

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE PROJEKTOWANIA SYSTEMÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

dr inż. Zbigniew Zajda

Instytut Cybernetyki Technicznej

Politechniki Wrocławskiej

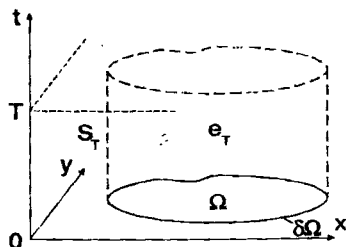
(projekt nr 8 8510 92 03)

Omówiono procedury numeryczne wspomagające badania symulacyjne procesów o parametrach rozłożonych opisywanych nieliniowym równaniem typu przewodzenia ciepła z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Przedstawiono procedury pozwalające na wprowadzanie danych w języku naturalnym, wprowadzanie kształtu obszaru w postaci graficznej oraz wspomagające proces wyboru schematu różnicowego i kroków dyskretyzacji.

1. WPROWADZENIE W PROBLEMATYKĘ APROKSYMACJI RÓŻNICOWEJ ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH

Modelem matematycznym wielu procesów fizycznych są dwuwymiarowe zagadnienia graniczne dla równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu z równaniem typu przewodzenia ciepła. Zarówno stan obiektu jak i wymuszenia określone są w pewnym podzbiorze obszaru przestrzennego R^2 oraz na pewnym odcinku czasowym $[0, T] \subset R^+$. Rozpatrujemy trójwymiarową czasoprzestrzeń R^{2+1} , w której dany jest obszar walcowy Θ_T :

$$\Theta_T = \Omega \times [0, T] = \{(x, y, t) : x, y \in \Omega \subset R^2, t \in [0, T] \subset R^+\}$$



Rys. 1.1 Trójwymiarowa czasoprzestrzeń z
obszarem walcowym Θ_T .

Rozważane liniowe dwuwymiarowe równanie różniczkowe cząstkowe typu przewodzenia ciepła, określone w czasoprzestrzeni Θ_T ma postać:

$$b(x, y, u, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y, u, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y, u, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right] + f(x, y, u, t) \quad (1.1)$$

przy czym : $u(x,y,t)$ - funkcja stanu obiektu, x,y,t - zmienne niezależne : geometryczne i czasowa,
 $f(x,y,u,t)$ - funkcja wymuszająca, $a(x,y,u,t)$, $b(x,y,u,t)$ - parametry określające własności ośrodka w
 którym zachodzi rozpatrywany proces, ze względu na ich sens fizyczny, muszą one spełniać
 następujące warunki :

$$\forall t \in [0, T], a(x,y,u,t) > 0 \wedge b(x,y,u,t) > 0;$$

W celu stworzenia jednoznacznego opisu obiektu należy oprócz równania podać warunki
 pomocnicze, które są określone przez kształt obszaru przestrzennego, jego własności fizyczne
 $\{a(x,y,u,t), b(x,y,u,t)\}$ oraz przez warunki graniczne, do których należą: warunki początkowe określające stan procesu dla wszystkich punktów wewnętrznych obszaru w chwili początkowej ($t = 0$)

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad (1.2)$$

oraz warunki brzegowe określające stan procesu jedynie na granicy obszaru Ω

$$u|_{(x,y) \in \partial\Omega} = u_g(x,y,t). \quad (1.3)$$

Większość zagadnień opisanych równaniem różniczkowym (1.1) nie posiada analitycznego rozwiązania. Najstarszą z numerycznych metod rozwiązywania takich zagadnień jest metoda różnic skończonych. Wymaga ona by obszar ciągłej zmiany zmiennych niezależnych zastąpiony został dyskretnym zbiorem węzłów (siatką), natomiast ciągła funkcja stanu $u(x,y,t)$ zastąpiona została funkcją dyskretnych zmiennych niezależnych, określoną w węzłach siatki $u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k)$ -funkcją siatkową. Poprzez zastąpienie pochodnych w równaniu różniczkowym ilorazami różnicowymi oraz dyskretyzację warunków brzegowych i początkowych przechodzi się od zagadnienia granicznego dla równania różniczkowego do układu równań algebraicznych (równań różnicowych) zwanego schematem różnicowym. Najczęściej do zastąpienia ciągłego obszaru Θ_T dyskretnym zbiorem węzłów wykorzystuje się siatkę regularną, składającą się z prostopadłościanów utworzonych przez zbiór wzajemnie przecinających się płaszczyzn równoległych do płaszczyzn wyznaczonych osiami układu współrzędnych, tzn. do płaszczyzn xO_t , yO_t , xO_y . Punkty otrzymane z przecięcia się wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (wierzchołki zbioru elementarnych sześcianów), a zawarte w czasoprzestrzeni Θ_T nazywa się węzłami siatki. Odległości między sąsiednimi węzłami siatki w kierunkach x i y (tzw. kroki przestrzenne) przyjmuje się najczęściej stałe :

$$(x_i, y_j, t_k) - (x_{i-1}, y_j, t_k) = (x_{i+1}, y_j, t_k) - (x_i, y_j, t_k) = h_x \quad (1.4)$$

$$(x_i, y_j, t_k) - (x_i, y_{j-1}, t_k) = (x_i, y_{j+1}, t_k) - (x_i, y_j, t_k) = h_y \quad (1.5)$$

Zbiory węzłów siatki leżących na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xOy nazywamy warstwami czasowymi. Odległość pomiędzy warstwami czasowymi wyznacza wartość parametru τ (tzw. krok czasowy):

$$(x_i, y_j, t_k) - (x_i, y_j, t_{k-1}) = (x_i, y_j, t_{k+1}) - (x_i, y_j, t_k) = \tau \quad (1.6)$$

Następnym etapem przechodzenia od ciągłego zagadnienia brzegowego do dyskretnego zagadnienia różnicowego jest przyjęcie schematów różnicowych czyli zależności arytmetycznych pomiędzy wielkościami u_{ij} oraz h_x , h_y i τ [3].

W wyniku wyboru schematu niejawnego, dla każdego węzła wewnętrznego siatki otrzymuje się równanie zawierające jako niewiadome wartości funkcji siatkowych w węzłach sąsiednich oraz w węzle o tych samych współrzędnych przestrzennych, ale w poprzedniej chwili czasowej. Aby obliczyć rozwiązanie różnicowego zagadnienia granicznego należy dla każdej warstwy czasowej rozwiązać układ równań algebraicznych. Ilość niewiadomych jest równa ilości węzłów wewnętrznych siatki, Macierz współczynników zawiera bieżące parametry obszaru, zaś macierz prawych stron - warunki początkowe i brzegowe dla pierwszej warstwy czasowej oraz warunki brzegowe i wartości funkcji siatkowej z poprzedniej warstwy czasowej, dla następnych warstw czasowych.

2. WPROWADZANIE DANYCH.

Przygotowanie badań symulacyjnych procesu o parametrach rozłożonych metodą różnic skończonych może być zadaniem pracochłonnym. Pomijając nawet tak istotne elementy jak budowa modelu matematycznego procesu oraz przygotowanie komputerowych procedur obliczeniowych pozostaje problem, który można nazwać krótko - wprowadzeniem danych. Na wprowadzenie danych składają się:

- *wprowadzenie granic obszaru przestrzennego*,
(współrzędne początku i końca odcinka - dla zadań o jednym wymiarze przestrzennym ale współrzędne wszystkich punktów granicznych dla obszaru nieregularnego dla zadań o więcej niż jednym wymiarze przestrzennym),
- *dyskretyzacja obszaru*,
(wprowadzenie kroków dyskretyzacji czyli 2...4 liczb, gdy przyjmie się siatkę regularną, aż do podania odległości między wszystkimi parami węzłów sąsiednich)
- *wprowadzenie fizycznych własności obszaru (współczynników równania)*,
(od jednej liczby na jednym parametr, aż po komplet wartości parametrów na każdy węzeł siatki),

- wprowadzenie warunków początkowych i brzegowych,
(od jednej liczby na każdy warunek, aż po wartość w każdym węźle granicznym czasoprzestrzeni),
- numerowanie węzłów wewnętrznych i przygotowanie macierzy współczynników,
(od bezproblemowego w zadaniach o jednym wymiarze przestrzennym, po nieco trudniejsze w zadaniach dwu- i trójwymiarowych w obszarach nieregularnych).
- wybór metody obliczeniowej (schematu różnicowego).
(bezproblemowy, gdy program obliczeniowy nie daje wyboru, gorzej gdy daje lub można wybierać między programami)

Celem pracy było opracowanie procedur komputerowych wspomagających badacza w jego zmaganiach z tak pojętym problemem wprowadzania danych.

3. WPROWADZANIE KSZTAŁTU OBSZARU

Procedura wprowadzania kształtu obszaru stanowi część programu ANGRAF 3.0 służącego do symulowania procesów opisanych równaniami liniowymi i zachodzących w obszarach nieregularnych o zmiennych wartościach parametrów, z wymuszeniami ciągłymi i/lub punktowymi. Kształt obszaru wprowadzany jest graficznie i może być składany z zadawanych parametrycznie odcinków linii prostych, okręgów i łuków lub też dowolny, wprowadzany za pomocą myszy lub klawiatury (klawiszy ruchu kursora). Tak wprowadzony obszar może być nieciągły. Komplikuje to zadanie kontroli wprowadzonego obszaru pod względem ciągłości brzegu. Problem ten rozwiązano poprzez konieczność potwierdzenia przez użytkownika programu poprawności wypełnienia konturów obszaru. Wypełnianie obszaru odbywa się z zastosowaniem algorytmu Smitha [1].

Wprowadzenie kształtu obszaru nie jest oczywiście celem samym w sobie – umożliwiła automatyczne zbudowanie układu równań także dla obszaru o skomplikowanym kształcie.

W programie ANGRAF wykorzystano do aproksymacji prosty schemat jawny typu T, który pozwala na zbudowanie dla każdego wewnętrznego węzła siatki równania:

$$\left(1 + 2 \frac{a\tau}{b h_x^2} + 2 \frac{a\tau}{b h_y^2}\right) u_{ij}^{k+1} - \frac{a\tau}{b h_x^2} (u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}) - \frac{a\tau}{b h_y^2} (u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) = u_{ij}^k + \frac{\tau}{b} * f(x_{ij}, y_{ij}, t_k) \quad (3.1)$$

gdzie: u_{ij}^k - wartość funkcji stanu w węźle o pozycji przestrzennej określonej przez parę liczb naturalnych (i,j) , w chwili $t=k\tau$; $a(x,y,t)$, $b(x,y,t)$ - współczynniki wyjściowego równania różniczkowego, h_x , h_y , τ - kroki: przestrzenne i czasowy.

Na podstawie zależności (3.1) otrzymuje się układ równań algebraicznych, którego rozwiązanie określa wartości funkcji stanu u_{ij}^{k+1} dla warstwy czasowej $t_{k+1} = \tau(k+1)$ dla wszystkich węzłów w tej warstwie. Układ ten ma postać:

$$A_{n \times n} * u_{n \times 1} = b_{n \times 1}$$

(3.2)

gdzie : A - macierz kwadratowa współczynników równań postaci (3.9), u - wektor kolumnowy wartości dyskretnej zmiennej stanu, b - wektor kolumnowy parametrów równania różniczkowego (3.1) w przestrzeni dyskretnej uwzględniający warunki graniczne oraz parametry ośrodka $a(x,y,t)$, $b(x,y,t)$ dla odpowiednich węzłów siatki należących do wnętrza rozpatrywanego obszaru, n - ilość równań (ilość węzłów siatki należących do wnętrza obszaru).

Macierz A jest macierzą rzadką o najwyżej pięciu niezerowych elementach w każdym wierszu (wynika to z przyjętego szablonu schematu różnicowego opartego o pięć punktów siatki aproksymacyjnej) i ma strukturę wstęgową. Rozwiązywanie układów równań z tego typu macierzą współczynników za pomocą ogólnych metod algebry liniowej jest kłopotliwe zarówno ze względu na potrzebę przechowywania dużej ilości informacji, jak i ze względu na zbyt dużą liczbę arytmetycznych operacji, których te metody wymagają. Dlatego do rozwiązania powyższego układu równań skorzystano z metody nadrelaksacji [5], wykorzystując zamiast rzadkiej macierzy A macierz gęstą a (wektor kolumnowy), zawierającą jedynie niezerowe elementy macierzy rzadkiej A .

Równocześnie z tworzeniem macierzy gęstej a zawierającej niezerowe współczynniki układu równań (3.2) budowane są dwie macierze pomocnicze wykorzystywane przez metodę nadrelaksacji : JA i $ISTART$ [4]. Kolejne elementy macierzy JA stanowią numery kolumn w macierzy A odpowiadające położeniom w niej niezerowych elementów - czyli kolejnych elementów macierzy a . Wymienione wyżej numery kolumn są zgodne z numerami odpowiednich węzłów siatki, dla których współczynniki równania (3.1) wpisane są do macierzy a . Macierz $ISTART$ zawiera numery elementów macierzy gęstej a stanowiących pierwsze niezerowe elementy w kolejnych wierszach macierzy A .

Na potrzeby omawianej procedury punktom węzłowym sieci nadano następujące statusy :

- "0" - jeżeli węzeł leży poza obszarem;
- "1" - jeżeli węzeł jest punktem wewnętrznym obszaru;
- "2" - jeżeli węzeł jest punktem brzegowym obszaru.

Tworzenie macierzy a polega na analizie każdego węzła sieci o statusie "1". Dla każdego węzła u_{ij}^{k+1} rozpatruje się kolejno węzły $u_{i-1,j}^{k+1}$, $u_{i,j-1}^{k+1}$, $u_{i,j}^{k+1}$, $u_{i,j+1}^{k+1}$, $u_{i+1,j}^{k+1}$. Jeżeli podczas kontroli sąsiada kolejno analizowanego węzła sąsiad ten nie ma statusu "1", do żadnej z macierzy nie jest nic wpisywane i program przechodzi do kontroli następnego sąsiada. Analizę rozpoczyna się od rozpatrzenia sąsiada wzdłuż osi Ox dla pierwszego węzła sieci o statusie "1". Jeżeli kontrola statusu jest pozytywna to do macierzy a wpisywana jest wartość : $a * \tau / b * h_y^2$, a do macierzy JA numer węzła. Po sprawdzeniu sąsiada $u_{i-1,j}^{k+1}$ analogicznie sprawdzany jest węzeł $u_{i,j-1}^{k+1}$ (sąsiad wzdłuż osi Oy) i jeśli kontrola statusu

jest pozytywna, to do macierzy **a** wpisywana jest wartość : $a \tau / b h_x^2$, a jako kolejny element macierzy **JA** numer sprawdzanego sąsiada. Następnie do **a** wpisywana jest wartość współczynnika dla węzła u_{ij}^{k+1} , czyli : $(1 + 2a \tau / b h_x^2 + 2a \tau / b h_y^2)$. Według tej samej zasady sprawdzane są pozostałe węzły sąsiadujące z badanym u_{ij}^{k+1} tj. $u_{i,j+1}^{k+1}$ oraz $u_{i+1,j}^{k+1}$. Po skończonej analizie węzła u_{ij}^{k+1} do macierzy **ISTART** wpisywana jest liczba wszystkich wprowadzonych do tej pory elementów macierzy **a** powiększona o jeden. Powyższa procedura przeprowadzana jest dla wszystkich węzłów o statusie "1". Wartością ostatniego elementu macierzy **ISTART** jest ilość węzłów o statusie "1" powiększona o jeden.

W macierzy **b** znajdują się informacje dotyczące warunków początkowych oraz brzegowych dla kolejno rozpatrywanych punktów węzłowych wewnętrznych oraz brzegowych obszaru, jak również informacje dotyczące funkcji wymuszającej działającej w tych punktach. Tworzenie macierzy **b** rozpoczynamy od wpisania do kolejnych jej elementów wartości warunków początkowych dla odpowiednich węzłów według poniższego algorytmu :

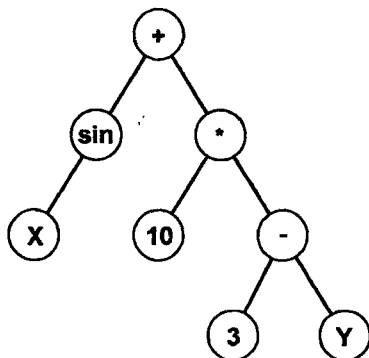
1° Dla wszystkich punktów należących do rozpatrywanej sieci do macierzy **b** wpisywana jest wprost wartość warunku początkowego obowiązującego dla tego punktu wraz z wartością funkcji wymuszającej działającej w tym punkcie (ze współczynnikiem wynikającym z dyskretyzacji),

2° Następnie dla wszystkich węzłów o statusie "1" - należących do wnętrza obszaru sprawdzany jest status sąsiada. Jeżeli dla danego węzła u_{ij}^{k+1} , któryś z sąsiadów ma status różny od "1", to sąsiad ten traktowany jest jako punkt brzegowy. Jeżeli sąsiad ma statut "2", to element macierzy **b** odpowiadający węzłowi u_{ij}^{k+1} modyfikuje się o warunek brzegowy. W przypadku węzła o statusie "0" (węzeł nie należy do obszaru) węzeł taki traktowany jest jako sztuczny punkt brzegowy. Wartość warunku brzegowego dla tego punktu jest aproksymowana liniowo.

4. WPROWADZANIE PARAMETRÓW RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO.

Parametry fizyczne charakteryzujące własności obszaru, w którym ma miejsce symulowany proces mogą być wprowadzane różnie. Jeśli są stałe i jednakowe w całym obszarze, wystarczą dwie liczby, ale gdy zależą od położenia przestrzennego węzła oraz czasu lub stanu procesu to należy je wprowadzać dla każdego węzła osobno. W przypadku, gdy zależności te dają się opisać funkcją ciągłą można wykorzystać moduł wprowadzania danych opracowany dla programu EXPEQU. Zawiera on następujące procedury: wprowadzania funkcji, wyliczania wartości funkcji, obsługi błędów. Założono, że wszystkie dane wprowadzane będą z klawiatury oraz, że będą one sprawdzane pod kątem poprawności formalnej. Wprowadzony z klawiatury ciąg znaków jest analizowany i jeśli okaże się on poprawnie napisaną funkcją, można otrzymać wartość tak zdefiniowanej funkcji w

zadany punkt. Analiza wpisanego ciągu polega na sprawdzeniu zgodności z regułami matematycznymi. Jeżeli ciąg nie zawiera błędów, na jego podstawie budowane jest drzewo binarne [7]. Jako przykład pokazano na rysunku 4.1 reprezentację wyrażenia $\sin(x)+10*(3-y)$ w postaci drzewa binarnego.



Rys. 4.1. Drzewo binarne wyrażenia $\sin(x) + 10*(3-y)$

Drzewo jest konstruowane w sposób dynamiczny. Dla każdej z funkcji takie drzewo jest budowane osobno. Argumentami procedury liczącej są korzeń drzewa (root) oraz wartości zmiennych (x,u,t). Wartości zmiennych są podstawiane, a następnie jest wyliczana wartość drzewa. Wyliczenie wartości odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym etapie drzewo jest przeglądane w porządku wstecznym (ang. PostOrder), czyli najpierw odwiedzamy poddrzewa, a potem korzeń. W wyniku takiego przeglądania otrzymujemy dla przykładowego drzewa z rysunku 4.1. następujący ciąg: $x \sin 10 3 y - * +$. Jest to notacja przyrostkowa, powszechnie znana jako Odwrotna Notacja Polska. Drugim etapem liczenia wartości jest proste obliczenie ciągu w ONP przy pomocy zaimplementowanego dynamicznego stosu. Ciąg znaków definiujących funkcję może zawierać następujące nazwy:

- | | |
|--|--|
| 1. nazwy zmiennych : x,y,u,t | 13. tg - funkcja tangens |
| 2. * - operator mnożenia | 14. ctan - funkcja cotangens |
| 3. / - operator dzielenia | 15. arctg - funkcja arcustangens |
| 4. + - operator dodawania | 16. arcsin - funkcja arcustangens |
| 5. - - operator odejmowania | 17. arccos - funkcja arcustangens |
| 6. ^ - operator potęgowania | 18. exp - funkcja eksponens |
| 7. () - nawiasy | 19. ln - funkcja logarytm naturaln |
| 8. 1234567890 - cyfry | 20. sinh - funkcja sinus hiperboliczny |
| 9. . - kropka dziesiętna | 21. log - funkcja logarytm dziesiętny |
| 10. e E - symbol mnożenia przez potęgę liczby 10 | 22. cosh - funkcja cosinus hiperboliczny |
| 11. sin - funkcja sinus | 23. tanh - funkcja tangens hiperboliczny |
| 12. cos - funkcja cosinus | 24. abs - funkcja wartość bezwzględna |

W przypadku wystąpienia błędu we wpisanym ciągu, ciąg nie zostanie przyjęty i pojawi się odpowiedni komunikat.

5. WYBÓR SCHEMATU RÓŻNICOWEGO I SPOSOBU DYSKRETYZACJI.

Ze względu na dużą różnorodność sposobów aproksymacji ciągłego zagadnienia granicznego zagadnieniem różnicowym należy wybrać taki, który umożliwi osiągnięcie największej dokładności rozwiązania w zadanym czasie. Brak użytecznych oszacowań błędu obliczeń numerycznych zadanie to znacznie utrudnia.

Na aproksymację różnicową zagadnienia granicznego składa się dobór schematu różnicowego, dobór węzłów siatki, a w przypadku gdy parametry równania zależą od rozwiązania (funkcji stanu) także dobór sposobu aproksymacji pochodnej iloczynu dwóch funkcji. Temu ostatniemu problemowi poświęcono opracowanie [6]. Różne sposoby aproksymacji iloczynu dwóch funkcji dają różne rozkłady błędów, ale przeprowadzone testy nie pozwoliły na wskazanie metody wyraźnie lepszej od innych dla szerokiej klasy zadań.

Wypróbowany został także algorytm zmiany kroku dyskretyzacji czasu w zależności od lokalnej dynamiki zmian stanu procesu. Ponieważ nie znaleziono użytecznych oszacowań błędu posłkowano się wynikami otrzymywanymi w trakcie symulacji – i gdy zmiany rozwiązania okazywały się zbyt duże powtarzano obliczenia z mniejszym krokiem czasowym. Algorytm działa poprawnie i można dobrać tak zadania testujące, że jest efektywny. Jednak dla większości zadań czas potrzebny na kontrolę bieżącej dynamiki rozwiązania i powtórne obliczenia ze zmienionym krokiem jest tak duży, że lepsze wyniki daje przyjęcie z góry mniejszego kroku i zastosowanie metody klasycznej (ze stałym krokiem czasowym) [8].

Do ułatwienia badaczowi wyboru schematu różnicowego przygotowano program EXPEQU, który posługuje się bazą wiedzy o przydatności schematów różnicowych do symulacji zagadnień granicznych różnych typów.

Program posiada samouczącą się bazę wiedzy. Każde zagadnienie brzegowe jest analizowane i kwalifikowane do jednej z klas kodowanych liczbą 8-cyfrową. Sposób kodowania przedstawia rys.5.1.

Wymiar przestrzenny	Parametr A	Parametr B	A/B	Wymuszenia punktowe	Wymuszenia rozszerzone	Warunki początkowe	Warunki brzegowe
	0 - stały 1 - $f(x,y)$ 2 - $f(t)$ 3 - $f(x,y,t)$ 4 - $f(u)$	0 - stały 1 - $f(x,y)$ 2 - $f(t)$ 3 - $f(x,y,t)$ 4 - $f(u)$	0 - <1 1 - 1..9.99 2 - 10..99.9 4 - >100	0 - brak 1 - są	0 - stały 1 - $f(x,y)$ 2 - $f(t)$ 3 - $f(x,y,t)$ 4 - $f(u)$	0 - stały 1 - $f(x,y)$	0 - stały 2 - $f(t)$

Rys.5.1. Sposób kodowania klasy zagadnienia granicznego.

Przykładowo zagadnienie klasy 10020200 oznacza, iż symulowany proces ma miejsce w obszarze o jednym wymiarze przestrzennym, parametry A i B są stałe, a ich stosunek należy do przedziału $10 \leq A/B < 100$, brak jest wymuszeń punktowych, wymuszenia ciągłe są funkcją t, warunki początkowe i brzegowe są stałe. Jak widać program został już wstępnie przygotowany do rozszerzenia na zagadnienia o dwu wymiarach przestrzennych.

Taki sposób kodowania daje dla zagadnień o jednym wymiarze przestrzennym 4 tys. różnych klas. Jest to z pewnością podział zbyt szczegółowy i wiele z tych klas będzie mogło być połączonych. Jakie klasy należy połączyć lub nawet zlikwidować będzie można powiedzieć dopiero po wielu testach.

Każdej klasie zadań towarzyszy rekord informujący o dotychczasowych doświadczeniach obliczeniowych dla zadań tej klasy. Zawiera on informację o tym, ile zadań tej klasy było dotychczas rozwiązywanych, w ilu przypadkach najdokładniejsze wyniki dała każda z siedmiu metod różnicowej aproksymacji pochodnych, czy większą poprawę dokładności daje podwojenie kroków przestrzennych, czy czasowych, a także średni czas liczenia rozwiązania w obszarze $10h \times 10\tau$ (tzn. o wymiarach 10 kroków przestrzennych na 10 kroków czasowych) oraz mnożniki tego współczynnika przy podwojeniu ilości kroków czasowych i podwojeniu ilości kroków przestrzennych.

Jakość informacji zawartej w bazie wiedzy zależy głównie od ilości zadań testowych jakie zostały wykonane. Ponieważ przygotowywanie zadań testowych jest pracochłonne program pamięta sto ostatnio rozwiązywanych zagadnień brzegowych, które nie posłużyły do wzbogacenia bazy wiedzy. Użytkownik, w czasie, gdy jego komputer jest wolny, może polecić programowi rozwiązywanie tych zagadnień celem wzbogacenia bazy wiedzy. Wówczas każde zagadnienie rozwiązywane jest na siatce $10h \times 10\tau$ siedmiokrotnie, przy użyciu następujących schematów różnicowych :

- prosty schemat jawny,
- prosty schemat niejawny, z trzema odmianami aproksymacji pochodnej iloczynu,
- schemat Cranka - Nicholsona,
- schemat DuForta - Frankela,
- schemat Sauleva.

Każde z rozwiązań porównywane jest z wynikami uzyskanymi na siatce gęstej $200 \times 0.005h \times 200 \times 0.005\tau$ i, po wybraniu metody najdokładniejszej, liczone są współczynniki wzrostu czasu obliczeń przy zagęszczaniu siatki.

5.1. System ekspertowy

Zadaniem systemu ekspertowego jest wybór metody, która w zadanym czasie gwarantuje najdokładniejsze rozwiązanie. Musi on najpierw ustalić klasę badanego zagadnienia. Można to robić stosując pytania do użytkownika i klasyczne reguły decyzyjne typu if...then. Jest to jednak o tyle niecelowe, że podział na klasy w samouczącej się bazie wiedzy dokonywany jest automatycznie, a reguły decyzyjne zaimplementowane w programie mają postać: "jeśli liczba wymuszeń punktowych wynosi 0 to piąta cyfra kodu klasy równa się 0". Ta sama procedura rozpoznaje klasę zagadnienia w systemie ekspertowym. Po ustaleniu klasy zagadnienia system korzysta z bazy wiedzy, by wybrać najdokładniejszą dla tej klasy metodę aproksymacji. Następnie użytkownik podaje jakie maksymalne kroki siatki są dla niego dopuszczalne oraz jaki jest maksymalny czas obliczeń. Zadaniem systemu ekspertowego jest podjęcie decyzji o tym jakie kroki dyskretyzacji zostaną przyjęte do obliczeń. Jeśli schemat aproksymacyjny bardziej zwiększa swą dokładność przy zmniejszaniu na przykład kroku czasowego, to system pozostawi największy dopuszczalny krok przestrzenny, a następnie krok czasowy zmniejszy maksymalnie, tak jednak by nie przekroczyć zadanego czasu obliczeń.

Przedstawiony tutaj sposób ustalania najefektywniejszej metody aproksymacji kryje w sobie kilka pułapek ale na ile są one niebezpieczne będzie można ustalić po większej liczbie testów.

6. LITERATURA

1. Jankowski M.: *Elementy grafiki komputerowej*. - Warszawa: WNT, 1990
2. Kącki E.: *Problemy optymalnego sterowania systemami o rozłożonych parametrach*, Warszawa, PWN, 1991
3. Korbicz J., Zajda Z., Solnik W., Uciński D.: *Wybrane metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*. - Zielona Góra, Wydawnictwo Uczelniane WSInż., 1991
4. Noye J.: *Computational Techniques for Differential Equations*. North - Holland - Amsterdam, New York, Oxford, 1984
5. Samarski A.A., Nikolajew J.S.: *Metody rozwiązywania równań siatkowych*. - Warszawa, PWN, 1988
6. Solnik W., Zajda Z.: *Różnicowa aproksymacja quasi-liniowego równania przewodzenia ciepła (w jęz. rosyjskim)* w: *Proceedings of Latvian-Danish seminar on Groundwater and Geothermal Energy, Riga, Copenhagen 1994*, t.3. s.327-332.
7. Wirth N.: *Algorytmy + strury danych = programy*. - Warszawa WNT, 1989
8. Zajda Z.: *Komputerowa symulacja procesów o parametrach rozłożonych ze zmianami kroku czasowego w trakcie obliczeń*, referat na VIII Krajowej Konferencji SPD-8 Symulacja Procesów Dynamicznych, Polana Chochcowska, 1994