

PROJEKTOWANIE REGULATORÓW CYFROWYCH METODĄ DYSKRETYZACJI ALGORYTMU CIĄGŁEGO

Zdzisław Kowalczuk

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Wydział Elektroniki, Katedra Systemów Automatyki
Narutowicza 11/12, Skr. Pocz. 612, 80-952 Gdańsk
tel. (48 58) 472018, fax (48 58) 416132, email kova@sunrise.pg.gda.pl

Słowa kluczowe: układy ciągłe, dyskretna aproksymacja, regulatory cyfrowe, adaptacja
Projekt badawczy Nr 8 S505 027 04 (Numer umowy: 673/S5/93/04)

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest projektowanie regulatorów cyfrowych metodą czasu ciągłego opierające się na syntezie algorytmu w dziedzinie czasu ciągłego oraz transformacji algorytmu w dziedzinę czasu dyskretnego.

Pierwsza część badań dotyczyła metod dyskretnego aproksymacji odosobnionych układów czasu ciągłego. Dokonano przeglądu literatury odnoszącej się do przekształceń dyskretyzujących oraz opracowano bezpośrednie i pośrednie metody dyskretyzacji normalnej, uwzględniające transformacje układów opisanych w przestrzeni stanów. Dokonano systematyzacji i klasyfikacji metod dyskretyzacji prowadzących do jawnych postaci modeli dyskretnych. Pokazano, że większość istniejących metod dyskretyzacji może być ujęta w dwie grupy, w których w sposób bezpośredni albo pośredni wykorzystuje się przekształcenie Z.

Metody bezpośrednie przystosowane są do dyskretyzacji układów opisywanych za pomocą funkcji przenoszenia, prowadzą do modeli dyskretnych o dobrze określonej relacji wejście-wyjście, oraz dają dokładne rozwiązania dla testowych sygnałów wejściowych o nieograniczonym widmie. Modele dyskretnie syntezywane w grupie metod pośrednich, które charakteryzują się prostą realizacją, mogą opierać się na zadanej, wewnętrznej strukturze modelu ciągłego. Układy takie nie spełniają jednak modelowych relacji wejście-wyjście oraz zastrzeżone są dla pobudzeń o ograniczonym widmie (w sensie twierdzenia o próbkowaniu).

Istotną cechą większości metod dyskretyzacji jest zastosowanie operatorów funkcjonalnych, które są opisywane za pomocą wielomianów zwierciadlanych, które mogą być źródłem niestabilności syntezywanego układu dyskretnego. Dotyczy to w szczególności aproksymacji wyższego rzędu, które z tego powodu muszą być poddawane operacjom korygującym stabilność.

Drużga część badań dotyczyła zagadnienia dyskretnego aproksymacji algorytmów sterowania i identyfikacji. Dokonano analizy metod dyskretnego aproksymacji biorąc pod uwagę warunki dyskretyzacji regulatorów i opracowano podstawowe spektrum przekształceń dyskretyzujących. Zasadniczym celem badań było opracowanie metod dyskretnego aproksymacji układów identyfikacji obiektów czasu ciągłego, to znaczy takich narzędzi, które mogą być na przykład stosowane przy projektowaniu cyfrowych układów adaptacyjnego sterowania, opierających się na modelach opisanych w dziedzinie czasu ciągłego.

Przeprowadzono analizę problemu identyfikacji w czasie rzeczywistym procesów opisanych w dziedzinie czasu ciągłego. W celu zastosowania dyskretnych algorytmów estymacji parametrycznej opierających się na modelowaniu błędu równania, w którym występuje liniowa zależność od parametrów identyfikowanego obiektu, niezbędna jest informacja o przebiegu obserwowanych sygnałów i ich pochodnych lub całek zawierająca się w tzw. wektorze regresji. Do generowania elementów wektora regresji proponuje się szereg dopasowanych normalnych operatorów dyskretnego całkowania.

Szereg dopasowanych operatorów stanowi podstawę opracowanych dwu nowych metod dyskretnego realizacji estymatorów parametrycznych obiektów czasu ciągłego. Pierwsza z metod polega na przekształceniu oryginalnego szeregu dopasowanych filtrów typu IIR (o nieskończonej odpowiedzi impulsowej) w równoważny -w sensie niezmienności relacji opisanych równaniem regresji - szereg filtrów typu FIR (o skończonej odpowiedzi impulsowej), służących do formowania elementów wektora regresji. Druga metoda polega na innej tożsamościowej transformacji modelowego równania regresji, w wyniku której uzyskuje się algorytm formowania wektora regresji, w którym ma zastosowanie szereg stabilnych filtrów rekursywnych.

Uzyskane w ten sposób algorytmy uwzględniają działanie układu identyfikacji w czasie rzeczywistym i w trybie bezpośrednim oraz (ze względu na "ograniczoną długość pamięci") nie wymagają znajomości warunków początkowych. Algorytmy IIR charakteryzują się niższą złożonością obliczeniową i mniejszym opóźnieniem estymacji, ale zastosowanie ich ogranicza się do układów niskiego rzędu z niewielkim poziomem szumów.

Przeprowadzone wstępnie badania symulacyjne wykazały dużą użyteczność (w kategoriach szybkości i dokładności estymacji) opracowanych algorytmów - z tym zastrzeżeniem, że osiągalna jest właściwa (choćby przybliżona) ocena parametrów kształtu sygnałów mierzonych na wejściu i wyjściu obserwowanego układu.

1. Dyskretna Aproksymacja Układów Ciągłych [4, 5]

Dyskretna aproksymacja układów ciągłych związana jest z uzyskującą ostatnio uznanie w świecie metodą czasu ciągłego, według której realizowane cyfrowe filtry i regulatory projektuje się najpierw w dziedzinie czasu ciągłego. Dlatego umiejętność transformacji zaprojektowanego ciągłego modelu w model dyskretny nabrała nowego znaczenia. Objektami dyskretnej aproksymacji są zatem zarówno funkcje przenoszenia i równania stanu, jak i grafy przepływu sygnałów.

Zagadnienie równoważności układów ciągłych i dyskretnych nie jest jednoznaczne i nie można wyróżnić jednej, najlepszej metody dyskretyzacji. Dlatego problem idealnej transformacji " $s \rightarrow z$ "

$\mathcal{D}$: $F(s) \rightarrow F(z)$ (1)

w której funkcja przenoszenia $F(s)$ jest przekształcana w funkcję $F(z)$ opisującą układ równoważny w sensie identycznej odpowiedzi w punktach próbkowania na dowolne pobudzenie, można zaliczyć do tzw. złe postawionych zadań, które nie mają jednoznacznego rozwiązania. Poza prostą argumentacją, opierającą się np. na podanej dalej zasadzie niezmienności odpowiedzi, łatwo można zauważyć, że ograniczenia odnoszące się do realizowalności, stabilności, złożoności obliczeń, czasu przetwarzania i próbkowania oddalają nas od takiego ideału przekształcenia $\mathcal{D}$ i powodują, iż dążyć można jedynie do uzyskania aproksymacji układów ciągłych.

Dlatego przed wyborem jednej z metod konwersji, należy odpowiedzieć na pytanie, jakie warunki konieczne powinien spełniać algorytm dyskretny, to znaczy które z wybranych cech ciągłego pierwowzoru powinny charakteryzować dyskretną funkcję przenoszenia, uzyskiwaną za pomocą przekształcenia $\mathcal{D}$.

Odwzorowanie różniczek jest przykładem transformacji, która prowadzi do "jednorodnej równoważności" układów i sygnałów w obu dziedzinach. Jednak każde przekształcenie, inne niż klasyczna kombinacja $\mathcal{Z}^{-1}$, charakteryzuje się niedogodnością polegającą na tym, że sygnały dyskretnie nie są wówczas spróbkowanymi wersjami swoich analogowych odpowiedników. Dlatego zwykle stosuje się niejednorodne odwzorowanie, które postuluje próbkowanie ciągłych sygnałów i stosowanie innej techniki odwzorowania opisu układu ciągłego.

Najogólniej biorąc, rozróżnia się dwa podejścia do projektowania układów cyfrowych, które w odniesieniu do układów sterowania dotyczą dyskretnego aproksymacji ciągłego regulatora. Pierwsza grupa odnosi się do klasycznego podejścia do dyskretyzacji, w którym stosuje się transformacje funkcji przenoszenia układu w dziedzinie z i które prowadzi najczęściej do gotowych rozwiązań (tzw. postaci jawnych). Drugą grupę stanowią podejścia optymalizacyjne, w których dyskretna funkcja przenoszenia zadawana jest w postaci uwikłanej i za pomocą których projektuje się układy optymalne w zakresie wybranych kryteriów. Model ciągły jest wówczas brany po uwagę tylko jako źródło określonej charakterystyki, a nie jako samoistny obiekt. Żadna z metod aproksymacji nie zapewnia prostego sposobu na jednoczesne ograniczenie odchyłek charakterystyk czasowych i częstotliwościowych.

Transformacje dyskretyzujące

Transformacje z dziedziny ciągłej w dyskretną są szeroko stosowaną formą projektowania filtrów i regulatorów cyfrowych. Metody te utożsamia się czasami z cyfrową symulacją, ponieważ celem ich jest uzyskiwanie cyfrowych modeli układów analogowych, które mogą być wykorzystywane w badaniach symulacyjnych. Należy jednak podkreślić, że jest to raczej uproszczona forma symulacji, gdyż przy ograniczeniu narzuconym na sposób oddziaływania z otoczeniem, w celu uzyskania jawnej postaci opisu modelu, wielokrotowe procedury symulacji muszą być przełożone na formuły jednokrotowe lub na algorytmy, w których stosuje się dwie lub więcej prędkości próbkowania.

Różnica pomiędzy odpowiedzią dyskretnego modelu i odpowiedzią jego ciągłego wzorca w punktach próbkowania jest często stosowanym kryterium jakości aproksymacji. Błąd ten zależy od sygnału wejściowego. Wyróżnia się zatem dwa widmowo różne typy pobudzeń i - po ustaleniu, czy spektrum sygnału wejściowego jest ograniczone do zakresu Nyquista ($\omega < \omega_N = \pi/T$) czy też nie - przyjmuje się stosowną metodę aproksymacji:

1. Przy analizie nieograniczonych widmowo sygnałów wejściowych zawsze występuje zjawisko częstotliwościowego utożsamiania (ang. *aliasing*). Najlepszym rozwiązaniem w takim wypadku jest projektowanie układu dla wybranego sygnału wejściowego, a następnie testowanie poprawności projektu.
2. Jeśli widmo sygnału wejściowego mieści się poniżej ω_N , układy mogą być projektowane z dowolną dokładnością. Osiąga się to przez zbliżanie charakterystyk częstotliwościowych układu dyskretnego do charakterystyk układu ciągłego w przedziale Nyquista. W ten sposób dla ograniczonych widmowo sygnałów wejściowych, błąd w dyskretnych momentach może być dowolnie bliski zeru. Metody takie nazywa się transformacjami częstotliwościowymi: stosuje się w nich operatory, których zadaniem jest odwzorowywanie lewej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej s we wnętrze koła jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej z , a osi urojonej - w okrąg jednostkowy.

Metody optymalizacyjne

Drugą grupę metod projektowania stanowią techniki polegające na minimalizacji wybranych miar błędów aproksymacji. Bezpośrednia optymalizacja współczynników z -transmitancji może być przeprowadzana w dziedzinie częstotliwości lub czasu. W poszukiwaniu dyskretnego układu, którego odpowiedź przybliżałaby daną odpowiedź impulsową, zachodzi konieczność stosowania metod iteracyjnych. W dziedzinie częstotliwości, przy dopasowaniu funkcji kwadratu modułu pojawiają się trudności związane z działaniami na wielomianach trygonometrycznych oraz z faktoryzacją kwadratu modułu dla uzyskania transmitancji z .

Większość metod projektowania, opierających się na uwikłanej postaci funkcji przenoszenia układu dyskretnego, ma charakter metod optymalizacyjnych, w których aproksymuje się charakterystykę częstotliwościową modułu, fazy, albo opóźnienia grupowego. Są one odpowiednie tylko dla układów przetwarzania sygnałów, w których nie zachodzi zjawisko utożsamiania.

Najbardziej reprezentatywne dla tego podejścia są metody projektowania minimalizujące błąd średniokwadratowy (np. z zastosowaniem procedury Fletchera-Powella) lub - ogólniej - normę L_p . Wadą tych metod jest jednak to, że nie prowadzą do rozwiązań formalnych - i do wyznaczania współczynników transmitancji układu, minimalizujących zadany wskaźnik, niezbędne są iteracyjne procedury optymalizacji.

Dlaczego transformacje dyskretyzujące?

W literaturze unika się rozstrzygającej oceny metod projektowania. Łatwo jednak zauważyć, iż wiele systemów czasu dyskretnego projektowanych jest z zastosowaniem transformacji dyskretyzujących. Obserwacja ta związana jest z faktem, że projektant znając analogowy pierwowzór zainteresowany jest najczęściej algorytmem cyfrowym o własnościach określonych jedynie w przybliżeniu, który można uzyskać w postaci gotowej stosując względnie proste przekształcenia. W innym wypadku, na przykład przy złożonej specyfikacji podanej w dziedzinie częstotliwości, bardziej odpowiednie może być podejście opierające się na optymalizacji.

Zajmiemy się zatem wyłącznie pierwszą grupą metod dyskretnej aproksymacji, która w odniesieniu do układów sterowania posiada dwie dodatkowe, wymienione niżej zalety.

W opisie dyskretnych modeli, uzyskiwanych w wyniku transformacji dyskretyzujących, okres próbkowania T występuje jako przestrajalny parametr, który umożliwia implementację układów z różnymi szybkościami próbkowania. Cecha ta może być istotnym ułatwieniem w praktycznej realizacji algorytmu sterowania [3].

Drugą ważną cechą transformacji dyskretyzujących jest to, iż prowadzą one do analitycznych związków pomiędzy modelami i umożliwiają odniesienie współczynników modelu dyskretnego do parametrów modelu ciągłego. Może to mieć podstawowe znaczenie w dziedzinach, w których stosuje się równania różniczkowe do opisu systemów (identyfikacja układów ciągłych, sterowanie robotami, itd.).

Wśród procedur transformacyjnych wyróżnia się metody bezpośrednie i pośrednie [1, 3, 4, 5]. Przy podejściu bezpośrednim, model układu ciągłego stosowany jest jako źródło określonych sygnałów, które po spróbkowaniu mogą być bezpośrednio poddane przekształceniu $\mathcal{Z}$. Przy podejściu pośrednim, które nazywa się również dopasowaniem cząstkowym, modelowaniem strukturalnym, metodą algebraiczną lub operatorową, stosuje się podstawianie dyskretnych równoważników operacji analogowych.

1.1. Podejście bezpośrednie

Bezpośrednia transformacja $\mathcal{D}$ wiąże się ze zwykłym przekształceniem $\mathcal{Z}$ sekwencji uzyskanej przez spróbkowanie pewnej funkcji ciągłej:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^{-n} \quad (2)$$

Samo przekształcenie $\mathcal{Z}$ może jednak przysporzyć trudności obliczeniowych, a uzyskana charakterystyka częstotliwościowa może być zaburzona w wyniku nakładania się widm powielonych w procesie próbkowania.

Zasada niezmienności odpowiedzi

Zasada niezmienności odpowiedzi oznacza zachowanie ustalonego związku pomiędzy wejściem i wyjściem ciągłego wzorca w punktach próbkowania:

$$\begin{aligned} Y(s) &= F(s) U(s) \\ Y(z) &= F(z) U(z) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $Y(z) = \mathcal{Z}\{Y(s)\}$, $U(z) = \mathcal{Z}\{U(s)\}$

oraz $\mathcal{Z}\{U(s)\} = \mathcal{Z}\left\{L^{-1}\left[U(s)\right]_{t=nT}\right\} = \mathcal{Z}\{u(nT)\}$

Skąd, dla wybranego sygnału testowego $u(t)$, uzyskuje się model

$$\mathcal{D}: \quad F(z) = \frac{\mathcal{Z}\{F(s) U(s)\}}{U(z)} \quad (4)$$

którego odpowiedź na sygnał wejściowy $u(nT)$ identyczna jest ze spróbkowaną odpowiedzią układu ciągłego opisanego funkcją $F(s)$. Jest to podejście interpolacyjne, w którym zakłada się zerową wartość dyskretnego błędu, $e(n) = y(n) - \gamma(nT) = 0$, dla $n \geq 0$. Metoda ta jest bezbłędna dla zadanego wejścia $u(t)$, i mniej lub bardziej dokładna dla innych pobudzeń, w zależności od tego w jakim stopniu różnią się one od $u(t)$. Właściwy wybór sygnału testowego umożliwia zachowanie określonych cech układu wzorcowego, a konforemność wyjścia analogowego i cyfrowego czyni formułę (4) odporną na skutki utożsamiania.

Podejście niezmienności odpowiedzi impulsowej, skokowej i liniowej może być łatwo uogólnione na dyskretne dopasowanie do pobudzenia *normalnego* typu

$$u(t) = (t^k/k!)/t \quad (5)$$

z następującą formułą aproksymacji

$$D: \quad F(z) = \frac{Z\{F(s)/s^{k+1}\}}{Z\{1/s^{k+1}\}} \quad (6)$$

Zauważmy, że przy rosnącym k , widma funkcji podlegających transformacji Z zawężają się i coraz lepiej spełniają warunki twierdzenia o próbkowaniu.

Odpowiednio do przepisu (4) rozważać można inne postacie funkcji sygnału wejściowego [1, 3, 4, 5].

Metoda członu formującego

Jak pokazano wyżej, do syntezy modelu dyskretnego stosuje się przekształcenie Z łącznie z pewnymi dodatkowymi operacjami. W związku z tym, istnieje również inna interpretacja zagadnienia dyskretnego aproksymacji metodą bezpośrednią. Dla uzyskania dyskretnego aproksymacji, wprowadza się mianowicie człon formujący $Q(s)$ (interpolator lub antyimpulsator), którego zadaniem jest rekonstrukcja próbkowanego sygnału wejściowego. Uzyskuje się wówczas następującą formułę:

$$D: \quad F(z) = Z\{Q(s)F(s)\} \quad (7)$$

Element $Q(s)$ nazywany jest też odtwarzaczem lub przetwornikiem - a ponieważ kształtuje on funkcję podlegającą transformacji Z , nazywa się go też częstotliwościowym członem formującym lub filtrem osłownym (zapobiegającym utożsamianiu - ang. *antialiasing guard*).

Człony o jednostkowej z-transformacji $Z\{Q(s)\} = 1$ spełniają zwykle warunki interpolacji. Najprostsze normalne interpolatory realizują prostokątną, trójkątną/liniową, lub paraboliczną interpolację. Jednak dla $k > 1$, normalne interpolatory posiadają nierealizowalne funkcje przenoszenia z rzeczywistymi charakterystykami częstotliwościowymi. Funkcje te mogą być aproksymowane za pomocą realizowalnych funkcji s , opisujących działanie ekstrapolatorów ciągłych.

Wprowadzenie elementu $Q(s)$ pozwala na ustalenie dokładności przekształceń bezpośrednich. Można bowiem ocenić, jak dokładnie rekonstruowana jest funkcja $u(t)$ za pomocą funkcji $L^{-1}[Q(s)u(s)]$. Błąd pomiędzy sygnałem wyjściowym układu i jego odtworzoną wersją wynosi wówczas

$$e(s) = F(s)(1 - Q(s))u(s) = F(s)\Delta u(s) \quad (8)$$

i jeśli funkcja $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ jest bezwzględnie całkowalna, to maksymalny bezwzględny błąd wyniesie

$$|e| \leq \| \Delta u(t) \|_{\infty} \| f(t) \|_1 = \Delta_{\max} \int_0^{\infty} |f(\tau)| d\tau \quad (9)$$

gdzie $\Delta_{\max}$ jest maksymalną wartością modułu $\Delta u(t)$.

Pomiędzy transformacjami (4) i (7) istnieje równoważność, gdyż

$$\frac{U(s)}{U(z)} = Q(s, z) \Big|_{z=\exp(sT)} = Q(s) \quad (10)$$

Różne metody niezmienności odpowiedzi łączyć można z członami $Q(s)$. Normalne interpolatory zapewniają na przykład niezmiennosc odpowiedzi układu dyskretnego przy pobudzeniu (5) i dlatego mogą być podane w postaci sfaktoryzowanej

$$Q_k(s, z) = Q_k^D(z) Q_k^I(s) = \frac{1}{Z\{1/s^{k+1}\}} \frac{1}{s^{k+1}} \quad (11)$$

wyrażającej odpowiednio całkującą i "różniczkującą" część interpolatora. Ogólna postać interpolatorów (11) dana jest wyrażeniem

$$Q_k(s, z) = \frac{k! (z-1)^{k+1}}{T^k z N_k(z)} \frac{1}{s^{k+1}} \quad (12)$$

gdzie $N_k(z)$ jest normalnym wielomianem zwierciadlanym (MIP: *mirror-image polynomial*) rzędu k . Stąd też [3], normalny interpolator rzędu k dokładnie odtwarza wielomianową funkcję sklejającą rzędu k . W przypadku innych sygnałów, działanie układu dyskretnego będzie przybliżone - odpowiednio do realizowanej wówczas idei najgładszej aproksymacji (z najmniejszą normą $k-1$ pochodnej).

Normalnych interpolatorów $N_k(z)$ wyższego rzędu nie zaleca się, ponieważ posiadają one niedogodny pierwiastek przy częstotliwości Nyquista ($z = -1$) dla parzystych k , a co gorsza, wszystkie pierwiastki pojawiają się na ujemnej części osi rzeczywistej w parach odwrotnych. Dlatego dla $k \geq 3$, formuła (7) w połączeniu z (12) prowadzi do niestabilnych funkcji przenoszenia. Funkcje takie mogą być aproksymowane w częściowo nierekursywny sposób lub poprzez zamianę niestabilnych biegunów na ich odwrotności.

Stosując to drugie podejście uzyskuje się [1] tzw. zredukowane wielomiany normalne

$$R_k^*(z) = z^{k-1} R_k(z^{-1}) \quad (13)$$

oraz przybliżoną (z liniowym zniekształceniem fazy), stabilną postać normalnych interpolatorów

$$\mathcal{Q}_k^*(s, z) = \frac{R_k^*(1) (z-1)^{k+1}}{T^k} \frac{1}{z R_k^*(z) s^{k+1}} \quad (14)$$

Aproksymacja spłotu

Przy $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, dyskretny model układu ciągłego można uzyskać aproksymując całkę spłotową

$$y(t) = \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (15)$$

stosując na przykład procedurę Eulera-Laplace'a

$$i_n = \int_0^{nT} g(\tau) d\tau \approx T \left(\sum_{m=0}^n u_m - \frac{1}{2} [u_n + u_0] - \frac{1}{12} [\Delta_{n-1} + \Delta_0] - \frac{1}{24} [\Delta_{n-2}^2 + \Delta_0^2] - \dots \right) \quad (16)$$

gdzie $u_m = u(mT)$, $\Delta_m^{r+1} = \Delta_m^r - \Delta_{m+1}^r$ oraz $\Delta_m^0 = u_m$. Uwzględniając różnice pierwszego rzędu (przy $u_0 = u_n = 0$) uzyskuje się następujący algorytm korekcji niezmiennika impulsowego

$$F(z) = Z\{F(s)\} - \frac{7}{12} f_0 + \frac{1}{12} f_1 z^{-1} \quad (17)$$

W ogólności, metoda ta z zastosowaniem r -tych różnic przy zerowych warunkach początkowych sprowadza się do korekcji $r+1$ pierwszych współczynników wzorcowej odpowiedzi impulsowej $f_n = f(nT) = f(nT)$

$$D: F(z) = \sum_{n=0}^r (1 - \lambda_n) f_n z^{-n} + \sum_{n=r+1}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (18)$$

Dopasowanie stochastyczne

Jeśli użyteczny sygnał $u(t)$ jest stacjonarnym procesem stochastycznym o znanej funkcji autokorelacji $\varphi_{uu}(\tau)$, to za pomocą transformacji dwustronnych można wyznaczyć odpowiednie funkcje gęstości widmowej mocy

$$P_{uu}(s) = \mathcal{L}\{\varphi_{uu}(t)\} \quad \text{oraz} \quad P_{uu}(z) = \mathcal{Z}\{\varphi_{uu}(nT)\} \quad (19)$$

Optymalny dyskretny równoważnik minimalizujący błąd średniokwadratowy $E\{e^2(n)\}$ ma wówczas postać

$$D: F(z) = \frac{z}{P_{uu}^-(z)} \left[\frac{Z\{P_{uu}(s)F(s)\}}{z P_{uu}^+(z)} \right] \quad (20)$$

gdzie $P_{uu}^-(z)$ jest czynnikiem $P_{uu}(z)$ zawierającym wszystkie zera i bieguny leżące w kole jednostkowym na płaszczyźnie z , a $P_{uu}^+(z)$ - spoza tego koła, natomiast $[\]$ oznacza operację pozostawiania tylko stabilnych składników rozwinięcia wyrażenia w nawiasie w szereg Laurenta.

Jeśli funkcja gęstości widmowej $P_{uu}(s)$ jest ograniczona do zakresu Nyquista $\omega < \omega_N = \pi/T$, formuła (20) może być sprowadzona do (zmodyfikowanego czynnikiem T) niezmiennika impulsowego, o ile w miejsce transmitancji $F(s)$ zastosuje się jej "okrojony" model $\bar{F}(s)$, uzyskany przez wycięcie całego pasma częstotliwości powyżej $\omega \geq \omega_T = 2\pi/T$.

1.2. Podejście pośrednie

Zasada dopasowania cząstkowego

Dyskretną aproksymację układu ciągłego, opisanego funkcją przenoszenia $F(s)$, można uzyskać przez podstawienie dyskretnych operatorów $F_i(z)$ w miejsca odpowiadających im funkcji składowych $F_i(s)$ funkcji $F(s)$. Jeśli zatem funkcja przenoszenia $F(s)$ wyrażona jest funkcją

$$F(s) = \mathfrak{Z}\{F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)\} \quad (21)$$

jej dyskretny odpowiednik uzyskuje się przez tzw. modelowanie strukturalne lub dopasowanie cząstkowe:

$$D: F(z) = F(s) \Big|_{F_1(s) \leftarrow F_1(z)} \quad (22)$$

Do wyznaczenia elementarnych funkcji $F_i(z)$ stosować można przekształcenia bezpośrednie - na przykład

$$F_i(z) = \mathfrak{Z}\{\mathcal{Q}(s)F_i(s)\} \quad (23)$$

Jeśli funkcja $\mathfrak{Z}$ opisuje połączenie równoległe, to transformacja (22) może być utożsamiana z podejściem bezpośrednim. Ogólnie jednak niełatwo jest z góry określić, w jakim stopniu układ uzyskany metodą cząstkową jest podobny do modelowanego układu ciągłego. Wiadomo natomiast, że zarówno charakterystyki czasowe, jak i częstotliwościowe są zniekształcane. Niedogodnością jest również niejednoznaczność transformacji, związanej ze sposobem dekompozycji układu ciągłego. Ponieważ jednak zwykle stosuje się podukłady niskiego rzędu, procedura (22) nie nastręcza żadnych trudności, a różne człony formujące stosowane w (23) umożliwiają lokalnie optymalne dopasowanie dyskretnego modelu.

Jeśli $\mathfrak{Z}$ podane jest w postaci sfaktoryzowanej

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s + \alpha_i)}{\prod_{i=1}^m (s + \alpha_i)} \quad (24)$$

tzw. metoda doboru pierwiastków (lub dopasowanie z-transformaty) może być wyrażona następująco

$$D: F(z) = F(s) \Big|_{(s+\alpha_i) \leftarrow (1-z_i z^{-1})} \quad (25)$$

gdzie $z_i = \exp(-\alpha_i T)$ dla $i=1, 2, \dots, M$, lewa półpłaszczyzna s przekształcana jest w koło jednostkowe płaszczyzny z , pierwiastki są utożsamiane, a odpowiedź częstotliwościowa i wzmocnienie układu są zniekształcane. Dla układów z przewagą liczby biegunów nad zerami stosuje się zmodyfikowane podstawienie:

$$(s + \alpha_i) \leftarrow \left(\lambda_i \frac{z - z_i}{z + 1} \right) \quad (26)$$

Stosowanie metody członów $\mathcal{Q}(s)$ do podukładów wyższego rzędu oznacza zbliżanie się do podejścia bezpośredniego. Szczególnym przypadkiem jest dopasowanie do sygnałów wejścia i wyjścia układu $\mathfrak{Z}$:

$$F(s) = \frac{\bar{F}_1(s)}{1 - \bar{F}_2(s)} \quad (27)$$

Metoda dopasowania wejściowo-wyjściowego jest jednym z najprostszych sposobów aproksymacji. Każdą liniową, realizowaną fizycznie transmitancję można przedstawić w postaci $\mathfrak{Z}$ z (27), gdzie

$$\bar{F}_1(s) = \sum_{i=1}^m \mu_i \left(\frac{1}{s} \right)^i \quad \text{oraz} \quad \bar{F}_2(s) = \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{1}{s} \right)^i \quad (28)$$

Dyskretną aproksymację osiąga się wówczas przez podstawienie

$$D: F(z) = F(s) \Big|_{s^{-i} \leftarrow D^{-i}(z) = I^i(z)} \quad (29)$$

gdzie $D^i(z)$ oraz $I^i(z)$ oznaczają dyskretnie odpowiedniki członów i -krotnego różniczkowania oraz całkowania.

Zauważmy iż, układ (27) przedstawiony za pomocą całkowego równania Volterry

$$y(t) - \int_0^t h_2(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t h_1(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (30)$$

może być również dyskretyzowany metodą aproksymacji splotu (15-18).

Metoda operatorów całkowania lub różniczkowania

Wyróżnia się operatorowe schematy: prosty i rozwinięty. W prostej metodzie operatorowej korzysta się tylko z aproksymacji pojedynczego operatora. W schemacie rozwiniętym natomiast stosuje się szereg dyskretnych operatorów aproksymujących szereg członów wielokrotnego całkowania różniczkowania.

Schemat prosty, w którym zakłada się, że wszystkie trajektorie zmiennych stanu mają tę samą postać, stosowany może być do dowolnej struktury ciągłego pierwowzoru opisanej funkcją $\mathfrak{Z}$ (nie tylko do postaci (27)-(28)). Ponieważ, przekształcenie to odnosi się do operatora zespolonej częstotliwości, dlatego taki sposób dyskretyzacji nazywa się modelowaniem częstotliwościowym.

Mając na uwadze zachowanie charakterystyki częstotliwościowej i stabilności układu ciągłego:

$$\operatorname{Re}\{D(e^{sT})\} = 0 \quad \text{jeśli} \quad \operatorname{Re}\{s\} = 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Re}\{D(e^{sT})\} \geq 0 \quad \text{jeśli} \quad \operatorname{Re}\{s\} \geq 0 \quad (31)$$

$D(e^{sT})$ musi być rzeczywistą i dodatnią funkcją s , a $D(z)$ - ilorazem antylustrzanych i lustrzanych rzeczywistych wielomianów zmiennej z . Innymi słowy operator $D(z)$ spełniać musi cztery dostateczne warunki:

- (i) bieguny i zera położone są na okręgu jednostkowym na przemian,
- (ii) wszystkie pierwiastki są pojedyncze,
- (iii) wszystkie zespolone pierwiastki występują w parach sprzężonych,
- (iv) w punkcie $z = -1 + j0$ istnieje zero lub biegun.

W grupie prostych operatorów mieszczą się klasyczne różnice skończone lub schemat całkowania Eulera, różnice bezstratne $(z^{1/2} - z^{-1/2})/T$, operator Tustina lub dwuliniowy, Simpsona 1/3 i 3/8, Boole'a, Milne'a,

Weddalla, itd. Poza prostym przypadkiem operatora Tustina, większość znanych operatorów nie spełnia jednak zestawu wymagań (i)-(iv). Występujące w nich wielomiany zwierciadlane, które spełniają warunek (a), posiadają najczęściej pierwiastki odwrotne o niejednostkowym module burzące warunek (b).

Dyskretne odpowiedniki różniczkowania uzyskuje się poprzez aproksymowanie związku

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (32)$$

z zastosowaniem na przykład szeregów MacLaurina lub łańcuchowych form Cauera (frakcji ciągłych). $D(z)$ może być projektowane jako filtr FIR lub IIR. Natomiast przy optymalizacji algorytmów dyskretnego całkowania uwzględnia się zwykle w filtry IIR o postaci

$$I(z) = \left(T \sum_{i=1}^k a_i z^{-i} \right) / (1 - z^{-r}) \quad (33)$$

Jawną postać dyskretnego operatora całkowania $I(z)$ można wywieść z przepisu (23) stosując człon formujący (interpolator, ekstrapolator, lub człon strojony): $I(z) = Z\{Q(s)/s\}$.

Przyjawszy klasę interpolatorów (11-12) uzyskuje się normalne operatory całkowania

$$\Xi_k(z) = \frac{Z\{1/s^{k+2}\}}{Z\{1/s^{k+1}\}} = \frac{T}{k+1} \frac{N_{k+1}(z)}{(z-1)N_k(z)} \quad (34)$$

Formuła ta dla $k = 0, 1$ i 2 prowadzi odpowiednio do operatora Eulera, dwuliniowego i Simpsona 1/3. Dla $k \geq 1$ wszystkie integratory posiadają idealną odpowiedź fazową. Transformacja dwuliniowa

$$\frac{1}{s} \Leftarrow I(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (35)$$

zachowuje stabilność i odwzorowanie osi urojonej w okrąg jednostkowy (i-iv), ale wszystkie aproksymacje wyższego rzędu są niestabilne.

Ekstrapolatory, uzyskiwane z normalnych interpolatorów, prowadzą do reguł Adamsa i Adamsa-Bashfortha.

Stosując integratory strojone, uzyskane przez połączenie prostych aproksymacji korektora amplitudowo-fazowego $C(s) = \lambda \exp(\gamma s T) \equiv \lambda(1 + \gamma s T)$ z członami formującymi, można wpływać na dokładność i stabilność modelu dyskretnego. Prosty T-operator (całkowania), który ma postać

$$I(z) = T(z) = \lambda T \frac{\gamma z + (1-\gamma)}{z-1} \quad (36)$$

może reprezentować formułę Eulera $\gamma = 0$, trapezów $\gamma = 0.5$, prostokątów $\gamma = 1$, lub Adamsa 2-rzędu $\gamma = 1.5$.

W schemacie rozwinętym stosuje się odrębny dyskretny operator do każdego i -krotnego integratora.

Operatory takie wyprowadza się przybliżając związek (32). W ten sposób uzyskuje się np. tzw. formy z:

$$\Xi^i(z) = T Z \left\{ \frac{1}{s^i} \right\} + T^i \frac{B_i}{i!} \quad (37)$$

gdzie B_i jest i -tą liczbą Bernoulli'ego.

Przy znajomości postaci sygnałów całkowanych, można skorzystać z metody członów formujących (23):

$$I^i(z) = Z \left\{ \frac{Q(s)}{s^i} \right\} \quad (38)$$

W przypadku struktury $\mathfrak{Z}$ z (27-28), wystarczy dopasować się do dwóch sygnałów (wejścia i wyjścia).

Z każdym członem $Q(s)$ wiąże się odrębny szereg cyfrowych integratorów. Opierając się na normalnych interpolatorach (11-12) wywieść można szereg klas normalnych operatorów całkowania

$$\Xi_k^i(z) = \frac{Z\{1/s^{i+k+1}\}}{Z\{1/s^{k+1}\}} = T^i \frac{k!}{(i+k)!} \frac{N_{i+k}(z)}{(z-1)^i N_k(z)} \quad (39)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3, \dots$), które obejmują reguły prostokątów, trapezów, Simpsona i Madweda-Truxala.

Stabilną wersję powyższych integratorów uzyskuje się poprzez zastosowanie interpolatorów (14)

$$\Xi_k^i(z) = T^i \frac{R_k^*(1)}{R_{i+k}^*(1)} \frac{R_{i+k}^*(z)}{(z-1)^i R_k^*(z)} \quad (40)$$

Operatory takie wiernie odtwarzają charakterystyki częstotliwościowe członów całkujących dla $\omega \leq \omega_N/2$.

2. Dyskretna Realizacja Procedur Identyfikacji Układów Ciągłych [6, 7, 8]

Algorytmy adaptacyjne stosowane w układach sterowania zwykle opierają się na danych uzyskanych w wyniku działania procedur identyfikacji dynamiki sterowanego procesu. Procedury takie są szczególnie istotne w przypadku układów wymagających ustawicznej adaptacji. Dokumentacja badań z zakresu identyfikacji układów czasu dyskretnego jest niezwykle obszerna (por. [9, 2]).

Istnieją jednak zasadnicze problemy związane z dyskretnym podejściem do projektowania układów czasu ciągłego. Należy do nich: utrata informacji o względnym rzędzie funkcji przenoszenia układu, opóźnienie resztowe, problem wyboru częstotliwości próbkowania, nieminimalnofazowość dyskretnych modeli, zjawisko grupowania się pierwiastków (dla małych T) i wynikająca stąd wrażliwość parametryczna. Trudności te są przyczyną obserwowanego ostatnio w literaturze nawrotu do projektowania układów identyfikacji i sterowania metodami czasu ciągłego, w których komputerowa implementacja dyskretnego algorytmu opiera się na projekcie właściwym dokonanym w dziedzinie czasu ciągłego.

Dalej prezentuje się nowe ciągłoczasowe podejście do projektowania układów identyfikacji niestacjonarnych obiektów czasu ciągłego. Podejście to w szczególności dotyczy liniowych dynamicznych operacji odpowiednich do generowania elementów wektora regresji w rekursywnych dyskretnych algorytmach estymacji parametrów liniowych modeli czasu ciągłego obserwowanych obiektów.

Proponowana metodologia odwołuje się (w sposób charakterystyczny dla metod czasu ciągłego) do technik dyskretnej aproksymacji układów ciągłych, w których można uwzględnić pożądany rodzaj dopasowania projektowanego układu dyskretnego do sygnałów na wejściu i wyjściu obiektu obserwacji. Zastosowanie znajduje tu rozwinięty schemat normalnych operatorów całkowania. Proponuje się dwie metody "temperowania" charakterystyk dyskretnych integratorów do zastosowań w algorytmach bezpośrednich. Pierwsza z nich polega na transformacji oryginalnego szeregu dopasowanych filtrów typu IIR w równoważny szereg filtrów FIR. Druga natomiast pozwala na uproszczenie obliczeń przez zastosowanie stabilizowanych jawnych formuł całkowania typu IIR.

Tak dopasowane i utemperowane normalne operatory całkowania nazywa się operatorami *uzgodnionymi*. Badania symulacyjne przeprowadzone w środowisku analogowo-cyfrowym wykazały dużą użyteczność opracowanych algorytmów - przy założeniu, że osiągalna jest właściwa ocena parametrów kształtu sygnałów mierzonych na wejściu i wyjściu obserwowanego układu. Jako parametr kształtu sygnałów zastosowano rząd funkcji sklejanej (*spline'u*) aproksymującej dany sygnał.

2.1. Zagadnienie identyfikacji układów czasu ciągłego

Liniowy obiekt czasu ciągłego charakteryzujący się realizowalną transmitancją n -tego rzędu

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (41)$$

gdzie $A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ oraz $B(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m$, może być opisany za pomocą liniowego równania całkowego

$$(\mathcal{J}^n + a_0\mathcal{J}^{n-1} + \dots + a_n\mathcal{J}^0)\mathcal{Y}(s) = (b_0\mathcal{J}^{n-m} + b_1\mathcal{J}^{n-m+1} + \dots + b_m\mathcal{J}^0)\mathcal{U}(s) \quad (42)$$

w którym $\mathcal{U}(s)$ i $\mathcal{Y}(s)$ są transformatami sygnałów na wejściu $u(t)$ i wyjściu $y(t)$ obserwowanego obiektu, a

$\mathcal{J}^i = \mathcal{J}^i(s) = \frac{1}{s^i}$ oznacza operator i -krotnego całkowania.

Powyższe realizowalne równanie uzyskano poprzez dokonanie jednakowej, hipotetycznej dolnoprasmowej filtracji sygnałów wejścia i wyjścia $X \in \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}\}$ w formie całkowania n -tego rzędu $H(s) = \mathcal{J}^n(s)$. Skąd mamy

$$s^{n-i}H(s)X(s) = s^{n-i}\mathcal{J}^n(s)X(s) = \mathcal{J}^i(s)X(s) \quad (43)$$

Ponieważ procesy estymacji parametrycznej zwykle odnoszą się do niskoczęstotliwościowych charakterystyk identyfikowanych układów, ich wejście i wyjście praktycznie obserwowane jest poprzez odpowiedni filtr dolnoprzepustowy $F(s)$. Obiekt czasu ciągłego reprezentowany może być zatem przez model

$$\mathcal{J}^n\mathcal{Y}_f + a_1\mathcal{J}^{n-1}\mathcal{Y}_f + \dots + a_n\mathcal{J}^0\mathcal{Y}_f = b_0\mathcal{J}^{n-m}\mathcal{U}_f + b_1\mathcal{J}^{n-m+1}\mathcal{U}_f + \dots + b_m\mathcal{J}^0\mathcal{U}_f \quad (44)$$

gdzie $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_f(t)$ i $\mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}_f(t)$ są przetworzonymi za pomocą filtru $F(s)$ dolnoprasmowymi wersjami sygnałów wejścia i wyjścia. Zauważmy, iż wynik filtracji przez *cyfrowo* zrealizowany układ $H = \mathcal{J}^n$ może okazać się niewystarczający i ciągły filtr $F(s)$ może być niezbędny dla uniknięcia skutków utożsamiania częstotliwości.

Widać stąd, że obserwowany dynamiczny obiekt czasu ciągłego (44) modelowany jest równaniem liniowym względem parametrów, które może być wyrażone w formie regresji liniowej jako

$$\mathcal{J}^0\mathcal{Y}_f(t) = \Theta^T \varphi_f(t) + \eta(t) \quad (45)$$

gdzie

$$\Theta^T = [a_1 \ a_2 \dots a_n : b_1 \ b_2 \dots b_m]$$

oraz

$$\varphi_f^T(t) = [-\mathcal{J}^1 y_f \dots -\mathcal{J}^n y_f : \mathcal{J}^{n-m} u_f \ \mathcal{J}^{n-m+1} u_f \dots \mathcal{J}^n u_f](t)$$

i $\eta(t)$ jest funkcją błędu równania.

W procesie identyfikacji, który jest realizowany w dziedzinie czasu dyskretnego (z zastosowaniem dyskretnej aproksymacji $J^1(z) \approx \mathcal{J}^1(s)$), przetwarzane są jedynie próbki przefiltrowanych sygnałów, tj. $u_f(k) = u_f(kT)$, $y_f(k) = y_f(kT)$ oraz $\varphi_f(k) = \varphi_f(kT)$:

$$J^0 y_f(k) = \Theta^T \varphi_f(k) + \eta(k) \quad (46)$$

prowadząc w rezultacie do mieszanej dyskretno-ciągłej formuły modelu regresyjnego, która wbrew pozornie dyskretnej postaci zachowuje oryginalny sposób parametryzacji równania różniczkowego układu ciągłego (41).

Pozostaje zatem do rozwiązania problem aproksymacji ciągłego przetwarzania $\mathcal{J}^1(s)$, niezbędnego do wyznaczania elementów wektora regresji φ_f , za pomocą równoważnego dyskretnego przetwarzania $J^1(z)$ próbek sygnałów $u_f(k)$ i $y_f(k)$.

2.2. Problem dyskretnej aproksymacji

Przedstawiona w Sekcji 1 metodologia dyskretnej aproksymacji prowadzi do jawnych rozwiązań (bez konieczności odwoływania się do procedur optymalizacyjnych), umożliwia zachowanie naturalnej interpretacji parametrów i zmiennych modelowanych układów czasu ciągłego oraz uwzględnienie wiedzy o warunkach pracy układu, pozwala też projektantowi na swobodny dobór okresu próbkowania.

Formuła modelu (41-46) jest odpowiednia dla metody dopasowania wejściowo-wyjściowego (27-29) łącznie z rozwiniętym schematem (38-39) normalnych operatorów całkowania $\Xi_r^i(z) \Rightarrow J^1(z)$, których zadaniem jest aproksymacja elementów wielokrotnego całkowania $\mathcal{J}^1(s)$. Proponowane podejście jest uogólnieniem metod prezentowanych w pracach [10, 11], które można zakwalifikować do prostych metod operatorowych.

Zastosowanie normalnych operatorów całkowania

Dyskretne operatory całkowania $\Xi_r^i(z)$ podane w (39) mogą być tak zaprojektowane, aby zapewnić jednocześnie dopasowanie do sygnałów na wejściu i wyjściu identyfikowanego układu. Parametr r , który odczuwa rząd interpolacji zastosowanej przy numerycznym całkowaniu, powinien być dopasowany do postaci całkowanego sygnału. Optymalnym rozwiązaniem [3] jest przyjęcie r jako rzędu wielomianowej funkcji sklejanej odpowiedniej do aproksymacji całkowanego sygnału pomiędzy punktami próbkowania.

Stosując normalne operatory całkowania do wyznaczenia dyskretnej aproksymacji (46) modelu regresyjnego (45), uzyskujemy $J^0 = 1$ oraz próbki wektora regresji

$$\varphi_f^T(k) = [-\Xi_r^1 y_f - \Xi_r^2 y_f \dots - \Xi_r^n y_f : \Xi_q^{n-m} u_f \ \Xi_q^{n-m+1} u_f \dots \Xi_q^n u_f](k) \quad (47)$$

gdzie r i q są odpowiednio rzędami interpolacji zastosowanymi w odniesieniu do analogowo odfiltrowanych sygnałów pomiarowych próbkowanych na wejściu i wyjściu identyfikowanego układu.

Temperowanie operatorów całkowania

Zasadniczą trudność związaną ze stosowaniem operatorów całkowania stanowi fakt, iż są one niestabilne (w sensie BIBO) w układzie otwartym, który jest reprezentowany formułą (47). Aby nie dopuścić do numerycznego przepełnienia powstającego wskutek całkowania sygnałów o niezerowej wartości średniej proponuje się okresowe zerowanie algorytmu estymacji [12]. Jednak w przypadku układów wyższego rzędu przedział czasu potrzebny do przeprowadzenia skutecznej estymacji jest zwykle niewystarczający. Niewielkie przesunięcie "całkującego" bieguna transmitancji $\Xi_r^1(z)$ z punktu $z=1$ do wnętrza koła jednostkowego płaszczyzny z [10], może być również niewystarczające, ponieważ dla $r \geq 2$ w transmitancji tej występują również inne niestabilne bieguny (w parach odwrotnych). Jednocześnie bezpośrednie metody stabilizacji operatorów normalnych wprowadzając zniekształcenia fazowe [1] wydają się nieodpowiednie dla celów identyfikacji.

Dalej proponuje się dwie metody temperowania charakterystyk dyskretnych integratorów do zastosowań w algorytmach bezpośrednich (*on line*). Pierwsza z nich polega na transformacji oryginalnego szeregu dopasowanych filtrów typu IIR w równoważny szereg funkcji przenoszenia, a następnie w szereg operacji, które umożliwiają formowanie wektora regresji za pomocą operacji typu FIR. Druga metoda pozwala na uproszczenie procedury identyfikacyjnej poprzez zastosowanie stabilizowanych formuł całkowania typu IIR niższego rzędu.

2.3. Uzgodnione operatory typu FIR

Celem przedstawionej poniżej procedury jest zamiana oryginalnych dopasowanych operatorów typu IIR występujących w modelu regresyjnym na uzgodnione operatory typu FIR reprezentujące numeryczne całkowanie w ograniczonym horyzoncie czasowym. Omija się w ten sposób problem niestabilnych biegunów.

Procedura zasadza się na obserwacji, że elementarny dyskretny schemat całkowania prostokątnego zbudowany na pojedynczym elemencie opóźniającym (z^{-1}) może być zrealizowany w równoważnej postaci z l -krotnym opóźnieniem (postaci l -opóźnionej). Zastosowany tu parametr l będzie później interpretowany jako długość horyzontu całkowania typu FIR.

$$I(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{P_l(z^{-1})}{1-z^{-l}} \quad (48)$$

gdzie $P_l(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(l-1)}$.

Operatory rozwinięte

Pierwszy ze sposobów związany jest z rozwiniętym schematem (pośredniej) dyskretnej aproksymacji (37-40). Dopasowane operatory całkowania (39) mogą być wyrażone w następującej równoważnej l -opóźnionej postaci:

$$\Xi_{r,l}^I(z) = T^l \frac{r!}{(r+l)!} \frac{N_{r+l}(z^{-1}) P_l^I(z^{-1})}{N_r(z^{-1}) (1-z^{-l})^l} \quad (49)$$

Biorąc pod uwagę rząd (n) ciągłego obiektu (41), operatory te można przedstawić w postaci l -opóźnionych transmitancji (integratorów) charakteryzujących się wspólnym mianownikiem:

$$\Xi_{r,l}^{I,T}(z) = \frac{M_{r,l}^{I,T}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-l})^{n-l}}{N_r(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-l})^n} \quad (50)$$

gdzie $M_{r,l}^{I,T}(z^{-1}) = \frac{r! T^l}{(r+l)!} N_{r+l}(z^{-1}) P_l^I(z^{-1})$.

Stosując operatory (50) do konstrukcji wektora regresji (47) i dokonując prostych przekształceń równania (46) uzyskuje się następujące równanie regresji

$$J_{r,q}^{0,n} y_f(k) = \Phi^T \varphi_f(k) + \eta(k) \quad (51)$$

gdzie

$$\Phi_f^T(k) = [-J_{r,q}^{1,n} y_f \quad -J_{r,q}^{2,n} y_f \quad \dots \quad -J_{r,q}^{n,n} y_f; \quad J_{q,r}^{n-m,n} u_f \quad J_{q,r}^{n-m+l,n} u_f \quad \dots \quad J_{q,r}^{n,n} u_f](k) \quad (52)$$

oraz uzgodnione dyskretne operatory $J^I(z)$ (różniące się formą i interpretacją od ciągłych operatorów $J^I(s)$)

$$J_{r,q}^{I,n}(z) = J_{r,q,l}^{I,n,T}(z) = M_{r,l}^{I,T}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-l})^{n-l} = \frac{r! T^l}{(r+l)!} N_{r+l}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) P_l^I(z^{-1}) (1-z^{-l})^{n-l} \quad (53)$$

odpowiadają za realizację operacji całkowania typu FIR (w ograniczonym przedziale czasu).

Zauważmy, iż dla granicznych wartości indeksu l mamy

$$J_{r,q}^{0,n} = J_{q,r}^{0,n} = N_r(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-l})^n \quad (54)$$

oraz

$$J_{r,q}^{n,n} = \frac{r! T^n}{(r+n)!} N_{r+n}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) P_l^n(z^{-1}) \neq J_{q,r}^{n,n}(z) \quad \text{dla } r \neq q \quad (55)$$

Operatory proste

Z pojedynczego normalnego operatora całkowania $\Xi_{r,l}^I(z)$ z (39), dopasowanego do przyjętego kształtu całkowanych sygnałów, wywieść można odpowiednie l -opóźnione operatory

$$\Xi_{r,l}^I(z) = \left(\frac{T}{r+1} \right)^l \frac{N_{r+l}^I(z^{-1}) P_l^I(z^{-1})}{N_r^I(z^{-1}) (1-z^{-l})^l} \quad (56)$$

W konsekwencji tego podejścia zarówno na wejściu, jak i wyjściu stosowany jest ten sam rząd interpolacji $q=r$.

Operatory l -opóźnione przystosowane do identyfikacji układu n -tego rzędu mają wówczas postać

$$\Xi_{r,l}^{I,n}(z) = \frac{M_{r,l}^{I,T}(z^{-1}) N_r^{n-l}(z^{-1}) (1-z^{-l})^{n-l}}{N_r^n(z^{-1}) (1-z^{-l})^n} \quad (57)$$

gdzie $M_{r,l}^{i,T}(z^{-1}) = \left(\frac{T}{r+1} \right)^i N_{r+i}^i(z^{-1}) P_l^i(z^{-1})$.

Odpowiadający temu model regresyjny wyraża się następująco

$$J_r^{0,n} y_f(k) = \Theta^T \varphi_f(k) + \eta(k) \quad (58)$$

gdzie wektor regresji $\varphi_f(k)$

$$\varphi_f^T(k) = [-J_r^{1,n} y_f - J_r^{2,n} y_f \dots - J_r^{n,n} y_f : J_r^{n-m,n} u_f J_r^{n-m+1,n} u_f \dots J_r^{n,n} u_f](k) \quad (59)$$

oraz

$$\begin{aligned} J_r^{i,n} = J_r^{i,n}(z) &= J_{r,l}^{i,nT}(z) = M_{r,l}^{i,T}(z^{-1}) N_r^{n-i}(z^{-1}) (1-z^{-1})^{n-i} = \\ &= \frac{T^i}{(r+1)^i} N_{r+i}^i(z^{-1}) N_r^{n-i}(z^{-1}) P_l^i(z^{-1}) (1-z^{-1})^{n-i} \end{aligned} \quad (60)$$

Dla granicznych wartości mamy

$$J_r^{0,n}(z) = N_r^n(z^{-1}) (1-z^{-1})^n \quad (61)$$

$$J_r^{n,n}(z) = \frac{T^n}{(r+1)^n} N_{r+n}^n(z^{-1}) P_l^n(z^{-1}) \quad (62)$$

Zauważmy, iż w przypadku operatorów uzgodnionych J (zarówno prostych (60), jak i rozwiniętych (53)) spełniona jest odpowiednia "rodzicielska" relacja ((57) albo (50))

$$\Xi_{r,l}^{i,n}(z) = \frac{J_{r,q}^{i,n}(z)}{J_{r,q}^{0,n}(z)} \quad \text{albo} \quad \Xi_{r,l}^{i,n}(z) = \frac{J_r^{i,n}(z)}{J_r^{0,n}(z)} \quad (63)$$

oraz że metoda przedstawiona w [11] zawiera się w schemacie prostym (56-60) z $r = 1$ związanym z całkowaniem trapezoidalnym.

2.4. Uzgodnione operatory typu IIR

W przypadku układów ciągłych niskiego rzędu możliwy jest również inny sposób temperowania charakterystyk integratorów stosowanych w przetwarzaniu wektora regresji $\varphi(k)$ polegający na stabilizacji ich funkcji przenoszenia (typu IIR).

Rozważmy model układu opisany równaniami (46-47) i sprowadźmy go do postaci (51)-(52)

$$J_{r,q}^{0,n} y_f(k) = \Theta^T \varphi_f(k) + \eta(k) \quad (64)$$

gdzie elementy wektora regresji (52) wyznaczane są za pomocą filtrów

$$J_{r,q}^{i,n} = \frac{r! T^i}{(r+i)!} N_{r+i}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-1})^{n-i} \quad (65)$$

kóre w przypadku granicznych wartości indeksów można wyrazić następująco

$$J_{r,q}^{0,n} = N_r(z^{-1}) N_q(z^{-1}) (1-z^{-1})^n = J_{q,r}^{0,n} \quad (66)$$

$$J_{r,q}^{n,n} = \frac{r! T^n}{(r+n)!} N_{r+n}(z^{-1}) N_q(z^{-1}) \neq J_{q,r}^{n,n} \quad \text{dla } r \neq q \quad (67)$$

Wprowadźmy sparametryzowane wielomiany stowarzyszone z operatorami $J_{r,q}^{0,n}(z^{-1})$

$$D(z^{-1}) = \gamma + J_{r,q}^{0,n}(z^{-1}) \quad (68)$$

kóre mają wszystkie swoje zera we wnętrzu koła jednostkowego płaszczyzny z . Parametr γ jest nieujemnym współczynnikiem korekcyjnym/stabilizującym, za pomocą którego zapewnia się stabilność wielomianów (68).

Dzielać obie strony równania (64) przez $D(z^{-1})$ uzyskuje się model regresyjny, który można wyrazić jako

$$J_{r,q}^{0,n} y_F(k) = \Theta_F^T \varphi_F(k) + \eta_F(k) \quad (69)$$

gdzie

$$y_F(k) = \frac{y_f(k)}{D(z^{-1})} = D_F(z^{-1}) y_f(k) \quad \text{oraz} \quad \varphi_F(k) = \frac{\varphi_f(k)}{D(z^{-1})} = D_F(z^{-1}) \varphi_f(k) \quad (70)$$

i odpowiednio

$$\varphi_F^T(k) = [-J_{r,q}^{1,n} y_F - J_{r,q}^{2,n} y_F \dots - J_{r,q}^{n,n} y_F : J_{q,r}^{n-m,n} u_F J_{q,r}^{n-m+1,n} u_F \dots J_{q,r}^{n,n} u_F](k) \quad (71)$$

Powyższa operacja oznacza dodatkową filtrację sygnałów wejściowego i wyjściowego. Zauważmy, iż tak jak poprzednio różne rzędy interpolacji mogą być zastosowane do indywidualnego dopasowania układu identyfikacji do sygnałów obserwowanych na wejściu i wyjściu układu ciągłego.

Warto również zauważyć, iż opisany wyżej mechanizm filtracji może być interpretowany jako rezultat dodania do obu stron równania (64) wielkości $\gamma y_f(n)$. Stąd też widać, że w przypadku $\gamma = 0$ uzyskuje się "wzorcową" formułę całkowania (39).

Należy jednak mieć na uwadze, iż dla układów wyższego rzędu (n, i) oraz wyższych rzędów interpolacji (r, q) , współczynnik γ niezbędny do stabilizacji $D(z^{-1})$ przyjmuje znaczne wartości [8]. Dlatego w celu uniknięcia niepożądanego stłumienia sygnałów pomiarowych w transmitancji filtra $D(z^{-1})$ wprowadzono dodatkowy współczynnik wzmacnienia k :

$$D_F(z^{-1}) = \frac{k}{\gamma + J_{r,q}^{0,n}(z^{-1})} = \frac{d_0}{1 + d_1 z^{-1} + \dots} \quad (72)$$

oraz $d_0 = k/(1 + \gamma)$.

3. Podsumowanie

Przedmiotem pracy było transformacyjne podejście do projektowania cyfrowych układów sterowania, w tym układów identyfikacji i sterowania adaptacyjnego, polegające na przekształceniu modeli czasu ciągłego (uzyskanych w wyniku projektu właściwego dokonanego w dziedzinie ciągłej) w dziedzinę czasu dyskretnego. Do istotnych zalet takiego podejścia należy możliwość naturalnej interpretacji parametrów i zmiennych opracowanych modeli oraz możliwość implementacji układów cyfrowych z różnymi częstotliwościami próbkowania.

Pokazano, że większość istniejących metod dyskretyzacji może być zakwalifikowana do jednej z dwu grup, w których w sposób bezpośredni albo pośredni wykorzystuje się przekształcenie Z.

Metody bezpośrednie przystosowane są do dyskretyzacji układów opisywanych za pomocą transmitancji niskiego rzędu, prowadzą do modeli dyskretnych o wymaganej relacji wejście-wyjście w przypadku testowych sygnałów wejściowych o nieograniczonym widmie. Modele dyskretne syntezowane metodami pośrednimi, które charakteryzują się prostą realizacją (podstawianie), mogą opierać się na zadanej, wewnętrznej strukturze złożonego modelu ciągłego oraz na zasadzie częściowego (wewnętrzznego) dopasowania. Układy takie nie spełniają jednak modelowych relacji wejście-wyjście oraz zastrzeżone są dla pobudzeń o ograniczonym widmie.

Istotnym problemem większości metod dyskretyzacji jest zapewnienie stabilności uzyskiwanych modeli dyskretnych, w szczególności modeli wyższego rzędu, które z tego powodu muszą być poddawane stosownej korekcji.

W drugiej części pracy rozważono zagadnienie dyskretnej aproksymacji algorytmów identyfikacji obiektów czasu ciągłego. W celu zastosowania dyskretnych algorytmów estymacji parametrycznej opierających się na modelowaniu błędu równania, w którym występuje liniowa zależność od parametrów identyfikowanego obiektu, niezbędną informację o przebiegu obserwowanych sygnałów i ich całek zawiera się w wektorze regresji, który wyznaczany jest za pomocą szeregu uzgodnionych (dopasowanych i utemperowanych/ustabilizowanych) operatorów aproksymujących działanie całkujące.

Zaproponowano dwie metody "temperowania" charakterystyk dyskretnych normalnych operatorów całkowania do zastosowań w algorytmach bezpośrednich (*on line*). Pierwsza z nich polega na transformacji oryginalnego szeregu dopasowanych filtrów typu IIR w równoważny szereg filtrów typu FIR, które umożliwiają stabilne formowanie wektora regresji. Druga metoda pozwala na zmniejszenie złożoności procedury identyfikacyjnej poprzez zastosowanie stabilizowanych filtrów całkujących typu IIR (charakteryzujących się transmitancjami o niższym rzędzie).

Uzyskane w ten sposób algorytmy uwzględniają działanie układu identyfikacji w czasie rzeczywistym i w trybie bezpośrednim oraz (ze względu na "ograniczoną długość pamięci") nie wymagają znajomości warunków początkowych. Algorytmy IIR charakteryzują się niższą złożonością obliczeniową i mniejszym opóźnieniem estymacji, ale zastosowanie ich ogranicza się do układów niskiego rzędu z niższym poziomem szumów.

Przeprowadzone wstępnie badania symulacyjne wykazały dużą użyteczność (w kategoriach szybkości i dokładności estymacji) opracowanych algorytmów - z tym zastrzeżeniem, że osiągalna jest właściwa (choćby przybliżona) ocena parametrów kształtu sygnałów mierzonych na wejściu i wyjściu obserwowanego układu.

4. Literatura

- [1] Z. Kowalczyk, "On Discretization of Continuous-Time State-Space Models: A Stable Normal Approach," *IEEE Trans.*, vol. CAS-38, no. 12, 1991, pp. 1460-1477
- [2] Z. Kowalczyk, "Competitive Identification for Self-Tuning Control: Robust Estimation Design and Simulation Experiments," *Automatica*, vol. 28, no. 1, 1992, pp. 193-201
- [3] Z. Kowalczyk, "Dyskretne Modele w Projektowaniu Układów Sterowania" *Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej*, vol. 78, No. 493, 1992, str. 1-166 (monografia)
- [4] Z. Kowalczyk, "Discrete Approximation of Continuous-Time Systems - A Survey," *IEE Proceedings-G*, vol. 140, no. 4, 1993, pp. 264-278
- [5] Z. Kowalczyk, "Closed-Form Discrete-Time Modelling of Continuous Systems," *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, (Groningen, The Netherlands: June 28 - July 1, 1993) vol. 2, pp. 444-449
- [6] Z. Kowalczyk, "Discrete-Time Realization of On-Line Continuous-Time Process Identification," *Proc. IASTED Intern. Conf. on Systems and Control*, (Lugano, Switzerland: June 20-22, 1994) pp. 19-21
- [7] Z. Kowalczyk, "On-Line Continuous-Time System Identification Based on Normal Integrating Operators," *Intern. Symp. on Mathematical Models in Automation and Robotics*, (Międzyzdroje, Poland, Sept. 1-3, 1994) pp. 325-330
- [8] Z. Kowalczyk, "Identification of Low-Order Continuous-Time Systems via Stabilized Matched Integration," *Intern. Symp. on Mathematical Models in Automation and Robotics*, (Międzyzdroje, Poland, Sept. 1-3, 1994) pp. 319-324
- [9] L. Ljung, & T. Soderstrom, *Theory and Practice of Recursive Identification*. (Cambridge: MIT Press, 1983)
- [10] R. Pintelon, & I. Kollar, "Exact Discrete Time Representation of Continuous Time Systems," *Proc. 9th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, (Budapest, Hungary: July 8-12, 1991)
- [11] S. Sagara, & Z.-Y. Zhao, "Numerical Integration Approach to On-Line Identification of Continuous-Time Systems," *Automatica*, vol. 26, no. 1, 1990, pp. 63-74
- [12] H. Unbehauen, & G.P. Rao, "Continuous-Time Approaches to System Identification - A Survey," *Automatica*, vol. 26, no. 1, 1990, pp. 23-35