z drugiej strony praktycy wiedzą, że gdy $h \rightarrow 0$ wtedy omawiany układ dyskretny zachowuje się tak jak układ ciągły opisany transmitancją $G(s)$. Teoretycznie można to pokazać powracając do czasu rzeczywistego ciągłego poprzez podstawienie $z = \exp(sh)$. Otrzymujemy wtedy

$$G(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{G}(e^{sh}) \quad (6)$$

Własność (6) wynika także z nieco zapomnianej obecnie własności transmitancji dyskretniej dla układu z impulsatorem idealnym, wyprowadzonej w [4].

Z własności (5) wynika, że stosowanie transmitancji dyskretniej $\bar{G}(z)$ do opisu układów przy małym h może prowadzić do znacznych trudności. Rzeczywiście z pracy [2] wynika, że do zapisu współczynników wielomianów transmitancji $\bar{G}(z)$ potrzebne są wtedy słowa cyfrowe o bardzo dużej długości. Na przykład, do zapisu tych współczynników dla układu, w którym $G(s) = 40.48/(s+1)(s+2s+40.48)$ i $h = 0.01$, do zapisu tych współczynników dla układu, w którym $G(s) = 40.48/(s+1)(s+2s+40.48)$ i $h = 0.01$, zapewniającego dokładność parametru wzmocnienia na poziomie 1% potrzeba 8 pozycji liczby dziesiętnej a przy stosowaniu 5 pozycji model jest całkowicie nieadekwatny. Przy $h = 0.001$ potrzeba już 11 pozycji a przy 8 model całkowicie upada. Z [2] wynika, że na potrzebną ilość pozycji liczby dziesiętnej istotny

wpływ ma wielkość $n(-\log h)$. Stawia to pod znakiem zapytania możliwość stosowania transmitancji $\bar{G}(z)$ do opisu i projektowania układów dyskretnych przy małych h , szczególnie dla obiektów wyższego rzędu.

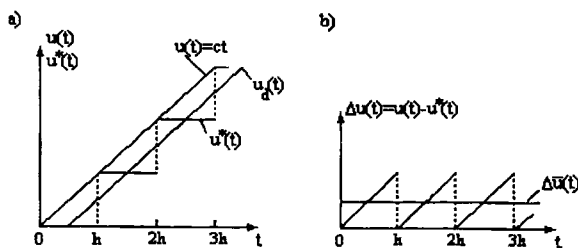
3 Modele przybliżone

Jednym ze sposobów ominięcia opisanych w poprzednim rozdziale trudności jest stosowanie opisu i projektowania metodami czasu ciągłego. W tym celu będziemy stosować dwa typy modeli przybliżonych: model ciągły układu dyskretnego i model dyskretny układu ciągłego. Pierwszy model pozwala zastosować metody projektowania czasu ciągłego a drugi pozwala przejść z otrzymanej tymi metodami wersji ciągłej regulatora na wersję dyskretną realizowaną za pomocą mikroprocesora.

3.1 Model ciągły układu dyskretnego

Rozważmy dwa układy, pierwszy jest obiektem ciągłym opisanym za pomocą transmitancji $G(s)$ (Rys. 1a) i drugi złożony z elementu próbkującego o okresie h , ekstrapolatora zerowego rzędu EO i obiektu ciągłego $G(s)$ (Rys. 1b). O transmitancji $G(s)$ zakładamy tylko to, że $G(jw) \rightarrow 0$ gdy $w \rightarrow 0$. Drugi układ można opisać za pomocą transmitancji dyskretniej $\bar{G}(z)$.

Porównajmy odpowiedzi obu układów na sygnał wejściowy $u(t) = ct$, $c = \text{const}$. Niechaj $u^*(t)$ oznacza wyjście ekstrapolatora EO i niech $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$. Wykresy sygnałów $u(t)$, $u^*(t)$ i $\Delta u(t)$ są pokazane na Rys. 2 a i b. Różnicę $\Delta u(t)$ można przedstawić w postaci następującego szeregu Fouriera



Rys. 2 a) Sygnały wejściowe; b) różnica sygnałów.

$$\Delta u(t) = c \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi}{h} t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{h} t + \dots \right) \quad (7)$$

Jeżeli h jest dostatecznie małe wtedy $|G(j\frac{2\pi}{h}l)|$, $l = 1, 2, \dots$ są małe i składowe harmoniczne występujące w (7) są tłumione po przejściu przez G . Oznaczając przez $\Delta \bar{u}(t)$ wartość średnią za okres h przebiegu $\Delta u(t)$ oraz uwzględniając to, że $c = \dot{u}(t)$ otrzymujemy z (7)

$$\Delta \bar{u}(t) = \frac{h}{2} c = \frac{h}{2} \dot{u}(t) \quad (8)$$

Można zauważyć, że odpowiedź układu $G(s)$ na sygnał (8) dla małego h określa w przybliżeniu sygnał $\Delta y(t) = y(t) - y_1(t)$. Wprowadzając oznaczenia $\Delta \bar{U}(s) = \mathcal{L}[\Delta \bar{u}(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1(t)]$, $\Delta Y(s) = Y(s) - Y_1(s)$, gdzie $\mathcal{L}$ oznacza symbol transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$\Delta Y(s) \approx \Delta \bar{Y}(s) = G(s) \Delta \bar{U}(s) = G(s) \frac{h}{2} s U(s) = \frac{h}{2} s Y(s) \quad (9)$$

$$Y_1(s) \approx G_d(s) U(s), \quad G_d(s) = (1 - \frac{h}{2} s) G(s) \quad (10)$$

Przybliżone zależności (9) i (10) są tym dokładniejsze im bardziej są tłumione przez G składowe sinusoidalne szeregu (7). Zauważmy, że zależności te obowiązują nie tylko dla $u(t) = ct$ ale także dla dowolnych $u(t)$ dla których zmiana pochodnej $\dot{u}(t)$ za okres $(t-h, t)h$ jest pomijalnie mała.

Zależność (10) określa oryginalny przybliżony model ciągły w postaci transmitancji $G_d(s)$ dla układu dyskretnego z Rys. 1b.

Inny model ciągły przybliżony układu dyskretnego z Rys. 1b można wyprowadzić zauważając, że średnia za okres $(t-h, t)$ wartość sygnału $u^*(t)$ oznaczana przez $\bar{u}^*(t)$ spełnia zależność $\bar{u}^*(t) = u(t - \frac{h}{2})$. Otrzymujemy stąd

$$Y_1(s) \approx G_e(s)U(s), \quad G_e(s) = G(s)e^{-\frac{hs}{2}} \quad (11)$$

Dokładniejsze uzasadnienie modelu (11) można znaleźć już w literaturze z lat sześćdziesiątych [6], a możliwość jego zastosowań zauważona jest również w aktualnej literaturze [1].

Oba modele przybliżone wynikają z modyfikacji transmitancji $G(s)$; $G_d(s)$ jest zmodyfikowana przez pochodną, a $G_e(s)$ - przez opóźnienie. Można zauważyć, że $G_d(s)$ wynika z $G_e(s)$ jeżeli w tym ostatnim rozwinieśmy funkcję $\exp(-hs/2)$ w szereg i uwzględnimy tylko pierwszy wyraz rozwinięcia.

3.2 Model dyskretny regulatora ciągłego

Dany układ ciągły opisany transmitancją wymierną $R(s)$ można aproksymać opisem dyskretnym na wiele sposobów. W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać tzw. aproksymację Tustina, w której model dyskretny w postaci transmitancji dyskretniej $\bar{R}(z)$ układu ciągłego $R(s)$ wynika ze wzoru

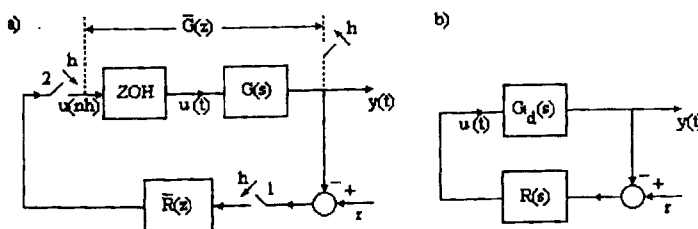
$$\bar{R}(z) = R\left(\frac{2z-1}{hz+1}\right) \quad (12)$$

Można pokazać [7] że model (12) wynika z tzw. trapezowej aproksymacji całkowania.

Oczywiście dokładność aproksymacji zależy od stosunku częstotliwości próbkowania do maksymalnej częstotliwości widma sygnału wejściowego. Im większy ten stosunek tym większa dokładność aproksymacji. W proponowanej dalej metodzie projektowania odpowiednia wartość tego stosunku wynika z poczynionego tam założenia dotyczącego tzw. częstotliwości określającej pasmo przenoszenia.

3.3 Model ciągły układu z regulatorem dyskretnym

Rozważmy układ dyskretny pokazany na Rys. 3a składający się z obiektu ciągłego o transmitancji $G(s)$, ekstrapolatora zerowego rzędu EO, regulatora o transmitancji dyskretniej $\bar{R}(z)$ i dwóch synchronicznych elementów próbkujących o okresie próbkowania h . W realizacji praktycznej próbkowanie elementu 2 odpowiadające przetwornikowi cyfrowo-analogowemu jest nieco opóźnione w stosunku do próbkowania elementu 1 odpowiadającego przetwornikowi analogowo-cyfrowemu. Opóźnienie to jest przeznaczone na wyznaczenie nowej wartości sterowania $u(kh)$ po otrzymaniu nowej wartości pomiaru $y(kh)$ i w rozważanym modelu pomijamy je.



Rys. 3 a) Zamknięty układ dyskretny; b) - jego model ciągły.

Przedstawiony na Rys. 3b model ciągły jest modelem układu dyskretnego z Rys. 3a jeżeli transmitancja $G_d(s)$ jest związana z $G(s)$ zgodnie z wzorem (10) a transmitancja $\bar{R}(z)$ wynika z aproksymacji Tustina (12) transmitancji $R(s)$. Zamiast modelu $G_d(s)$ można również używać model $G_e(s)$, który jest określany za pomocą transmitancji z opóźnieniem (niewymiernej) co jednak prowadzi do zwiększenia trudności projektowania.

Dodatkowym warunkiem jest odpowiedni stosunek częstotliwości próbkowania do częstotliwości określającej pasmo przenoszenia. Niechaj ω_g oznacza częstotliwość określającą pasmo przenoszenia modelu układu z Rys. 3b, mamy zatem $|G_d(j\omega)R(j\omega)| < 1$ (lub $|G_e(j\omega)R(j\omega)| < 1$) dla $0 \leq \omega < \omega_g$. Omawiane modele obowiązują dla małych h , dla których sygnał o częstotliwości próbkowania i wyższej jest dostatecznie tłumiony przez G . Orientacyjnie zachodzi to wtedy gdy częstotliwość próbkowania $\omega_s = 2\pi/h$ jest w przybliżeniu nie mniej niż dziesięć razy większa niż ω_g . To zalecenie wynika z dotychczasowych rozważań, jak również z przeprowadzonych badań numerycznych. Jest ono zgodne z zaleceniem określającym częstotliwość próbkowania znajdującym się w [7, str. 461]. Przy spełnieniu tego warunku będziemy uważali że układ z Rys. 3b z obiektem $G_d(s)$ (lub $G_e(s)$) jest modelem ciągłym układu dyskretnego z Rys. 3a. Oznacza to, że odpowiednie charakterystyki czasowe i częstotliwościowe omawianych układów są zbliżone do siebie.

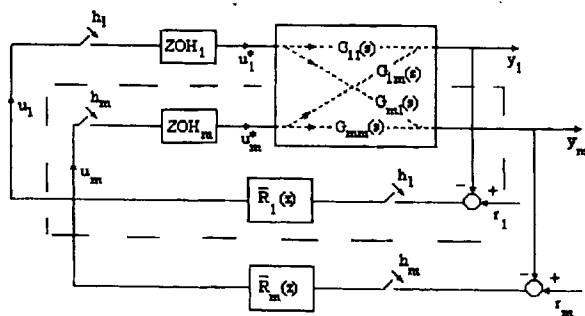
Ponieważ model z pochodną jest prostszy, jest on zalecany w przypadku obiektów bez opóźnienia. Nie trudno zauważyć, że proponowana metoda może być również stosowana dla przypadku obiektu z opóźnieniem. W tym przypadku stosowanie modelu z opóźnieniem wydaje się bardziej właściwe.

4 Projektowanie dyskretnych układów wielowymiarowych

Rozważmy układ wielowymiarowy dyskretny w czasie pokazany na Rys. 5 złożony z ciągłego wielowojściowego i wielowojściowego obiektu opisanego transmitancją macierzową

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s), & \dots & G_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{m1}(s), & \dots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (13)$$

i z m sprzężeń zwrotnych zawierających elementy próbkujące z różnymi okresami próbkowania h_i , eksrapolatory zerowego rzędu EO_i oraz regulatory dyskretnie opisane transmitancjami $\bar{R}_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Różne okresy próbkowania zastosowane w różnych sprzężeniach mogą wynikać z różnych prędkości przebiegów jak również z ograniczeń elementów pomiarowych i przetworników analogowo-cyfrowych.



Rys. 4 Układ wielowymiarowy dyskretny z różnymi okresami próbkowania

Można pokazać że rozważany układ jest liniowy, ale niestacjonarny i w związku z tym nie da się

opisać za pomocą transmitancji macierzowej. Stwarza to poważne trudności w projektowaniu takich układów metodami czasu dyskretnego.

Zakładamy, że w układzie z Rys. 4 wejście u_i obiektu jest odpowiednio dobrane do wyjścia y_i , $i = 1, 2, \dots, m$, tak że oba występują w i -tym sprzężeniu zwrotnym. Inaczej mówiąc zakładamy, że problem doboru sygnału regulującego u_j do sygnału regulowanego y_i został już rozstrzygnięty przy wykorzystaniu różnych przesłanek (wzmocnienie i stałe czasowe poszczególnych kanałów, oraz ewentualnie inne przesłanki wynikające z fazy tworzenia modelu obiektu). Ponieważ cały układ nie może być opisany za pomocą macierzowej transmitancji dyskretniej uzasadnione jest wykorzystanie omówionego poprzednio modelu ciągłego, dla opisu poszczególnych kanałów obiektu z uwzględnieniem różnych okresów próbkowania. Dzięki temu można zaproponować następujący algorytm projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych.

4.1 Algorytm projektowania

1. Dla danej transmitancji $G_{ij}(s)$ ij -tego kanału obiektu i przyjętego okresu próbkowania h_j należy utworzyć transmitancję zmodyfikowaną przez pochodną $G_{ij}^d(s) = (1 - h_j s/2)G(s)$ (lub przez opóźnienie $G_{ij}^z(s) = \exp(-h_j s/2)G(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$).
2. Wykorzystując jedną ze znanych metod projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych znajdujemy transmitancje $R_j(s)$ regulatorów ciągłych dla obiektu opisanego przez transmitancje $G_{ij}^d(s)$ (lub $G_{ij}^z(s)$).
3. Sprawdzamy czy okresy próbkowania h_j są dostatecznie małe tzn. czy częstotliwość próbkowania $\omega_j = 2\pi/h_j$ jest około dziesięć razy większa od częstotliwości określającej częstotliwość pasma przenoszenia ω_j^* j -tej pętli sprzężenia; jeżeli nie to zmniejszamy okres h_j i powtarzamy kroki 1 i 2.
4. Transmitancje regulatorów dyskretnych poszczególnych pętli $\bar{R}_j(z)$ wynikają z aproksymacji Tustiniana transmitancji $R_j(s)$, czyli

$$\bar{R}_j(z) = R_j \left(\frac{2}{n} \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (14)$$

Częstotliwość pasma przenoszenia j -tej pętli ω_j^* obliczamy biorąc pod uwagę transmitancję obiektu zastępczego G_j^* wiążącą wyjście $Y_j(s)$ z wejściem $U_j(s)$ obiektu i wyprowadzoną przy uwzględnieniu pozostałych $m-1$ pętli zamkniętych. Dalej zostanie to objaśnione dokładniej i stanie się zrozumiałe po przedstawieniu przykładu.

Uwaga. Ażeby wybrać odpowiednie okresy próbkowania h_j zapewniające spełnienie warunku $\omega_j \gtrsim 10\omega_j^*$ najpierw można określić częstotliwość $\omega_j^{*'}$ pasma przenoszenia dla układu z regulatorami $R_j'(s)$ zaprojektowanymi dla obiektu $G(s)$. Następnie można przyjąć, że $\omega_j^* \approx \omega_j^{*'}$ i określić h_j .

W opisanym algorytmie projektowania wykorzystuje się dowolną metodę projektowania wielowymiarowych układów ciągłych. W następnym rozdziale opiszemy oryginalną metodę projektowania takich układów.

5 Projektowanie ciągłych układów wielowymiarowych

Rozważmy teraz wielowymiarowy układ ciągły powstający z układu pokazanego na Rys. 4 jeżeli w tym ostatnim nie występują elementy próbkujące i ekstrapolatory, a w miejsce regulatorów dyskretnych $\bar{R}_j(z)$ występują regulatory ciągłe $R_j(s)$. Opiszemy teraz oryginalną metodę projektowania regulatorów $R_j(s)$ dla tych układów polegającą na sukcesywnym stosowaniu metody projektowania regulatora dla

obiekty o jednym wejściu i jednym wyjściu. Proponowane podejście polega na repetycyjnej procedurze, w której regulator $R_j(s)$ j -tej pętli jest projektowany dla obiektu zastępczego o jednym wejściu u_j i jednym wyjściu y_j powstającego z uwzględnienia pozostałych pętli zamkniętych (tych, które już mają zaprojektowane w poprzednich krokach regulatory).

Tak więc najpierw jest projektowany regulator $R_1(s)$ dla obiektu $G_{11}(s)$, pozostałe pętle są otwarte gdyż nie mają one jeszcze zaprojektowanych regulatorów. Drugi regulator $R_2(s)$ projektujemy dla jednowymiarowego obiektu zastępczego powstającego z uwzględnienia pierwszej pętli zamkniętej i pozostałych otwartych; trzeci $R_3(s)$ - dla zastępczego obiektu uwzględniającego dwie pierwsze pętle zamknięte a pozostałe otwarte; ostatni m -ty regulator $R_m(s)$ dla obiektu zastępczego uwzględniającego wszystkie pozostałe pętle zamknięte.

Następnie powtarzamy procedurę projektowania rozpoczynając od pierwszej pętli i projektując regulator $R_j(s)$ j -tej pętli, $j = 1, 2, \dots, m$ dla obiektu zastępczego jednowymiarowego wynikającego z uwzględnienia pozostałych pętli zamkniętych z regulatorami zaprojektowanymi w ostatnich $m-1$ krokach. Jeżeli potrzeba powtarzamy procedurę projektowania aż dalsze kroki nie dają poprawy sterowania.

Należy podkreślić, że proponowana procedura projektowania jest zazwyczaj szybko zbieżna. Wynika to z faktu, że zmiana regulatora $R_j(s)$ j -tej pętli wpływa głównie na charakterystyki otwartej j -tej pętli wykorzystywane przy projektowaniu. Charakterystyki pozostałych kolejno otwieranych pętli są znacznie mniej zależne od tej zmiany, gdyż dla nich j -ta pętla jest zamknięta a więc zazwyczaj mało wrażliwa na zmianę parametrów.

Regulator $R_j(s)$ określamy stosując dowolną metodę projektowania układów jednowymiarowych. Jedną z zalecanych jest metoda bazująca na charakterystykach częstotliwości i kryterium M_{max} które jest stosowane w opisanym dalej przykładzie. Regulator $R_j(s)$ powinien być zaprojektowany tak, że $M_{max} \approx 1.3$ gdzie M_{max} jest równe maksimum modułu charakterystyki amplitudy zamkniętego układu.

6 Przykład

Rozważmy układ dyskretny o dwóch zmiennych regulowanych pokazany na Rys. 5 w którym transmitancja macierzowa obiektu przyjmuje postać

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s(s+1)}, & \frac{7}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{5}{s(s+1)}, & \frac{7}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Celem rozważań jest zaprojektowanie transmitancji $\bar{R}_1(z)$ i $\bar{R}_2(z)$ które określają algorytmy regulatorów dyskretnych w obu pętlach.

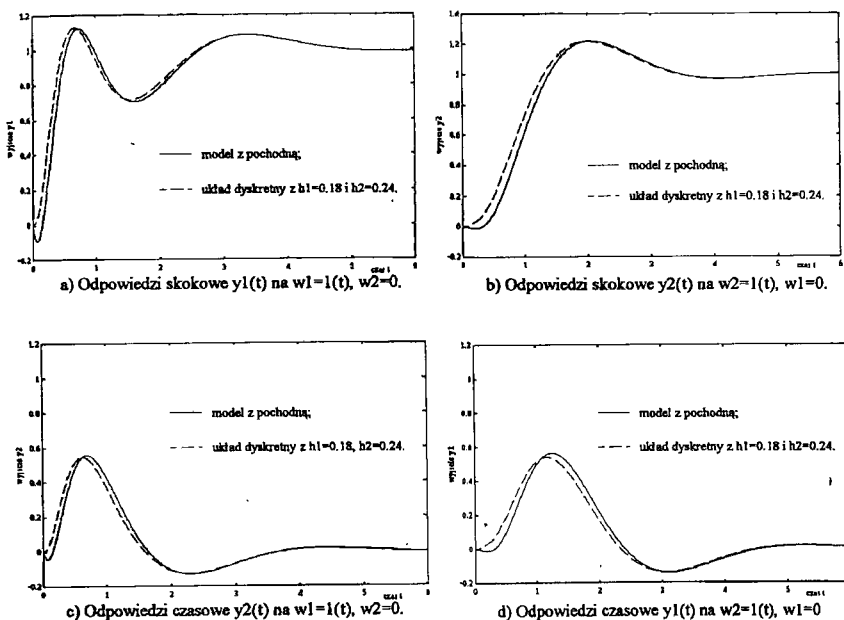
Po wstępnych próbach w których brano pod uwagę prędkości przebiegów obu pętli przyjęto $h_1 = 0.18$ i $h_2 = 0.24$. Zatem dla obiektu otrzymujemy następujący model z pochodną

$$G^d(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.9s+10}{s(s+1)}, & \frac{-0.84s+7}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-0.45s+5}{s(s+1)}, & \frac{-0.84s+7}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Najpierw projektujemy regulatory ciągłe $R_j(s)$, $j = 1, 2$, za pomocą metody opisaną w poprzednim rozdziale. W pierwszym kroku projektujemy regulator $R'_1(s)$ dla obiektu $G_{11}^d(s)$; druga pętla jest otwarta ponieważ nie ma jeszcze zaprojektowanego regulatora. W drugim kroku projektujemy regulator $R'_2(s)$ dla obiektu zastępczego (z wejściem u_2 i wyjściem y_2 oraz zamkniętą pierwszą pętlą zawierającą regulator $R'_1(s)$) opisanego transmitancją

$$G_2^*(s) = G_{22}^d - G_{12}^d \frac{R'_1}{1 + R'_1 G_{11}^d} G_{21}^d \quad (17)$$

W trzecim kroku projektujemy regulator $R''_1(s)$ dla obiektu zastępczego opisanego transmitancją



Rys. 5 Przebiegi czasowe w obu pętlach dla zaprojektowanego układu dwuwymiarowego.

$$G_1^*(s) = G_{11}^d - G_{21}^d \frac{R_2'}{1 + R_2' G_{22}^d} G_{12}^d \quad (18)$$

W czwartym kroku projektujemy regulator $R_2''(s)$ dla obiektu zastępczego $G_2^{*'}(s)$ (określonego przez (17) z R_1' zastąpionym przez R_1''). Jednakże dla rozważanej klasy regulatorów opisanych transmitancją wymierną pierwszego rzędu w czwartym kroku nie otrzymujemy już istotnej poprawy. Ostatecznie otrzymujemy regulatory $R_1(s) = R_1''(s)$ i $R_2(s) = R_2'(s)$ w postaci

$$R_1(s) = 0.4 \frac{0.8s + 1}{0.1s + 1}, \quad R_2(s) = \frac{2.6}{s} \quad (19)$$

Częstotliwości określające pasma przenoszenia obu pętli z odpowiednimi obiektami zastępczymi są $\omega_1^* = 3.57$ i $\omega_2^* = 1.27$. Ponieważ $\omega_1 = 2\pi/0.18 = 34.9$ i $\omega_2 = 2\pi/0.24 = 26.1$ więc $\omega_1/\omega_1^* = 9.78$ i $\omega_2/\omega_2^* = 20.55$. Transmitancje regulatorów dyskretnych otrzymujemy z aproksymacji Tustina transmitancji (31) co daje

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(z) &= \frac{1.873684(z - 0.7977528)}{z - 0.05263158}, \\ R_2(s) &= \frac{0.312(z + 1)}{z - 1} \end{aligned} \quad (20)$$

Na Rys. 5 a i b pokazano odpowiedzi na skok jednostkowy wartości zadanych poszczególnych pętli a na Rys. 5 c i d - przebiegi wynikające z interakcji dla modelu ciągłego określonego przez (16) i (19). Przebiegi te porównano z układem dyskretnym opisanym przez (15) i (20). Ponieważ dla układu dyskretnego nie istnieje opis w postaci transmitancji omawiane przebiegi wyznaczono przy wykorzystaniu programu SIMULINK. Widać że przebiegi modelu ciągłego i układu dyskretnego są bardzo do siebie zbliżone.

7 Uwagi o niektórych programach

W przypadku układów wielowymiarowych o wielu zmiennych regulowanych wyznaczenie transmitancji obiektu zastępczego jednowymiarowego G_j^* ; $j = 1, 2, \dots, m$ może być bardzo pracochłonne. Można jednak korzystać z niektórych programów. Jeżeli znamy wzory określające G_j^* typu (17), (18) to możemy skorzystać z Programu CC, który umożliwia wyznaczenie G_j^* bezpośrednio z zapisanych wzorów.

Jeżeli nie chcemy wyprowadzać wzorów (co też może być pracochłonne) to możemy korzystać z programu MATLAB-SIMULINK. W tym celu, najpierw korzystając z programu SIMULINK układamy schemat blokowy symulujący model ciągły układu. Następnie przerywamy j-tą pętlę zaznaczając wejście u_j i wyjście y_j odpowiednio za pomocą bloków "inport", i "outport" i nazywamy dowolnie schemat, np. "trans-j.m". Kolejno stosujemy trzy następujące funkcje MATLAB-a: $[A, B, C, D] = \text{linmod}('trans - j')$, $[num, den] = \text{ss2tf}(A, B, C, D)$, $[L, M] = \text{mineral}(num, den)$, które wyznaczają wektory L i M określające współczynniki wielomianów odpowiednio licznika i mianownika transmitancji G_j^* - bez wyprowadzania wzorów.

Ostrzeżenie. W przypadku występowania w symulującym schemacie blokowym elementu z opóźnieniem wymienione funkcje MATLAB-a dają wynik niepoprawny bez żadnego ostrzeżenia! Dla tego przypadku autor niniejszej pracy ułożył program MATLAB-a wyznaczający odpowiednie przydatne do projektowania charakterystyki częstotliwościowe reprezentujące G_j^* .

Przy okazji warto jeszcze omówić niektóre potknięcia występujące w programach. Przy projektowaniu układów dyskretnych często wyznacza się transmitancje dyskretne dla części układu złożonej z elementu próbkującego, ekstrapolatora i obiektu ciągłego. Program CC zawiera rozkaz "convert" pozwalający obliczać transmitancję dyskretną dla danej transmitancji ciągłej w dziesięciu różnych wersjach. Dla nas interesujące są wersje nr 7, 8 i 9 odnoszące się do układów odpowiednio z impulsatorem idealnym, ekstrapolatorem zerowego rzędu i ekstrapolatorem pierwszego rzędu: Otóż w pewnych przypadkach omawiany rozkaz wyznacza transmitancje dyskretne, które zastosowane do opisu układów zamkniętych prowadzą do niepoprawnego opisu układu. Dla przypadków odpowiadających wersjom 8 i 9 występuje to wtedy gdy transmitancja ciągła obiektu jest wymierna i ma stopień licznika równy stopniowi mianownika. Skokowa zmiana wejścia dla takiego obiektu wywołuje skokową zmianę (nieciągłość) wyjścia i przy obliczaniu transmitancji dyskretnej powstaje problem którą granicę lewo czy prawo stronną uwzględnić w chwili nieciągłości element próbkujący. Prowadzi to do rozróżnienia dwóch różnych transmitancji dyskretnych, odpowiednio przyczynowej i nieprzyczynowej [4]. Otóż program CC wyznacza transmitancje nieprzyczynowe a do opisu układu zamkniętego potrzebne są zazwyczaj transmitancje przyczynowe nie wyznaczane w programie CC.

Dla wersji 7 rozkazu "convert" poczynione tutaj uwagi mają miejsce gdy transmitancja ciągła ma stopień licznika o jedność mniejszą od stopnia mianownika. Należy podkreślić że dla tego przypadku poprawne podejście prowadzące do transmitancji przyczynowej przedstawił S. Węgrzyn już w 1960 r. w pracy [9].

Należy podkreślić, że również w MATLAB-ie problem transmitancji przyczynowych nie został zauważony.

I jeszcze warto zauważyć, że Program CC, a w szczególności podręcznik użytkownika [12] poświęca stosunkowo dużo miejsca opisowi i analizie układów dyskretnych z różnymi częstotliwościami próbkowania. Do przedstawionych tam przykładów opisu i analizy układów zamkniętych należy jednak podchodzić ostrożnie, gdyż bazują one na istnieniu transmitancji, co nie we wszystkich rozważanych tam przypadkach ma miejsce.

8 Uwagi końcowe

W przypadku stosunkowo dużych częstotliwości próbkowania transmitancje dyskretne bazujące na transformacji Z mają niekorzystne własności, np. wymagają długiego słowa cyfrowego do zapisu

występujących w nich współczynników. Jednym ze sposobów uniknięcia występujących trudności zaproponowanym w niniejszej pracy jest stosowanie oryginalnego, przybliżonego modelu ciągłego i dowolnej metody projektowania układów ciągłych.

Zaproponowana metoda ma tę zaletę, że jest prosta i można ją zastosować do zaprojektowania regulatora dyskretnego nawet bez bliższej znajomości zasad opisu układów dyskretnych. Prostota metody umożliwia powtórzenie projektowania dla różnych okresów próbkowania i wybór najbardziej odpowiedniego okresu. Korzyści są wyraźnie widoczne dla układów z wieloma regulatorami dyskretnymi pracującymi z różnymi częstotliwościami próbkowania, niekoniecznie synchronicznie. W tym przypadku zastosowanie metod opisu układów dyskretnych napotyka na duże trudności. Metoda może być również stosowana do układów z opóźnieniem.

Chociaż metoda szczególnie nadaje się dla dużych częstotliwości próbkowania, to daje ona również dobre rezultaty dla zalecanych w literaturze [7] częstotliwości próbkowania wynikających z pasma przenoszenia układu. Uwzględniając powyższe wydaje się, że z punktu widzenia inżynierskiego metoda może mieć istotne znaczenie.

Uzupełnieniem powyższych rozważań jest opracowana także oryginalna metoda projektowania wielowymiarowych układów ciągłych, z oddzielnymi regulatorami w poszczególnych pętlach regulacji. Metoda polega na kolejnym projektowaniu regulatorów w poszczególnych pętlach dla obiektu zastępczego z jednym wejściem i jednym wyjściem, wynikającego z uwzględnienia pozostałej części układu z zamkniętymi pętlami regulacji. W ten sposób układ wielowymiarowy jest projektowany przez wielokrotne stosowanie dowolnej metody projektowania układu jednowymiarowego.

Literatura

1. Franklin, G. F., J. D. Powell and A. Emami Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3-rd ed. Reading, MA, Addison Wesley, 1994.
2. Gessing, R., About Properties of Discrete-Time Transfer Functions for Small Sampling Periods. *Proceedings of 2-nd European Control Conference*, June 29-July 1, 1993, 1699-1702;
3. Gessing, R., Comments on "A Modification and the Tustin Approximation" with a Concluding Proposition. *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 40, no. 5, 1995, pp. 942-944.
4. Gessing, R., Causal and Noncausal Discrete-Time Transfer Functions and Their Applications. *Inf. J. Control* (w druku).
5. Keller, J.P., and Anderson, B.D.O., A New Approach to the Discretization of Continuous-Time Controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.37 No 2, 1992, pp.214-223;
6. Kuzin, L.T., *Opis i projektowanie układów dyskretnych*, Moskwa, 1962, (po rosyjsku);
7. Middleton, R.H., and Goodwin, G.C., *Digital Control and Estimation, A Unified Approach*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall 1990;
8. Rattan, K.S., Digitalization of Existing Continuous Control Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.AC-29, 1984, pp.282-285.
9. Węgrzyn, S., Différentes transformées en z de l'échelon unitaire et leurs applications dans l'analyse des systèmes pulsés. *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences* Vol. VIII, No. 6, 1960
10. MATLAB ver. 4.2c.1. *User's Guide - For Microsoft Windows* The Math. Works Inc., 1993
11. SIMULINK ver. 1.3. *Dynamic System Simulation Software User's Guide*, The Math. Works Inc., 1993.
12. Program CC. *Tutorial and User's Guide*. System Technology Inc. California, 1991.