

STEROWALNOŚĆ ORAZ STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ UKŁADAMI TYPU 2-D

Jerzy Klamka

Streszczenie. W pracy rozpatrzono zagadnienie sterowania z minimalną energią liniowymi, stacjonarnymi dyskretnymi układami dynamicznymi typu 2-D. Przy założeniu całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie układu dynamicznego podano i udowodniono analityczne wzory na sterowanie z minimalną energią oraz na minimalną wartość energii sterowania.

1. Wprowadzenie.

W ciągu kilku ostatnich lat nastąpił bardzo intensywny rozwój badań nad wielowymiarowymi układami dyskretnymi tzn. układami o wielu zmiennych niezależnych. Spośród wielowymiarowych układów dyskretnych najpopularniejsze są tzn. układy typu 2-D, tzn. układy dynamiczne określone w dyskretnych punktach płaszczyzny. Dynamikę takich układów dyskretnych opisuje wektorowe równanie różnicowe o dwóch zmiennych niezależnych [1 - 4].

Zagadnienia sterowania z minimalną energią układami dyskretnymi typu 2-D oraz ogólnie typu M-D rozpatrywane były w licznych publikacjach między innymi w pracach [5 - 14]. W publikacjach tych przedstawiono analityczne rozwiązania zagadnienia sterowania z minimalną energią dla różnych typów wielowymiarowych liniowych układów dyskretnych oraz przy różnych założeniach dotyczących ich sterowalności.

W niniejszej pracy rozpatrzono zagadnienie sterowania z minimalną energią dla liniowego stacjonarnego układu dyskretnego typu 2-D przy założeniu całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie. Całkowita sterowalność w ustalonym prostokącie rozpatrywana była w pracy [12], gdzie sformułowano liczne kryteria jej badania. Niniejsza praca jest rozszerzeniem prac [6 - 11], polegającym na wyznaczeniu sterowania minimalno-energetycznego przeprowadzającego dany układ dynamiczny z zadanych warunków brzegowych do stanu końcowego będącego zbiorem wszystkich lokalnych wektorów stanu na dwóch brzegach prostokąta. Zagadnienie takie nie było do tej pory rozpatrywane w literaturze dotyczącej układów dyskretnych typu 2-D.

2. Opis układu dynamicznego.

Niech będzie dany liniowy skończenie-wymiarowy układ dynamiczny dyskretny typu 2-D opisany następującym wektorowym równaniem różnicowym [4], [5] .

$$x(i+1, j+1) = A_0 x(i, j) + A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) + Bu(i, j) \quad (1)$$

określonym w prostokącie $P_{rs} = [(0,0), (r,s)] = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (0,0) \leq (i,j) \leq (r,s)\}$

gdzie $x(i,j) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu lokalnego w punkcie (i,j) ,

$u(i,j) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sterowań w punkcie (i,j) ,

A_0, A_1, A_2 są stałymi $n \times n$ -wymiarowymi macierzami,

B jest stałą $n \times m$ -wymiarową macierzą,

Z jest zbiorem liczb całkowitych.

Warunki brzegowe potrzebne do rozwiązania równania różnicowego (1) są postaci:

$$x(i,0) = x_{i0} \in \mathbb{R}^n, \text{ dla } i = 0, 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

$$x(0,j) = x_{0j} \in \mathbb{R}^n, \text{ dla } j = 0, 1, 2, \dots, s$$

Wiadomo, [4], [5], że rozwiązanie równania różnicowego (1) z warunkami brzegowymi (2) można przedstawić w zwartej formie wykorzystując w tym celu tzw. macierz

transycji układu 2-D, G_{ij} , $i, j = -1, 0, 1, 2, \dots$ zdefiniowaną następująco [4], [5]

$$G_{ij} = A_0 G_{i-1, j-1} + A_1 G_{i-1, j} + A_2 G_{i, j-1} = G_{i-1, j-1} A_0 + G_{i-1, j} A_1 + G_{i, j-1} A_2 \quad (3)$$

$$G_{00} = I_{n \times n}$$

$$G_{ij} = 0_{n \times n} \text{ dla } i = -1 \text{ lub } j = -1.$$

Rozwiązanie $x(k,l)$ w punkcie $(k,l) \in P_{rs}$ równania różnicowego (1) z warunkami brzegowymi (2) jest postaci następującej [4], [5]:

$$\begin{aligned} x(k,l) = & \sum_{i=1}^{k-1} (G_{k-i, l-1} A_2 + G_{k-i, l-1} A_0) x(i,0) + G_{k-1, l-1} A_0 x(0,0) + \\ & + \sum_{j=1}^{l-1} (G_{k-1, l-j} A_1 + G_{k-1, l-j-1} A_0) x(0,j) + G_{k-1, l-1} Bu(0,0) + \\ & + \sum_{j=1}^{l-1} G_{k-j-1, l-1} Bu(0,j) + \sum_{i=1}^{k-1} G_{k-1, l-j-1} Bu(i,0) + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l-1} G_{k-i-1, l-j-1} Bu(i,j) \end{aligned} \quad (4)$$

Postać rozwiązania (4) będzie odgrywała istotną rolę przy rozwiązywaniu zadania sterowania z minimalną energią układem dynamicznym (1).

3. Podstawowe definicje i twierdzenia.

Istotnym założeniem gwarantującym istnienie rozwiązania zagadnienia sterowania z minimalną energią jest odpowiednio zdefiniowana sterowalność układu dynamicznego. Dla układu typu 2-D opisanego równaniem różnicowym (1) można wprowadzić kilka różnych definicji sterowalności [4 - 12]. W niniejszej pracy ograniczymy się jedynie do definicji całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie P_{rs} [12].

Definicja 1. Układ dynamiczny (1) nazywa się całkowicie sterowalnym w prostokącie P_{rs} , jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych (2) oraz dowolnych wektorów $x_{r1} \in R^n$, $1=1,2,\dots,s-1$, $x_{ks} \in R^n$, $k=1,2,\dots,r-1$, oraz $x_{rs} \in R^n$, istnieje sekwencja sterowań $\{u(i,j): (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$, taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań rozwiązanie $x(i,j)$, $(i,j) \in P_{rs}$ spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} x(r,1) &= x_{r1} \quad , \quad 1 = 1,2,\dots,s-1 \\ x(k,s) &= x_{ks} \quad , \quad k = 1,2,\dots,r-1 \\ x(r,s) &= x_{rs} \end{aligned} \quad (5)$$

Można łatwo wykazać, że całkowita sterowalność w prostokącie P_{rs} implikuje lokalną sterowalność w prostokącie P_{rs} [12]. Należy również podkreślić, że w definicji całkowitej sterowalności nie nakłada się żadnych ograniczeń na zbiór wartości sterowań. Warunki konieczne i wystarczające całkowitej sterowalności w prostokącie P_{rs} układu dynamicznego (1) zostały sformułowane i dowiedzione w pracy [12] w oparciu o postać rozwiązania równania różnicowego (1) oraz odpowiednio określoną macierz całkowitej sterowalności. Ponieważ rozwiązanie zagadnienia sterowania z minimalną energią wymaga założenia całkowitej sterowalności układu (1), więc w dalszej części niniejszego podrzędziału zostaną przytoczone bez dowodów zasadnicze twierdzenia dotyczące całkowitej sterowalności układu dynamicznego (1). W tym celu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} G_{i-1,j}^B & G_{i-2,j}^B & \dots & G_{1,j}^B & G_{0,j}^B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$Q_{i,j}$ są $n \times m_i$ -wymiarowymi macierzami dla $i = 1,2,\dots,r$, $j = 1,2,\dots,s-1$

$$\tilde{Q}_{i,j} = \begin{bmatrix} G_{i-1,s-j-1}^B & G_{i-2,s-j-1}^B & \dots & G_{1,s-j-1}^B & G_{0,s-j-1}^B & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\tilde{Q}_{i,j}$ są $n \times m_r$ -wymiarowymi macierzami dla $i = 1,2,\dots,r$, $j = 1,2,\dots,s-1$.

Za pomocą macierzy $Q_{i,j}$ oraz $\tilde{Q}_{i,j}$ określa się $n(r+s-1) \times m_{rs}$ -wymiarową macierz $W(r,s)$, która odgrywa zasadniczą rolę przy badaniu całkowitej sterowalności

$$W(r,s) = \begin{bmatrix} Q_{r,0} & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & \dots & Q_{r,s-2} & 0 \\ \tilde{Q}_{1,0} & \tilde{Q}_{1,1} & \tilde{Q}_{1,2} & \dots & \tilde{Q}_{1,s-2} & \tilde{Q}_{1,s-1} \\ \tilde{Q}_{2,0} & \tilde{Q}_{2,1} & \tilde{Q}_{2,2} & \dots & \tilde{Q}_{2,s-2} & \tilde{Q}_{2,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{Q}_{r-1,0} & \tilde{Q}_{r-1,1} & \tilde{Q}_{r-1,2} & \dots & \tilde{Q}_{r-1,s-2} & \tilde{Q}_{r-1,s-1} \\ \tilde{Q}_{r,0} & \tilde{Q}_{r,1} & \tilde{Q}_{r,2} & \dots & \tilde{Q}_{r,s-2} & \tilde{Q}_{r,s-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Twierdzenie 1 [12]. Układ dynamiczny (1) jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzęd } W(r,s) = n(r+s-1) \quad (9)$$

Twierdzenie 2 [12]. Układ dynamiczny (1) jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(W(r,s)W^T(r,s)) \neq 0 \quad (10)$$

Macierz $W(r,s)W^T(r,s)$ występująca w relacji (10) nosi nazwę macierzy całkowitej sterowalności. Jest to macierz symetryczna $n(r+s-1) \times n(r+s-1)$ -wymiarowa o stałych współczynnikach zależnych jedynie od parametrów układu dynamicznego (1).

Wniosek 1 [12]. Układ dynamiczny (1) jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy macierz całkowitej sterowalności $W(r,s)W^T(r,s)$ jest dodatnio określona.

Z cytowanego powyżej twierdzenia 1 wynikają pewne zależności wiążące wymiarowość wektorów stanów lokalnych oraz wielkość prostokąta P_{rs} z pojęciem całkowitej sterowalności w prostokącie P_{rs} .

Wniosek 2 [12]. Jeżeli $n(r+s-1) > nrs$ to układ dynamiczny (1) nie jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} .

Podane powyżej twierdzenia i wnioski z nich płynące będą wykorzystane w dalszej części artykułu do rozwiązania zagadnienia sterowania z minimalną energią

4. Sterowanie z minimalną energią.

W przypadku, gdy układ dynamiczny (1) jest całkowicie sterowalny w ustalonym prostokącie P_{rs} , istnieje na ogół wiele różnych sekwencji sterowań $\{u(i,j) : (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$ przeprowadzających układ z zadanych warunków brzegowych (2) do żądanego stanu końcowego reprezentowanego równościami (5). Problem sterowania z minimalną energią polega na wyznaczeniu spośród nich sekwencji sterowań $\{u(i,j) : (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$ minimalizującej wskaźnik jakości postaci następującej :

$$J(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} u^T(i,j) Q u(i,j) \quad (11)$$

gdzie Q jest $m \times m$ -wymiarową, symetryczną, dodatnio określoną macierzą wagową. Wskaźnik jakości $J(u)$ będący nieujemnie określoną formą kwadratową, określa energię sterowania. Jest on szczególnym przypadkiem ogólnego kwadratowego wskaźnika jakości zawierającego również wektory stanów lokalnych $x(i,j)$, dla $(i,j) \in P_{rs}$.

W celu skrócenia skomplikowanego zapisu wprowadza się następujące oznaczenia :

$$R^{n(r-1)} \ni \tilde{x}_{rs}^T = [x_{r1}^T, x_{r2}^T, \dots, x_{r,s-2}^T, x_{r,s-1}^T, x_{1,s}^T, x_{2,s}^T, \dots, x_{r-2,s}^T, x_{r-1,s}^T, x_{r,s}^T] \quad (12)$$

Wektor $\tilde{x}_{rs}$ reprezentuje warunki końcowe na dwóch brzegach prostokąta P_{rs} .

$$R^{n(r+s+1)} \ni \tilde{x}_{ors}^T = [x_{00}^T, x_{10}^T, \dots, x_{1,0}^T, \dots, x_{r-1,0}^T, x_{r,0}^T, x_{0,1}^T, x_{0,2}^T, \dots, x_{0,j}^T, x_{0,j+1}^T, \dots, x_{0,s-1}^T, x_{0,s}^T] \quad (13)$$

Wektor $\tilde{x}_{ors}$ reprezentuje dane warunki brzegowe na dwóch brzegach prostokąta P_{rs} .

$$R^{n(r+s-1)} \ni \tilde{x}_{rs}^T = [x^T(r,1), x^T(r,2), \dots, x^T(r,s-2), x^T(r,s-1), x^T(1,s), \dots, x^T(r-2,s), x^T(r-1,s), x^T(r,s)] \quad (14)$$

Wektor $\tilde{x}_{rs}$ reprezentuje wartości końcowych stanów lokalnych na dwóch brzegach prostokąta P_{rs} .

$$R^{mrs} \ni u_{rs}^T = [u^T(0,0), u^T(1,0), \dots, u^T(r-1,0), u^T(0,1), u^T(0,2), u^T(0,3), \dots, u^T(0,s-1), u^T(1,1), u^T(1,2), \dots, u^T(r-1,s-1)] \quad (15)$$

Wektor u_{rs} reprezentuje odpowiednio uporządkowaną sekwencję wektorów sterowań w prostokącie $P_{r-1,s-1}$.

$$H_{11} = \begin{bmatrix} G_{r-1,0}^A & G_{r-1,0}^A + G_{r-2,0}^A & \dots & G_{r-1,0}^A + G_{r-1-1,0}^A & \dots \\ G_{r-1,1}^A & G_{r-1,1}^A + G_{r-2,1}^A & \dots & G_{r-1,1}^A + G_{r-1-1,1}^A & \dots \\ G_{r-1,2}^A & G_{r-1,2}^A + G_{r-2,2}^A & \dots & G_{r-1,2}^A + G_{r-1-1,2}^A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{r-1,s-3}^A & G_{r-1,s-3}^A + G_{r-2,s-3}^A & \dots & G_{r-1,s-3}^A + G_{r-1-1,s-3}^A & \dots \\ G_{r-1,s-2}^A & G_{r-1,s-2}^A + G_{r-2,s-2}^A & \dots & G_{r-1,s-2}^A + G_{r-1-1,s-2}^A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G_{1,0}^A + G_{0,0}^A & G_{0,0}^A & \dots & \dots \\ \dots & G_{1,1}^A + G_{0,1}^A & G_{0,1}^A & \dots & \dots \\ \dots & G_{1,2}^A + G_{0,2}^A & G_{0,2}^A & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G_{1,s-3}^A + G_{0,s-3}^A & G_{0,s-3}^A & \dots & \dots \\ \dots & G_{1,s-2}^A + G_{0,s-2}^A & G_{0,s-2}^A & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} G_{r-1,0}^A & \dots & 0 & \dots \\ G_{r-1,1}^A + G_{r-1,0}^A & \dots & 0 & \dots \\ G_{r-1,2}^A + G_{r-1,1}^A & \dots & G_{r-1,0}^A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{r-1,s-3}^A + G_{r-1,s-4}^A & \dots & G_{r-1,s-j-2}^A + G_{r-1,s-j-3}^A & \dots \\ G_{r-1,s-2}^A + G_{r-1,s-3}^A & \dots & G_{r-1,s-j-1}^A + G_{r-1,s-j-2}^A & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & G_{r-1,0}^A & 0 & 0 \\ \dots & G_{r-1,1}^A + G_{r-1,0}^A & G_{r-1,0}^A & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$H_{21} = \begin{bmatrix} G_{0,s-1}^A & G_{0,s-1}^A 2 & \dots & 0 \\ G_{1,s-1}^A & G_{1,s-1}^A 2 + G_{0,s-1}^A 0 & \dots & 0 \\ G_{2,s-1}^A & G_{2,s-1}^A 2 + G_{1,s-1}^A 0 & \dots & G_{0,s-1}^A 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{x-2,s-1}^A & G_{x-2,s-1}^A 2 + G_{x-3,s-1}^A 0 & \dots & G_{x-1-1,s-1}^A 2 + G_{x-1-2,s-1}^A 0 \dots \\ G_{x-1,s-1}^A & G_{x-1,s-1}^A 2 + G_{x-2,s-1}^A 0 & \dots & G_{x-1,s-1}^A 2 + G_{x-1-1,s-1}^A 0 \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & G_{0,s-1}^A 2 & 0 & 0 \\ \dots & G_{1,s-1}^A 2 + G_{0,s-1}^A 0 & G_{0,s-1}^A 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} G_{0,s-1}^A 1 + G_{0,s-2}^A 0 & \dots & G_{0,s-j}^A 1 + G_{0,s-j-1}^A 0 & \dots \\ G_{1,s-1}^A 1 + G_{1,s-2}^A 0 & \dots & G_{1,s-j}^A 1 + G_{1,s-j-1}^A 0 & \dots \\ G_{2,s-1}^A 1 + G_{2,s-2}^A 0 & \dots & G_{2,s-j}^A 1 + G_{2,s-j-1}^A 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{x-2,s-1}^A 1 + G_{x-2,s-2}^A 0 & \dots & G_{x-2,s-j}^A 1 + G_{x-2,s-j-1}^A 0 & \dots \\ G_{x-1,s-1}^A 1 + G_{x-1,s-2}^A 0 & \dots & G_{x-1,s-j}^A 1 + G_{x-1,s-j-1}^A 0 & \dots \\ \dots & G_{0,1}^A 1 + G_{0,0}^A 0 & G_{0,0}^A 1 & \\ \dots & G_{1,1}^A 1 + G_{1,0}^A 0 & G_{1,0}^A 1 & \\ \dots & G_{2,1}^A 1 + G_{2,0}^A 0 & G_{2,0}^A 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G_{x-2,1}^A 1 + G_{x-2,0}^A 0 & G_{x-2,0}^A 1 & \\ \dots & G_{x-1,1}^A 1 + G_{x-1,0}^A 0 & G_{x-1,0}^A 1 & \end{bmatrix} \quad (19)$$

Wykorzystując oznaczenia (16), (17), (18) oraz (19) tworzy się macierz blokową

$$H(s, s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Macierze $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ są stałymi macierzami o następujących wymiarach :

H_{11} jest macierzą $n(s-1) \times n(r+1)$ -wymiarową ,

H_{12} jest macierzą $n(s-1) \times ns$ -wymiarową,

H_{21} jest macierzą $nr \times n(r+1)$ -wymiarową,

H_{22} jest macierzą $nr \times ns$ -wymiarową.

Zatem macierz blokowa $H(r, s)$ jest macierzą $n(r+s-1) \times n(r+s+1)$ -wymiarową.

Niech $Q(r, s) = \text{diag}(Q, Q, \dots, Q)$ oznacza rozszerzoną macierz wagową $nr \times nr$ -
raz

wymiarową. Wykorzystując macierz $W(r, s)$ określoną wzorem (8) definiuje się symetryczną $n(r+s-1) \times n(r+s-1)$ -wymiarową macierz $W_Q(r, s)$ w sposób następujący :

$$W_Q(r, s) = W(r, s) Q^{-1}(r, s) W^T(r, s) \quad (21)$$

Ponieważ macierz Q jest odwracalna, więc również macierz $Q(r, s)$ jest odwracalna, a zatem macierz $W_Q(r, s)$ jest poprawnie zdefiniowana. Ponadto, założenie całkowitej sterowalności układu dynamicznego (1) w prostokąsie P_{rs} gwarantuje nam na mocy twierdzenia 2 odwracalność macierzy $W(r, s) W^T(r, s)$, a biorąc pod uwagę wzór (21) również odwracalność macierzy $W_Q(r, s)$.

Obecnie sformułowane zostanie zasadnicze twierdzenie dotyczące zagadnienia sterowania z minimalną energią układem dynamicznym typu 2-D postaci (1).

Twierdzenie 3. Niech układ dynamiczny (1) będzie całkowicie sterowalny w prostokąsie P_{rs} , oraz niech $\{u^*(i, j), (i, j) \in P_{r-1, s-1}\}$ będzie sterowaniem przeprowadzającym układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) dożądanego stanu końcowego danego równościami (5). Sterowanie $\{u^0(i, j), (i, j) \in P_{r-1, s-1}\}$ postaci :

$$u_{rs}^0 = Q^{-1}(r, s) W^T(r, s) W_Q^{-1}(r, s) (\tilde{x}_{rs} - H(r, s) \tilde{x}_{ors}) \quad (22)$$

przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) dożądanego stanu końcowego postaci (5) oraz

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} (u^0(i, j))^T Q u^0(i, j) \leq \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} (u^*(i, j))^T Q u^*(i, j) \quad (23)$$

Ponadto minimalna wartość wskaźnika jakości $J(u_{rs}^0)$ jest dana następującym wzorem:

$$J(u_{rs}^0) = \sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} (u^0(i,j))^T Q u^0(i,j) =$$

$$= (\tilde{x}_{rs} - H(r,s)\tilde{x}_{ors})^T W_Q^{-1}(r,s) (\tilde{x}_{rs} - H(r,s)\tilde{x}_{ors}) \quad (24)$$

Dowód. Dowód twierdzenia 3 będzie się składał z trzech części. W pierwszej części wykazemy, że sterowanie u_{rs}^0 dane wzorem (22) przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) do żadanego stanu końcowego danego wzorami (5). Na podstawie wzorów (3), (4) oraz oznaczeń (12) - (20) otrzymuje się zależność:

$$\tilde{x}_{rs} = H(r,s)\tilde{x}_{ors} + W(r,s)u_{rs}^0 \quad (25)$$

Podstawiając do wzoru (25) relację (22) otrzymuje się następujące równości:

$$\tilde{x}_{rs} = H(r,s)\tilde{x}_{ors} + W(rs)Q^{-1}(r,s)W(r,s)W_Q^{-1}(r,s)(\tilde{x}_{rs} - H(rs)\tilde{x}_{ors}) = \tilde{x}_{rs}$$

Zatem sterowanie u_{rs}^0 dane wzorem (22) przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) do żadanego stanu końcowego postaci (5).

W drugiej części dowodu wykazemy prawdziwość nierówności (23). Wykorzystamy do tego celu własności normy i iloczynu skalarnego w przestrzeniach skończenie-wymiarowych. Ponieważ sterowania u_{rs}^0 oraz z założenia u_{rs}^1 przeprowadzają układ dynamiczny (1) z tych samych warunków brzegowych (2) do tego samego stanu końcowego (5), więc zachodzi następująca równość (na podstawie wzoru (25)):

$$W(r,s)u_{rs}^1 = W(r,s)u_{rs}^0$$

Po odjęciu stronami otrzymuje się zależność postaci następującej

$$W(r,s)(u_{rs}^1 - u_{rs}^0) = 0$$

Zatem prawdziwa jest następująca równość

$$\left\langle W(r,s)(u_{rs}^1 - u_{rs}^0), W_Q^{-1}(r,s)(\tilde{x}_{rs} - H(r,s)\tilde{x}_{ors}) \right\rangle_{R^{n(s+r-1)}} = 0 \quad (26)$$

Wykorzystując własności iloczynu skalarnego równość (26) można przekształcić do postaci następującej:

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} \left\langle u^1(i,j) - u^0(i,j), Q u^0(i,j) \right\rangle_{R^n} = 0 \quad (27)$$

Następnie, ponownie wykorzystując własności iloczynu skalarnego oraz normy otrzymuje się zależność następującą:

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} (u^1(i,j))^T Q u^1(i,j) = \sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} (u^0(i,j))^T Q u^0(i,j) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} (u'(i,j) - u^0(i,j))^T Q (u'(i,j) - u^0(i,j)), \quad (28)$$

Ponieważ drugie wyrażenie po prawej stronie wzoru (28) jest zawsze nieujemne (jako forma kwadratowa zbudowana na macierzy Q dodatnio określonej), więc zachodzi nierówność (23). Zatem druga część dowodu została zakończona.

W trzeciej części dowodu wykazemy prawdziwość wzoru (24) określającego minimalną wartość energii sterowania. Podstawiając zależność (22) do wzoru (11) otrzymuje się

$$J(u_{rs}^0) = \sum_{i=0}^{i=r-1} \sum_{j=0}^{j=s-1} (u^0(i,j))^T Q (u^0(i,j)) =$$

$$= \left\langle Q^{-1}(r,s) W^T(r,s) W_Q^{-1}(r,s) (\tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors}), W^T(r,s) W_Q^{-1}(r,s) (\tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors}) \right\rangle$$

Wykorzystując fakt, że macierz $W_Q(r,s)$ jest macierzą symetryczną otrzymuje się:

$$J(u_{rs}^0) = \left\langle (\tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors}), (W(r,s) Q^{-1}(r,s) W^T(r,s) \tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors}) \right\rangle_{R^{n(r+s)}}$$

$$= (\tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors})^T W_Q^{-1}(r,s) (\tilde{x}_{rs} - H(r,s) \tilde{x}_{ors})$$

Zatem trzecia część dowodu została zakończona.

Twierdzenie 3 zostało udowodnione z wykorzystaniem podstawowych własności normy i iloczynu skalarnego w przestrzeniach skończenie-wymiarowych, bez uciekania się do zaawansowanych twierdzeń z dziedziny sterowania optymalnego. Podejście takie było możliwe ze względu na liniowość układu dynamicznego (4), brak ograniczeń na sterowanie, specyficzną postać wskaźnika jakości oraz założenie całkowitej sterowalności układu dynamicznego (1) w prostokącie P_{rs} .

5. Podsumowanie.

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia sterowania z minimalną energią liniowym, stacjonarnym dyskretnym układem dynamicznym typu 2-D. Dzięki założeniu całkowitej sterowalności układu dynamicznego w ustalonym prostokącie oraz brakowi ograniczeń na sterowanie, otrzymano na drodze prostych przekształceń wykorzystujących własności normy i iloczynu skalarnego, analityczne zależności określające sterowanie z minimalną energią oraz odpowiadającą temu sterowaniu minimalną wartość wskaźnika jakości. Wyniki przedstawione w pracy są uogólnieniem na przypadki sterowania do stanu końcowego postaci (5) wcześniejszych prac Autora [6-12].

Wykaz literatury.

- [1] R. Eising : Controllability and observability of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, (1979), no. 1, pp. 132-133.
- [2] E. Fornasini, G. Marchesini : Computation of reachable and observable realizations of spatial filters. International Journal of Control, vol. 25, (1977), no. 4, pp. 623-635.
- [3] E. Fornasini, G. Marchesini : Doubly-indexed dynamical systems : state space models and structural properties. Mathematical System Theory. vol. 12, (1978), no. 1, pp. 59-72.
- [4] T. Kaczorek : Two-Dimensional Linear Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [5] T. Kaczorek : General response formula for two-dimensional linear systems with variable coefficients. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, (1986), no. 2, pp. 278-280.
- [6] T. Kaczorek, J. Klamka : Minimum energy control of 2-D linear systems with variable coefficients. International Journal of Control. vol. 44, (1986), no. 3. pp. 645-650.
- [7] T. Kaczorek, J. Klamka : Minimum energy control for general model of 2-D linear systems. International Journal of Control, vol. 47, (1988), no. 5, pp. 1555-1562.
- [8] T. Kaczorek, J. Klamka : Local controllability and minimum energy control of n-D linear systems. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, serie des sciences techniques, vol. 35, (1987), no. 11-12, pp. 679-685.
- [9] J. Klamka : Controllability and optimal control of 2-D linear systems. Foundations of Control Engineering, vol. 9, (1984), no. 1, pp. 15-24.
- [10] J. Klamka : Controllability of M-dimensional linear systems. Foundations of Control Engineering, vol. 8, (1983), no. 2, pp. 65-74.
- [11] J. Klamka : Controllability of M-dimensional linear discrete systems in Banach spaces. Proceedings of V Polish-English Seminar on Real Time Processes Control, Radziejowice, 1986, pp. 217-226.
- [12] J. Klamka : Sterowalność układów dyskretnych typu 2-D. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka, 1990, (w druku).