# INKLUZJE STOCHASTYCZNE I STOCHASTYCZNE STEROWANIE OPTYMALNE

MICHAŁ KISIELEWICZ*
*Instytut Matematyki WSInż w Zielonej Górze*

WPROWADZENIE. Naturalnym zródlem problemów redukujących się do badania relacji funkcyjnych:

$$x_t - x_s \in \int_s^t F_\tau(x_\tau)d\tau + \int_s^t G_\tau(x_\tau)dw_\tau + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} H_{\tau,z}(x_\tau)\tilde{v}(d\tau, dz), \tag{1}$$

nazywanych w niniejszym opracowaniu inkluzjami stochastycznymi, jest stochastyczna teoria sterowania optymalnego formulowana w odniesieniu do układów opisywanych równaniami stochastycznymi postaci:

$$x_t = \xi_0 + \int_0^t \alpha_\tau(x_\tau, u_\tau)d\tau + \int_0^t \beta_\tau(x_\tau, v_\tau)dw_\tau + \tag{2}$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_{\tau,z}(x_\tau, \gamma_{\tau,z})\tilde{v}(d\tau, dz),$$

gdzie $\alpha = \{(\alpha_t(x,p))_{t\geq 0} : (x,p) \in \mathbb{R}^n \times U\}$,

$$\beta = \{(\beta_t(x,p))_{t\geq 0} : (x,p) \in \mathbb{R}^n \times U\}$$

i

$$\gamma = \{(\gamma_{t,z}(x,p))_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} : (x,p) \in \mathbb{R}^n \times U\}$$

są danymi rodzinami $n$-wymiarowych procesów nieantycypujących zależnych od parametrów $x \in \mathbb{R}^n$ i $p \in U$, zaś calki oznaczają calki stochastyczne względem miary Lebesgue'a $dt$, ruchu Browna $(w_t)_{t\geq 0}$ i miary Poissona $\tilde{v}$. Zbiór $U$ jest podzbiorem pewnej przestrzeni metrycznej ośrodkowej. Parametrami sterującymi lub sterowaniami w układzie (2) są nieantycypujące funkcje losowe $u = (u_t)_{t\geq 0}$, $v = (v_t)_{t\geq 0}$ i $r = (r_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n}$ przyjmujące wartości ze zbioru $U$. Wprowadzając, dla ustalonych $t \geq 0$ i $x, z \in \mathbb{R}^n$, formalne oznaczenia $F_\tau(x) := \{\alpha_t(x,p) : p \in U\}, G_t(x) := \{\beta_t(x,p); p \in U\}$ i $H_{t,z}(x) := \{\gamma_{t,z}(x,p) : p \in U\}$, można podać warunki implikujące równoważność istnienia układu $((x_t)_{t\geq 0}, (u_t)_{t\geq 0}, (v_t)_{t\geq 0}, (\gamma_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n})$ procesów nieantycypujących spełniających równanie (2) z istnieniem nieantycypującego procesu $(x_t)_{t\geq 0}$ spełnjającego inkluzję stochastyczną (1) wraz z warunkiem początkowym $x_0 = \xi_0$, gdzie $\xi_0$ jest daną

* Sprawozdanie z realizacji projektu badawczego Nr 3 3206 9203

$n$-wymiarową zmienną losową. Pozwala to na sprowadzenie badania problemów stochastycznej teorii sterowania optymalnego dla układów opisywanych równaniami postaci (2) do analogicznych problemów dla układów opisywanych inkluzjami stochastycznymi (1). W takim przypadku funkcjonał jakości można określić na zbiorze wszystkich rozwiązań inkluzji (1) spełniających dodatkowe ograniczenia. Uzasadnia to traktowanie badania własności zbioru wszystkich rozwiązań inkluzji stochastycznej (1), spełniających dodatkowe ograniczenia, jako problemów podstawowych stochastycznej teorii sterowania optymalnego. Dlatego też zasadnicze wyniki omawianego projektu badawczego dotyczą teorii inkluzji stochastycznych postaci (1) i własności zbiorów ich rozwiązań.

1. CAŁKI STOCHASTYCZNE. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ będzie daną przestrzenią probabilistyczną zupełną spełniającą następujące założenia:

(i) $\mathcal{F}_0$ – zawiera wszystkie zdarzenia niemożliwe $\sigma$–algebry $\mathcal{F}$,

(ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ dla każdego $t \in [0, \infty)$.

Oznaczmy przez $\mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t)$ rodzinę (rodzinę klas równoważności) wszystkich $n$–wymiarowych procesów nieantycypujących $(f_t)_{t\geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ takich, że $\int_0^\infty |f_t|^2 dt < \infty$; p.n. Niech $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) = \{(f_t) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t) : E\int_0^\infty |f_t|^2 dt < \infty\}$ i niech $\|(f_t)_{t\geq 0}\|_{\mathcal{L}^2} = (E\int_0^\infty |f_t|^2 dt)^{1/2}$.

W sformułowaniach dalszych $(w_t)_{t\geq 0}$ oznaczać będzie skalarny $\mathcal{F}_t$ – ruch Browna startujący z zera, zaś $v(t, A), \mathcal{F}_t$ – miarę Poissona określoną na produkcie $\mathbb{R}_+ \times \beta^n$, gdzie $\beta^n$ jest $\sigma$–algebra borelowską podzbiorów $n$–wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Przez $\tilde{v}(t, A)$ oznaczamy miarę scentrowaną postaci $\tilde{v}(t, A) = v(t, A) - tq(A), t \geq 0, A \in \beta^n$, gdzie $q$ jest miarą na $\beta^n$ taką, że $Ev(t, A) = tq(A)$. Przy tym $q$ jest miarą skończoną na rodzinie $\beta_0^n$ zbiorów borelowskich przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nie zawierających zbiorów $A \in \beta^n$, których domknięcie zawiera zero przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przez $\mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t, q)$ oznaczmy rodzinę wszystkich $\beta_t \otimes \mathcal{F} \times \beta^n$– mierzalnych funkcji $h : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takich, że $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |h_{t,z}|^2 dtq(dz) < \infty$; p.n. o tej własności, że $h(t, \cdot, z)$ jest $\mathcal{F}_t$–mierzalna dla każdego $t \geq 0$ i $z \in \mathbb{R}^n$.

Niech $W^2(\mathcal{F}_t, q) = \{h \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t, q) : E\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |h_{t,z}|^2 dtq(dz) < \infty\}$. Elementy przestrzeni $\mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t, q)$ będziemy oznaczać jako rodziny $(h_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n}$. Dla ustalonych procesów $(g_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t)$ i $(h_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t, q)$ przez $(\int_0^t g_\tau dw_\tau)_{t\geq 0}$ i $(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h_{\tau,z} \tilde{v}(d\tau, dz))_{t\geq 0}$ będziemy oznaczać ich całki stochastyczne względem procesu $(w_t)_{t\geq 0}$ i miary Poissona $\tilde{v}$, odpowiednio. Całki te traktowane są jako rodziny elementów przestrzeni $M_n(\mathcal{F}_t)$; $n$–wymiarowych funkcji wektorowych $\mathcal{F}_t$–mierzalnych.

2. WIELOWARTOŚCIOWE PROCESY STOCHASTYCZNE I ICH CAŁKI. Rozpatrzmy rodzinę $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ multifunkcji $\mathcal{G}_t : \Omega \to Cl(\mathbb{R}^n)$, gdzie $Cl(\mathbb{R}^n)$ oznacza klasę niepustych domkniętych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli dla każdego $t \geq 0$ multifunkcja $\mathcal{G}_t$ jest $\mathcal{F}$–mierzalna, tzn. taka, że dla każdego $\mathbb{C} \in Cl(\mathbb{R}^n)$ mamy $\{\omega \in \Omega : \mathcal{G}_t(\omega) \cap \mathbb{C} \neq 0\} \in \mathcal{F}$, to rodzinę $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ nazywamy wielowartościowym procesem stochastycznym. W podobny sposób jak w przypadku jednowartościowych procesów losowych definiuje się procesy wielowartościowe nieantycypujące względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Bezpośrednio z twierdzenia selekcyjnego Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego wynika, że wielowartościowy proces losowy nieantycypujący posiada nieantycypujący selektor (por.[1], str 7). Dla uproszczenia dalszych sformułowań oznaczmy przez $\mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $\mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ rodziny nieantycypujących procesów wielowartościowych $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ i $(R_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n}$ takich, że $\int_0^\infty \|\mathcal{G}_t\|^2 dt < \infty$ i $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \|R_{t,z}\|^2 dtq(dz) < \infty$; p.n., gdzie $\|A\| = \sup_{a\in A} |a|$ dla $A \in Cl(\mathbb{R}^n)$.

Niech $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $R = (R_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ będą dane. Zbiory $S(\mathcal{G}) = \{(g_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t) : g_t(\omega) \in \mathcal{G}_t(\omega)$ p.w.$\}$ i $S_q(R) = \{(h_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in \mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t, q) : h_{t,z}(\omega) \in R_{t,z}(\omega)$ p.w.$\}$ nazywamy subtrajektorami całkowymi procesów $\mathcal{G}$ i $R$ odpowiednio. Oczywistym jest, że w rozważanym tu przypadku zbiory te są niepuste. Jeżeli ponadto $\mathcal{G}$ i $R$ są takie, że

$$E\int_0^\infty \|(\mathcal{G}_t)\|^2 dt < \infty \quad \text{i} \quad E\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \|R_{t,z}\|^2 dt q(dz) < \infty,$$

to $\qquad S(\mathcal{G}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ i $S_q(R) \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{G}_t, q)$.

Niech $\qquad \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t) = \{\mathcal{G} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t) : E\int_0^\infty \|(\mathcal{G}_t)\|^2 dt < \infty\}$

i $\qquad \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q) = \{R \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t) : E\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \|R_{t,z}\|^2 dt q(dz) < \infty\}$.

Dla dowolnych wielowartościowych procesów $F = (F_t)_{t\geq 0}$, $G = (\mathcal{G}_t) \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t))$ i $R = (R_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ wielowartościowe całki stochastyczne definiujemy jako rodziny $(\int_0^t F_\tau d\tau)_{t\geq 0}$, $(\int_0^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau)_{t\geq 0}$ i $(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz))_{t\geq 0}$ podzbiorów przestrzeni $M_n(\mathcal{F}_t)$ postaci:

$$\int_0^t F_\tau d\tau = \left\{\int_0^t f_\tau d\tau : (f_t)_{t\geq 0} \in S(F)\right\},$$

$$\int_0^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau = \left\{\int_0^t g_\tau dw_\tau : (g_t)_{t\geq 0} \in S(\mathcal{G})\right\}$$

oraz

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz) = \left\{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} h_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz) : (h_{t,z})_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in S_q(R)\right\}.$$

Dla uproszczenia sformułowań prezentowanych dalej twierdzeń, oznaczmy przez $(D(\mathcal{F}_t), |\cdot|_\ell)$ – przestrzeń Banacha $n$-niewymiarowych càdlàg procesów $x = (x_t)_{t\geq 0}$ takich, że $|x|_\ell = (E\sup_{t\geq 0}|x_t|^2)^{1/2} < \infty$. Przez $\mathcal{D}(\mathcal{F}_t)$ oznaczmy podzbiór przestrzeni $D(\mathcal{F}_t)$ wszystkich $x = (x_t)_{t\geq 0}$ takich, że

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{t\geq 0}\sup_{t\leq s<t+\delta} E|x_t - x_s|^2 = 0.$$

W pracy [1] uzyskano, m.in., następujące rezultaty charakteryzujące własności wielowartościowych całek stochastycznych.

**Twierdzenie 1** ([1], Th. 1). *Niech $F, \mathcal{G} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $R \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$. Wtedy*

(i) *$\int_0^\infty F_\tau d\tau$, $\int_0^\infty \mathcal{G}_\tau dw_\tau$ i $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $M_n(\mathcal{F}_t), t \geq 0$. Są one wypukłe, jeżeli $F, \mathcal{G}$ i $R$ przyjmują wypukłe wartości.*

(ii) *Jeżeli $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $R \in \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ to $\int_0^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau$ i $\int_0^t R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)$ są niepustymi domkniętymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^n); t \geq 0$.*

(iii) *Jeżeli $F, G \in \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $R \in \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ przyjmują wypukłe wartości to $\int_0^t F_\tau d\tau$, $\int_0^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau$ i $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)$ są niepustymi wypukłymi słabo zwartymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^n)$.*

**Twierdzenie 2** ([1], Th. 2). *Niech* $F, \mathcal{G} \in \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ *i* $R \in \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$. *Załóżmy, że* $(x_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_t)$ *jest takim procesem, że*

$$x_t - x_s \in cl_{\mathbf{L}^2}\left(\int_s^t F_\tau d\tau + \int_s^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)\right)$$

*dla* $0 \leq s < t < \infty$. *Wtedy dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieją* $f^\varepsilon \in S(F)$, $g^\varepsilon \in S(\mathcal{G})$ *oraz* $h^\varepsilon \in S_q(R)$ *takie, że*

$$\sup_{t\geq 0} E\left|x_t - x_0 - \left(\int_0^t f^\varepsilon_\tau d\tau + \int_0^t g^\varepsilon_\tau dw_\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h^\varepsilon_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)\right)\right|^2 \leq \varepsilon.$$

**Twierdzenie 3** ([1], Th. 3). *Niech* $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ *i* $R \in \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ *i niech* $(x_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_t)$ *będzie lokalnym martyngałem takim, że*

$$x_t - x_s \in cl_{\mathbf{L}^2}\left(\int_s^t \mathcal{G}_\tau dw\tau + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} R_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)\right)$$

*dla* $0 \leq s < t < \infty$. *Wtedy dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieją* $g^\varepsilon \in S(g)$ *i* $h^\varepsilon \in S_q(r)$ *takie, że*

$$E\sup_{t\geq 0}\left|x_t - x_0 - \left(\int_0^t g^\varepsilon_\tau dw_\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)\right)\right|^2 \leq \varepsilon.$$

**Twierdzenie 4** ([1], Th. 4). *Załóżmy, że* $F, G \in \mathcal{L}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ *i* $R \in \mathcal{W}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$ *przyjmują wypukłe wartości i niech* $(x_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_t)$. *Wówczas*

$$x_t - x_s \in \int_s^t F_\tau d\tau + \int_s^t \mathcal{G}_\tau dw_\tau + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^n} H_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)$$

*dla* $0 \leq s < t < \infty$ *wtedy i tylko wtedy gdy istnieją* $f \in S(F)$, $g \in S(\mathcal{G})$ *i* $h \in S(R)$ *takie, że*

$$x = x_0 + \int_0^t f_\tau d\tau + \int_0^t g_\tau dw_\tau + \int_0^t h_{\tau,z}\tilde{v}(d\tau, dz)$$

*dla* $t \geq 0$.

Dalsze wyniki dotyczące własności wielowartościowych całek stochastycznych uzyskano w pracach [7] i [13]. Otrzymane tam rezultaty dotyczą całek stochastycznych wielowartościowych procesów losowych względem miar martyngałowych i jednowymiarowych semimartyngałów. Ilustracją tych wyników są następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 5** ([13], Th. 3). *Niech* $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem takim, że* $M_0 = 0$ *i niech* $R, \mathcal{G}$ *będą prognozowalnymi i* $M$*-całkowalnymi wielowartościowymi procesami stochastycznymi. Wtedy*

(i) $\|\int_0^t R_\tau dM_\tau\|_{\mathbf{L}^2} = [E\int_0^t \|R_\tau\|^2 d[M, M]_\tau]^{1/2}$ *dla każdego* $t \geq 0$,

(ii) $H_{\mathbf{L}^2}\left(\int_0^t G_\tau dM_\tau, \int_0^t R_\tau dM_\tau\right) = \left[E\int_0^t h^2(G_\tau, R_\tau) d[M, M]_\tau\right]^{1/2}$
*dla* $t \geq 0$, *gdzie* $H_{\mathbf{L}^2}$ *jest metryką Hausdorffa indukowaną przez miarę przestrzeni* $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t) := \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^n)$,

(iii) $\operatorname{dist}_{\mathbb{L}^2}\left(\int_0^t g_\tau dM_\tau, \int_0^t R_\tau dM_\tau\right) = \left[E\int_0^t \operatorname{dist}^2(g_\tau, R_\tau)d[M,M]_\tau\right]^{1/2}$ *dla* $t \geq 0$ *i* $g \in \mathbb{L}^2_M$. *gdzie* $\mathbb{L}^2_M$ *oznacza przestrzeń* $M$*-całkowalnych z kwadratem procesów losowych,*

(iv) *dla dowolnego* $h \in \mathbb{L}^2_M$ *mamy*

$$h \in S_M(R) \Leftrightarrow \int_0^t H_\tau dM_\tau \in \int_0^t R_\tau dM_\tau \quad dla \quad t \geq 0,$$

(v) $R_\tau(\omega) \subset \mathcal{G}_\tau(\omega)$ $\mu_M-$ *p.w.* $\Leftrightarrow \int_0^t R_\tau dM_\tau \subset \int_0^t \mathcal{G}_\tau dM_\tau; t \geq 0,$

(vi) $R_\tau(\omega)$ *jest zbiorem wypukłym* $\mu_M-$*p.w.* $\Leftrightarrow \int_0^t R_\tau dM_\tau$ *jest zbiorem wypukłym dla* $t \geq 0$,

(vii) $R_\tau(\omega)$ *jest podprzestrzenią* $\mu_M-$*p.w.* $\Leftrightarrow \int_0^t R_\tau dM_\tau$ *jest podprzestrzenią dla każdego* $t \geq 0$,

(viii) $\overline{co}R = (\overline{co}R_t(\omega))_{t\geq 0}$ *jest wielowartościowym procesem prognozowalnym oraz* $\int_0^t \overline{co}R_\tau dM_\tau = \overline{co}\int_0^t R_\tau dM_\tau;\ t \geq 0$.

**Twierdzenie 6** ([13], Th. 3). *Niech* $M$ *będzie semimartyngałem całkowalnym z kwadratem i niech* $m$ *będzie procesem rzeczywistym* $M-$ *całkowalnym takim, że* $\|m\|_{S^2} = \|\sup_{t\geq 0}|x_t|\|_{\mathbb{L}^2} < \infty$. *Załóżmy, że* $R$ *jest wielowartościowym procesem prognozowalnym i całkowo ograniczonym przez* $m$. *Niech* $T$ *będzie czasem zatrzymania. Jeżeli* $x = (x_t)_{t\geq 0}$ *jest procesem typu cádlág takim, że* $x_t - x_s \in cl_{\mathbb{L}^2}\int_s^t R_\tau dM_\tau$ *dla* $T \leq s \leq t < \infty$; *p.n., to dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje proces* $H \in cl(S_M(R))$ *taki, że*

$$\sup_{t\geq T}\|x_t - x_T - \int_T^t H_\tau dM_\tau\|_{\mathbb{L}^2} < \varepsilon.$$

3. Inkluzje stochastyczne. Niech $F = \{F_t(x)_{t\geq 0} : x \in \mathbb{R}^n\}$, $G = \{(G_t(x))_{t\geq 0} : x \in \mathbb{R}^n\}$ i $H = \{(H_{t,z}(x))_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} : x \in \mathbb{R}^n\}$ będą danymi rodzinami wielowartościowych procesów losowych takimi, że

$$(F_t(x))_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t), (G_t(x))_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$$

i

$$(H_{t,z}(x))_{t\geq 0, z\in\mathbb{R}^n} \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

Przez inkluzję stochastyczną, oznaczaną przez $SI(F,G,H)$, odpowiadającą rodzinom $F, G$ i $H$ rozumiemy relację postaci:

$$x_t - x_s \in cl_{\mathbb{L}^2}\left(\int_s^t F_\tau(x_\tau)d\tau + \int_s^t G_\tau(x_\tau)dw_\tau + \int_s^t\int_{\mathbb{R}^n} H_{\tau,z}(x_\tau)\tilde{v}(d\tau, dz)\right), \tag{3}$$

która winna być spełniona dla wszystkich $0 \leq s < t < \infty$ przez proces $x = (x_t)_{t\geq 0} \in D(\mathcal{F}_t)$ taki, że $F \circ x \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$, $G \circ x \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t)$ i $H \circ x \in \mathcal{M}^2_{s-v}(\mathcal{F}_t, q)$. Proces $x$ nazywamy rozwiązaniem globalnym $SI(F,G,H)$. Jeżeli ponadto $x_0 = \lambda$, gdzie $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ jest daną zmienną losową, to $x$ nazywamy globalnym rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla $SI(F,G,H)$ z warunkiem początkowym $x_0 = \lambda$. Zagadnienie to oznaczane będzie przez $SI_\lambda(F,G,H)$.

W sformułowaniach dalszych rozpatrywać będziemy rodziny $F, G$ i $H$ spełniające następujące założenia $(A_1) - (A_4)$.

$(A_1)$:

(i) *$F, G$ i $H$ są takie, że odwzorowania* $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \ni (t, \omega, x) \to F_t(x)(\omega) \in Cl(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \ni (t, \omega, x) \to G_t(x)(\omega) \in Cl(\mathbb{R}^n)$ *oraz* $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (t, \omega, z, x) - H_{t,z}(x)(\omega) \in Cl(\mathbb{R}^n)$ *są odpowiednio* $\sum \otimes \beta^n$ – *oraz* $\widetilde{\sum} \otimes \beta^n$ *mierzalne, gdzie* $\sum$ *i* $\widetilde{\sum}$ *są odpowiednio* $\sigma$*–algebrami na* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *i* $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ *określającymi nieantycypującość procesów* $(F_t(x))_{t \geq 0}, (G_t(x))_{t \geq 0}$ *i* $(H_{t,z}(x))_{t \geq 0, z \in \mathbb{R}^n}$.

(ii) *$F, G$, i $H$ są jednostajnie całkowo ograniczone przez funkcje całkowalne z kwadratem na* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *i* $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m$, *odpowiednio.*

$(A_2)$:

*$F, G$ i $H$ są takie, że dla każdego $x \in D$ i dowolnego ciągu $(x^n)$ przestrzeni $(D, \|\cdot\|_\ell)$ słabo zbieżnego do $x$ mamy:*

$$\bar{h}[(F \circ x)_t(\omega), (F \circ x^n)_t(\omega)] \to 0, \bar{h}[(G \circ x)_t(\omega), (G \circ x^n)_t(\omega)] \to 0$$

*i* $\bar{h}[(H \circ x)_{t,z}(\omega), (H \circ x^n)_{t,z}(\omega)] \to 0$ *p.n. przy* $n \to 0$.

$(A_3)$:

*$F, G$ i $H$ są takie, że dla każdego $x \in D$ i dowolnego ciągu $(x^n)$ przestrzeni $(D, \|\cdot\|_\ell)$ słabo zbieżnego do $x$ mamy:*

$$\bar{h}\left[\int\int_A (F \circ x^n)_t dt dP, \int\int_A (F \circ x)_t dt dP\right] \to 0,$$

$$\bar{h}\left[\int\int_A (G \circ x^n)_t dt dP, \int\int_A (G \circ x)_t dt dP\right] \to 0,$$

*oraz*

$$\bar{h}\left[\int\int\int_B (H \circ x^n)_{\tau,z} dt q(dz), \int\int\int_B (H \circ x)_{t,z} dt q(dz)\right] \to 0$$

*dla każdego $A \in \sum$ i $B \in \widetilde{\sum}$, odpowiednio.*

$(A_4)$:

*Istnieją funkcje $k, l : \mathbb{R}_+ - \mathbb{R}$ oraz $m : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ całkowalne z kwadratem takie, że*

$$h[F_t(x_2)(\omega), F_t(x_1)(\omega)] \leq k(t)|x_2 - x_1|,$$

$$h[G_t(x_2)(\omega), G_t(x_1)(\omega)] \leq \ell(t)|x_2 - x_1|$$

*oraz*

$$h[H_{t,z}(x_2)(\omega), H_{t,z}(x_1)(\omega)] \leq m(t, z)|x_2 - x_1|$$

*p.n., dla dowolnego $t \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^m$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.*

W badaniu inkluzji stochastycznej $SI(F,G,H)$ ważną rolę pełni odwzorowanie liniowe $\Phi$ określone na przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{W}^2(\mathcal{F}_t, q)$ wzorem:

$$\Phi(f,g,h) = \left(\int_0^t f_\tau d\tau + \int_0^t g_\tau dw_\tau + \int_0^t h_{\tau,z}\tilde{v}(dz,dz)\right)_{t\geq 0}$$

o wartościach w przestrzeni $(D, \|\cdot\|_\ell)$. Latwo sprawdza się, że jeżeli $F, G$ i $H$ spełniają warunki $(A_1)$ to proces $x \in D$ jest rozwiązaniem zagadnienia $SI_0(F,G,H)$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \mathcal{H}(x)$, gdzie

$$\mathcal{H}(x) = cl_\ell(\Phi(S(F\circ x) \times S(G\circ x) \times S_{\hat{q}}(H\circ x))),$$

gdzie $cl_\ell$ oznacza domknięcie w topologii normowej przestrzeni $(D, \|\cdot\|_\ell)$.

Inkluzje stochastyczne $SI(F,G,H)$ można w naturalny sposób rozszerzyć na przypadki ogólniejsze zawierające całki stochastyczne względem miar martyngałowych ([7], str. 10) lub całki względem semimartyngałów ([14], str. 5). Zapisywane są one wówczas w postaci relacji:

$$x_t - x_s \in cl_{\mathbb{L}^2}\left(\Psi_t(x_t) - \Psi_s(x_s) + \int_s^t \int_U H_{\tau,u}(x_\tau)\mu(d\tau,du)\right) \tag{4}$$

lub

$$x_t - x_s \in cl_{\mathbb{L}^2}\left(\Psi_t(x_t) - \Psi_s(x_s) + \int_s^t F_\tau(x)dM_\tau\right), \tag{5}$$

dla $0 \leq s < t < \infty$, gdzie $(\Psi_t(x))_{t\geq 0}$ jest daną rodziną procesów zależnych od parametru $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznych. Niech $F, G$ i $H$ spełniają założenia $(A_1)$ i niech $\lambda \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P, \mathbb{R}^n)$ będzie daną zmienną losową. Oznaczmy przez $\mathcal{C}_\lambda$ klasę wszystkich rozwiązań zagadnienia początkowego $SI_\lambda(F,G,H)$. Podstawowe pytanie stawiane w teorii inkluzji stochastycznych dotyczy warunków dostatecznych gwarantujących niepustość zbioru $\mathcal{C}_\lambda$. Problem ten rozstrzygnięty został w stosunku do $S_\lambda(F,G,H)$ w pracach [2], [5] i [6]. Między innymi podane tam zostały następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 7** ([5], Th. 5). *Jeżeli $F, G$ i $H$ spełniają warunki $(A_1)$ i $(A_4)$, to $\mathcal{C}_\lambda \neq \emptyset$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$.*

**Twierdzenie 8** ([2], Th. 1). *Jeżeli $F, G$ i $H$ przyjmują wypukłe wartości i spełniają warunki $(A_1)$ i $(A_2)$ lub $(A_3)$ to $\mathcal{C}_\lambda \neq \emptyset$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$.*

Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla inkluzji stochastycznych (4) i (5). Dla przykładu w pracy [14] udowodnione zostało następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 9** ([14], Th. ). *Niech $M$ będzie semimartyngałem takim, że istnieje ciąg prognozowalnych czasów zatrzymania $0 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$, $T_n \to \infty$, p.n., taki, że $\|Z^{T_k-} - Z^{T_{k-1}-}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \alpha$ dla pewnego $\alpha > 0$. Niech $M_0 = 0$. Załóżmy, że $\Psi : D \to D$ jest takim odwzorowanie, że:*

(i) *dla każdego $x \in D$ i dowolnego czasu zatrzymania $T$, $\Psi(x)\mathbf{1}_{[0,T)} = \Psi(x^{T-})\mathbf{1}_{[0,T)}$,*

(ii) *istnieje $\beta \in [0,1)$ takie, że*

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\|_\ell \leq \beta/2\|x - y\|_\ell$$

*dla dowolnych* $x, y \in D$,

(iii) *dla dowolnego* $x \in D$ *i dowolnego czasu zatrzymania* $T$ *mamy* $\Psi_T(x) = \Psi_{T-}(x)$ *jeżeli tylko* $x_T = x_{T-}$.

*Niech rodzina* $(F_t(x))_{t\geq 0}$, $x \in D$, *procesów wielowartościowych będzie takia, że:*

1° $(F_t(x))_{t\geq 0}$ *jest procesem prognozowalnym przyjmującym domknięte i wypukłe wartości w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *dla każdego* $x \in D$,

2° *dla każdego* $x \in D$ *i dowolnego czasu zatrzymania* $T$ *mamy* $F(x)\mathbb{1}_{[0,T]} = F(x^{T-})\mathbb{1}_{[0,T]}$,

3° *istnieje rzeczywisty proces typu càdlàg* $K = (K_t)_{t\geq 0}$ *taki, że* $\|K\|_\ell < \infty$ *oraz* $h(F_t(x), F_t(y)) \leq K_t \sup_{s\leq t} |x_s - y_s|$, *p.n., dla* $t \geq 0$.

4° $(F_t(0))_{t\geq 0}$ *jest* $M-$ *całkowo ograniczony.*

*Jeżeli ponadto istnieje* $\gamma > 0$ *takie, że* $\sup_{t\geq 0} |K_t| \leq \gamma$, *p.n., to dla dowolnego* $\varphi \in D$ *istnieje* $x \in D$ *spełniające inkluzję* (5) *dla* $T \leq s < t < \infty$ *takie, że* $x\mathbb{1}_{[0,T]} = \varphi\mathbb{1}_{[0,T]}$, *p.n..*

Innego typu warunki dostatecznie gwarantujące istnienie rozwiązań inkluzji stochastycznych rozpatrywane są w pracy [14]. Bada się tam inkluzję postaci:

$$x_t \in \int_0^t F_\tau(x)dM_\tau + \int_0^t G_\tau(x)d\tau;\ 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

gdzie $M$ jest danym semimartyngalem zaś $F$ i $G$ są wielowartościowymi operatorami określonymi na przestrzeni $\mathcal{L}^2 := \mathbb{L}^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{F}_t, \mathbb{R}^n)$ o wartościach z przestrzeni podzbiorów tej przestrzeni. Warunki te związane są z pojęciem dysypatywności odwzorowań wielowartościowych.

Odwzorowanie wielowartościowe $\mathcal{F}$ z $\mathcal{L}^2$ (odp. $D$) w siebie (odp. $D$) nazywane jest dysypatywnym jeżeli spełnione są następujące warunki:

(i) dla każdego czasu zatrzymania $\sigma \in T$ oraz procesów $x, y \in \mathcal{L}^2$ (odp. $D$) takich, że $x^{\sigma-} = y^{\sigma-}$ operator rezolwenty $F_\lambda$ spełnia $F_\lambda(x)^{\sigma-} = F_\lambda(y)^{\sigma-}$,

(ii) dla każdego $t \leq T$, $\mathcal{F}$ jest dysypatywne względem $\mathcal{L}^2$ (odp. $D_t$), gdzie $\mathcal{L}^2$ oraz $D_t$ są przestrzeniami typu $\mathcal{L}^2$ i $D$ obcięte do przedziału $[0,t]$ zamiast $[0,T]$, tzn., że dla każdego $0 \leq t \leq T$, dla odwzorowania dualnego $J_t$ w przestrzeni $\mathcal{L}^2_t$ (odp. $D_t$) oraz $y_i \in \mathcal{F}(x_i)$, $i = 1,2$, istnieje $f_t \in J_t((x_1 - x_2)|[0,t])$ takie, że $f_t((y_1 - y_2)|_{[0,t]}) \leq 0$.

Para odwzorowań wielowartościowych $\mathcal{F} : D^2 \to \mathcal{P}(D^2)$ i $\mathcal{G} : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{L}^2)$, gdzie $\mathcal{P}(U)$ oznacza klasę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $U$, nazywana jest semimartyngałowo dysypatywna jeżeli dla każdych $u_i \in \mathcal{F}(x_i)$, $v_i \in \mathcal{G}(x_i)$, $i = 1,2$ oraz $t \leq T$ mamy:

$$E\left\{\int_0^t [(v_1)_\tau - (v_2)_\tau][(x_1)_\tau - (x_2)_\tau]d\tau + \right.$$

$$+ \int_0^t [(u_1)_\tau - (u_2)_\tau][(x_1)_\tau - (x_2)_\tau]dM_\tau +$$

$$+ \int_0^t [(u_1)_\tau - (u_2)_\tau]^2 d[M,M]_\tau \leq 0.$$

**Twierdzenie 10** ([15], Exist. Th.). *Niech $M$ będzie semimartyngałem takim, że $M_0 = 0$. Niech $F : D - \mathcal{P}(D)$ i $G : \mathcal{L}^2 - \mathcal{P}(\mathcal{L}^2)$ spełniają następujące warunki:*

(i) *$G$ jest $\mathcal{L}^2$ m-dysypatywne i istnieje stała $N$ taka, że $Dist_{\mathcal{L}^2}(0, F(x)) \leq N$, dla $x \in \mathcal{L}^2$,*

(ii) *$F$ jest $D$ m-dysypatywne i istnieje stała $K$ taka, że $Dist_D(0, F(x)) \leq K$, dla $x \in D$,*

(iii) *$F(x)$ jest słabo relatywnie zwartym podzbiorem przestrzeni $D$ i posiada słabo-mocno domknięty wykres,*

(iv) *para $F, G$ jest martyngałowo dysypatywna.*

*Przy powyższym istnieje rozwiązanie inkluzji* (6).

Z punktu widzenia teorii optymalnego sterowania, obok niepustości zbioru $C_\lambda$, ważne są jego inne własności. Problem ten był podejmowany w pracach [2], [10] i [11]. Udowodnione tam zostały następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 11** ([2], Th. 3). *Jeżeli $F, G$ i $H$ przyjmują niepuste domknięte wypukłe wartości i spełniają warunki* ($A_1$) *i* ($A_3$), *to $C_\lambda$ jest niepustym słabo zwartym podzbiorem przestrzeni $(D, \|\cdot\|_\ell)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$.*

**Twierdzenie 12** ([10], Th. 3). *Jeżeli $F, G$ i $H$ przyjmują niepuste domknięte wypukłe wartości i spełniają warunki* ($A_1$) *i* ($A_4$), *to istnieje słabo zwarty wypukły zbiór $B \subset \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \times \mathcal{W}^2$ i ciągła retrakcja $p : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0) \times B \to B$ taka, że $C_\lambda = \Phi^\lambda(p(\lambda, B))$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$, gdzie $\Phi^\lambda = \lambda + \Phi$. W szczególności odwzorowanie $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0) \ni \lambda \to C_\lambda \subset D$ jest dolnie półciągłe na zbiorze $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$.*

W przypadku gdy $F, G$ i $H$ przyjmują niepuste domknięte lecz nie konieczne wypukłe wartości, otrzymujemy jedynie następującą charakteryzację zbioru $C_\lambda$.

**Twierdzenie 13** ([11], Th. 4). *Jeżeli $F$ i $G$ spełniają warunki* ($A_1$) *i* ($A_4$), *to istnieje słabo zwarty wypukły zbiór $B \subset \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$ oraz ciągła retrakcja $p : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0) \times B \to B$ taka, że zbiór $\Lambda_\lambda$ wszystkich rozwiązań zagadnienia początkowego $SI_\lambda(F, G, \{0\})$ spełnia warunki $\Lambda_\lambda \subset \Psi^\lambda(p(\lambda, B))$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$, gdzie $\Psi^\lambda(f, g) = \Phi^\lambda(f, g, 0)$ dla $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$, i $(f, g) \in \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$.*

5. STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW OPISYWANYCH INKLUZJAMI STOCHASTYCZNYMI. Zagadnienie sterowalności układów nieliniowyh należy do bardziej złożonych problemów ogólnej teorii sterowania optymalnego. W szczególności komplikuje się ono w przypadku układów opisywanych równaniami i inkluzjami stochastycznymi. W pracach [8] i [9] uzyskano pewne rezultaty dotyczące sterowalności inkluzji $SI(F,G,H)$ metodą punktu stałego Ky Fana. W pracy [8] uzyskano warunki gwarantujące istnienie rozwiązań zagadnienia $S_\lambda(F,G,H)$ w zadanym w pewien sposób zbiorze. Prezentację tego wyniku poprzedzimy wprowadzeniem podstawowych definicji i oznaczeń niezbędnych do jego sformułowania.

Niech $K \subset D$ będzie danym zbiorem i niech $x \in K$. Oznaczmy przez $T_K(x)$ stożek styczny do $K$ w punkcie $x$. Stożek ten definiujemy równością:

$$T_K(x) = cl_\ell\left(\bigcup_{h>0} \frac{K-x}{h}\right),$$

gdzie $cl_\ell$ oznacza domknięcie w topologii normowej przestrzeni Banacha $(D, \|\cdot\|_\ell)$.

Niech $A, B \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ i $\mathbb{C} \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{F}_t, q)$ będą danymi zbiorami i niech $K_{AB\mathbb{C}} = \Phi(A \times B \times \mathbb{C})$.

**Twierdzenie 14** ([8], Th. 7). *Niech $A, B \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ i $\mathbb{C} \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{F}_t, q)$ będą niepustymi, słabo zwartymi i wypukłymi zbiorami i niech $\lambda \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$. Jeżeli $F, G$ i $H$ przyjmują niepuste domknięte i wypukłe wartości, spełniają warunki* $(A_1)$ *i* $(A_3)$ *i są takie, że*

$$S(F \circ \Phi^\lambda(u,v,z)) \cap [u + T_A(u)] \neq \emptyset,$$

$$S(G \circ \Phi^\lambda(u,v,z)) \cap [v + T_B(v)] \neq \emptyset,$$

$$S_q(H \circ \Phi^\lambda(u,v,z)) \cap [z + T_{\mathbb{C}}(z)] \neq \emptyset,$$

*dla $(u,v,z) \in A \times B \times \mathbb{C}$, to $C_\lambda \cap [\lambda + K_{AB\mathbb{C}}] \neq \emptyset$, tzn. istnieje rozwiązanie $x$ zagadnienia początkowego $SI_\lambda(F,G,H)$ takie, że $x \in \lambda + K_{AB\mathbb{C}}$.*

W oparciu o wspomniane wyżej twierdzenie Ky Fana w pracy [9] uzyskano pewnego typu twierdzenie o sterowlności inkluzji $SI(F,G,H)$. Sformułowanie otrzymanego tam rezultatu poprzedzimy dalszymi definicjami niezbędnymi do jego przedstawienia.

Niech $A, B : \Omega - Cl(\mathbb{R}^n)$ będą danymi multifunkcjami. Inkluzją stochastyczną $SI(F,G,H)$ nazywamy $(A,B)$ - sterowalną na przedziale $[0,T]$, jeżeli istnieje rozwiązanie globalne $x = (x_t)_{t\geq 0}$ inkluzji $SI(F,G,H)$ takie, że $(x_0, x_T) \in A \times B$; p.n.

Załóżmy, że $F, G$ i $H$ spełniają warunki $(A_1)$ i niech

$$B_{FGH} = \Big\{(f,g,h) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{W}^2(\mathcal{F}_t, q) : |f_t| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|F_t\|,$$

$$|g_t| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|G_t\|, \ |h_{t,z}| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|H_{t,z}(x)\|\Big\}.$$

Do zadanych wyżej multifunkcji $F, G, H, A$ i $B$ niech $\Lambda_{AB}(T) := \{(f,g,h) \in B_{FGH} : \Phi_0(f,g,h) \in A, \ \Phi_T(f,g,h) \in B\}$.

Układ $(A, B, F, G, H)$ nazywamy zgodnym na przedziale $[0,T]$ jeżeli $\Lambda_{AB}(T) \neq \emptyset$.

W pracy [9] uzyskano następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 15** ([9], Th. 2). *Niech $A, B : \Omega \to Cl(\mathbb{R}^n)$ będą multifunkcjami przyjmującymi wypukłe wartości i niech $F, G$ i $H$ przyjmują niepuste domknięte i wypukłe wartości, spełniają warunki $(A_1)$ i $(A_3)$ i będą takie, że układ $(A, B, F, G, H)$ jest zgodny. Jeżeli ponadto*

$$T_{\Lambda_{AB}(T)}(f,g,h) \cap [S(F \circ \Phi(f,g,h)) \times S(G \circ \Phi(f,g,h))$$
$$\times S_q(H \circ \Phi(f,g,h))] \neq \emptyset$$

*dla $(f,g,h) \in \Lambda_{AB}(T)$, to $SI(F,G,H)$ jest $(A,B)$-sterowalna.*

6. Pewne zastosowania teorii inkluzji stochastycznej w stochastycznej teorii optymalnego sterowania. Rozpatrzmy układ sterowania opisany równaniem stochastycznym (2). Podstawowym problemem teorii sterowania dla takich układów jest poszukiwanie par $(u, \xi^\mu)$ sterowań $u$ i odpowiadających im rozwiązań $\xi^\mu = (\xi_t^\mu)_{t \geq 0}$ równania (2), nazywanych trajektorami tego równania, takich, że $(\xi^\mu, u) \in \mathcal{C} \times \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{C} \subset D$ i $\mathcal{U} \subset U$ są danymi zbiorami.

W rozważaniach dalszych będziemy zakładać, że $\mathcal{U}$ jest zbiorem sterowań postaci $p = ((u_t)_{t \geq 0}, (v_t)_{t \geq 0}, (r_{t,z})_{t \geq 0, z \in \mathbb{R}^n})$ takich, że $u_t \in U_t$, $v_t \in V_t$, $r_{r,z} \in P_{t,z}$ p.n. dla $t \geq 0$ i $z \in \mathbb{R}^m$, odpowiednio, gdzie $(U_t)_{t \geq 0}$, $(V_t)_{t \geq 0}$ i $(P_{t,z})_{t \geq 0, z \in \mathbb{R}^n}$ są nieantycypującymi wielowartościowymi procesami stochastycznymi przyjmującymi niepuste zwarte wypukłe wartości w przestrzeni Banacha $(U, |\cdot|)$.

Każdą parę $(\xi^\mu, u)$ posiadającą wymienione wyżej własności nazywać będziemy parą $(\mathcal{C}, \mathcal{U})$-dopuszczalną lub wprost dopuszczalną. Przy tym proces $\xi^\mu = (\xi_t^\mu)_{t \geq 0}$ jest nazywany dopuszczalną trajektorią układu (2). Niech $\mathcal{T}(\alpha, \beta, \gamma)$ oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych trajektorii układu (2).

Celem sterowania jest minimalizacja lub maksymalizacja wartości oczekiwanej funkcjonału $f : \mathcal{C} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Zazwyczaj, funkcjonał $f$ charakteryzuje koszt błędu związanego z opisem rozpatrywanego zjawiska i wyborem danego sterowania. Wówczas $\bar{f}(u) = Ef(\xi^\mu, u)$ nazywane jest kosztem sterowania. Podstawowy problem stochastycznej teorii optymalnego sterowania wiąże się wyznaczeniem optymalnego kosztu sterowania. Pierwszym jednak krokiem w procesie rozwiązywania tego problemu jest pytanie dotyczące istnienia dopuszczalnych sterowań i trajektorii.

Możemy sprowadzić postawiony wyżej problem stochastycznej teorii sterowania optymalnego do równoważnego mu problemu dla układu opisywanego przez inkluzję stochastyczną. W tym celu niech $F_t(x) = \{\alpha_t(x,p) : p \in U_t\}$, $G_t(x) = \{\beta_t(x,p) : p \in V_t\}$ i $H_{t,z}(x)\{\gamma_{t,z}(x,p) : p \in P_{t,z}\}$ dla $t \geq 0$, $x, z \in \mathbb{R}^n$, gdzie $(U_t)_{t \geq 0}$, $(V_t)_{t \geq 0}$ i $(P_{t,z})_{t \geq 0, z \in \mathbb{R}^n}$ są takie jak wyżej. Niech $\mathcal{C}_\lambda$ oznacza tak jak wyżej, klasę wszystkich rozwązań zagadnienia początkowego $SI_\lambda(F,G,H)$ dla określonych wyżej $F, G$ i $H$. Otrzymuje się następujące proste konsekwencje powyższych oznaczeń.

**Twierdzenie 16** ([1], Th. 7). *Załóżmy, że $\alpha, \beta$ i $\gamma$ są takie, że rodziny $F = \{(F_t(x))_{t \geq 0} : x \in \mathbb{R}^n\}$, $G = \{(G_t(x))_{t \geq 0} : x \in \mathbb{R}^n\}$ i $H = \{(H_{t,z}(x)_{t \geq 0, z \in \mathbb{R}^n}) : x \in \mathbb{R}^n\}$ spełniają warunki $(A_1)$, przyjmują wypukłe wartości i są takie, że $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\lambda \neq \emptyset$. Jeżeli ponadto $\alpha, \beta$, i $\gamma$ są ciągłe względem $p \in U$, to $\mathcal{T}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\lambda$.*

**Twierdzenie 17** ([1], Coroll. 4). *Załóżmy, że* $\alpha, \beta$ *i* $\gamma$ *spełniają warunki* Tw. 16 *i niech* $g : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ *będzie odwzorowaniem wielowartościowym postaci* $g : \mathcal{U} \ni u \to \xi^u \in \mathcal{C}$. *Jeżeli* $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ *jest danym funkcjonałem, wtedy* $\inf f(g(\mathcal{U})) = \inf f(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{\xi_0})$ *oraz* $\sup f(g(\mathcal{U})) = \sup f(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{\xi_0})$.

**Twierdzenie 18** ([12], Th. 2). *Niech* $\alpha, \beta, \gamma$ *będą takie, że wyżej określone rodziny* $F, G$ *i* $H$ *spełniają warunki* $(A_1)$. *Załóżmy, że istnieją funkcje* $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *takie, że*

$$|\alpha_t(x_1, u) - \alpha_t(x_2, u) \le K_\alpha(t)|x_1 - x_2|, \quad |\beta_t(x_1, u) - \beta_t(x_2, u)| \le$$

$$\le K_\beta(t)|x_1 - x_2| \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\gamma_{t,z})(x_1, u) - \gamma_{t,z}(x_2, u)| q(dz) \le$$

$$\le K_\gamma(t)|x_1 - x_2| \quad \text{p. n. dla} \quad x_1, x_2, \in \mathbb{R}^n, \ u \in U \ \text{oraz} \ t \in \mathbb{R}_+.$$

*Wtedy dla dowolnego* $\xi_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ *i dowolnego* $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{\xi_0}$ *istnieje ciąg* $\{(\xi^k, u^k)\}_{k \ge 1}$ *par dopuszczalnych układu* (2) *taki, że*

$$E \sup_{0 \le t \le T} |x_t - \xi_t^k|^2 \to 0 \ \text{przy} \ k \to \infty \ \text{dla każdego} \ T > 0,$$

*gdzie* $\xi_t^k = \xi_t^{u_k}$.

Niech $\chi_{\xi_0}^T(\alpha, \beta, \gamma)$ oznacza rodzinę wszystkich dopuszczalnych par układu (2).

**Twierdzenie 19** ([12], Coroll. 4, Coroll. 5). *Niech* $\alpha, \beta, \gamma$ *spełniają założenia* Tw. 18. *Wtedy*

(i) $\chi_{\xi_0}^T(\alpha, \beta, \gamma) \subset \mathcal{C}_{\xi_0}^T \subset cl_\ell(\chi_{\xi_0}^T(\alpha, \beta, \gamma))$,

(ii) $\mathcal{C}_{\xi_0}^T = cl_\ell(\chi_{\xi_0}^T(\alpha, \beta, \gamma))$ *gdy* $\mathcal{C}_{\xi_0}^T$ *jest zbiorem słabo zwartym, gdzie* $cl_\ell$ *oznacza domknięcie w topologii normowej przestrzeni* $(D, \|\cdot\|_\ell)$, *zaś* $\mathcal{C}_{\xi_0}^T = \{x|_{[0,T]} : x \in \mathcal{C}_{\xi_0}\}$.

*Rozpatrzmy obecnie* $SI(F, G, \{0\})$ *w przypadku gdy* $F = \{F_t\}_{0 \le t \le T}$ i $G = \{G_t\}_{0 \le t \le T}$ *są wielowartościowymi procesami prognozowalnymi przyjmującymi niepuste domknięte wartości z przestrzeni* $\mathbb{R}^n$. *Załóżmy, że* $F$ i $G$ *są takie, że* $E \int_0^T \|F_t\|^2 dt < \infty$ *i* $E \int_0^t \|G_t\|^2 dt < \infty$. *Dla danego* $\xi_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ *niech* $\mathcal{C}_{\xi_0}$ *oznacza w dalszym ciągu klasę wszystkich rozwiązań zagadnienia* $SI_{\xi_0}(F, G, \{0\})$. *Niech* $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *będzie ciągłym funkcjonałem. Rozpatrzmy następujące zagadnienie minimalizacyjne.*

*(M): Wyznaczyć* $\inf_{x \in \mathcal{C}_{\xi_0}} \Psi(x)$, gdzie

$$\Psi(x) = \inf_{(f,g) \in D(x)} E \int_0^T \varphi(f_t, g_t) dt \ \text{przy} \ D(x) =$$

$$= \left\{ (f, g) \in S(F)(x) \times S(G)(x) : x = \left( \xi_0 + \int_0^t f_\tau d\tau + \int_0^t g_\tau dw_\tau \right)_{0 \le t \le T} \right\}.$$

**Twierdzenie 20** *([22], Prop. 3). Jeżeli* $\bar{x}$ *jest rozwiązaniem zagadnienia (M), to*

$$\Psi(\bar{x}) = \int_\Omega \int_0^t \inf_{w \in F_t(\omega), z \in G_t(\omega)} \varphi(w, z) dt dP(\omega).$$

**Twierdzenie 21** *([22], Prop. 5). Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ *będzie taką przestrzenią, że* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ *dla* $0 \le t \le T$. *Jeżeli* $\bar{x}$ *minimalizuje funkcjonał* $E(\int_0^t \varphi(x_t')dt)$ *na zbiorze wszystkich rozwiązań zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} x_t' \in F_t \quad \text{z P1, p. w. } [0,T] \\ x_0 = \xi_0 \end{cases}$$

*to*

$$E\left(\int_0^t \varphi(\bar{x}_t')dt\right) = \int_\Omega \int_0^t \inf_{w\in F_t(\omega)} \varphi(w)dtdP(\omega).$$

**Twierdzenie 22** *([22], Prop. 6). Jeżeli* $\bar{x}$ *minimalizuje funkcjonał* $E\|x_T - \xi_0\|^2$ *na zbiorze rozwiązań zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} x_t - x_s \in \int_s^t G_\tau dw_t \ ; \ 0 \le s \le t \le T \\ x_0 = \xi_0, \end{cases}$$

*wtedy*

$$E(\|\bar{x}_T - \xi_0\|^2) = \int_\Omega \int_0^T \inf_{z\in G_t(\omega)} \|z\|^2 dtdP(\omega).$$

*Zatem* $\bar{x}_t = \xi_0 + \int_s^t \bar{g}_\tau dw_\tau$ *jest rozwiązaniem minimalizującym* $E(\|x_T - \xi_0\|^2)$ *wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\langle v - \bar{g}_t(\omega), \ \bar{g}_t(\omega)\rangle \ge 0$$

*dla* $v \in G_t(\omega)$ *z P.1., p. w.* $t \in [0,T]$.

7. Równania i inkluzje losowe. W deterministycznej teorii sterowania optymalnego zbiory dopuszczalne są, w określonych przypadkach, rozwiązaniami pewnych równań różniczkowych o wieloznacznych rozwiązaniach. Naturalnym staje się więc badanie własności uogólnionych równań losowych o wieloznacznych rozwiązaniach. Problematyka ta była przedmiotem badań rozprawy doktorskiej [PD] i prac [16], [17]. W pracach tych rozpatrywane są zagadnienia początkowe:

$$(1) \qquad \begin{cases} D_H x_t = F(t, x_t) \ \text{P.1.}, \ t \in [0,T] - \text{p.n.} \\ x_0 = U, \ \text{P.1.}, \end{cases}$$

oraz

$$(2) \qquad \begin{cases} D_H x_t = F(t, x_t) \ \text{P.1.}, \ t \in [0,T] - \text{p.n.} \\ x_0 \stackrel{d}{=} \mu, \end{cases}$$

gdzie $F$ i $U$ są danymi wielowartościowymi zmiennymi losowymi o niepustych zwartych wypukłych wartościach, $\mu$ jest pewną miarą probabilistyczną na przestrzeni $K^n$ wszystkich niepustych zwartych wypukłych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś $D_H x_t$ oznacza pochodną Hukuhary procesu wielowartościowego $(x_t)_{t\in[0,T]}$ w punkcie $t \in [0,T]$. W sformułowaniach dalszych rozpatrywane będą odwzorowania $F : [0,T] \times \Omega \times K_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}) \to K_{\mathbb{C}}(E)$ i $U_0 : \Omega \to K_{\mathbb{C}}(\mathcal{S})$, gdzie $\mathcal{S}$ będzie oznaczać ośrodkową przestrzeń Banacha $E$ lub przestrzeń $\mathbb{R}^n$, zaś $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{S})$ oznacza przestrzeń niepustych zwartych wypukłych podzbiorów $\mathcal{S}$. O odwzorowaniach tych zakłada się, że spełniają one następujące warunki (A) i (B).

(A) $F$ jest odwzorowaniem całkowo ograniczonym i spełnia warunki Carathéodory'ego, tzn.

(i) istnieje funkcja całkowalna $m : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F(t,\omega,A)\| \leq m(t,\omega)$ P.1., t-p.w., $A \in K_{\mathbb{C}}(S)$,

(ii) $F(t,\omega,\cdot)$ jest $H$-ciągła z P.1., t-p.w.

(iii) $F(\cdot,\cdot,A)$ jest mierzalna przy ustalonym $A \in K_{\mathbb{C}}(S)$.

(B) $U_0$ jest odwzorowaniem mierzalnym.

W przypadku gdy $S = E$ będziemy ponadto zakładać, że istnieje funkcja losowa Kamke'go $K : I \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że spełniany jest następujący warunek (C).

(C) Dla dowolnego $A_1 A_2, ..., \in K_{\mathbb{C}}(E)$ spełniona jest nierówność:

$$\alpha(\cup_{n\geq 1} F(t,\omega,A_n)) \leq K(t,\omega,\alpha(\cup_{n\geq 1} A_n))$$

z P.1., t-p.w. ma $[0,T]$, gdzie $\alpha$ oznacza miarę niezwartości w przestrzeni $E$.

W stosunku do zagadnień (7) i (8) otrzymano następujące rezultaty.

**Twierdzenie 23** ([16], Th. 3). *Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha taką, że jej przestrzeń dualna $E^*$ jest ośrodkowa. Jeżeli $F$ i $U_0$ spełniają warunki* (A)–(C) *dla $S = E$, to zagadnienie początkowe* (7) *posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.*

**Twierdzenie 24** ([17], Th. 5). *Niech $F : [0,T] \times K^n \to K^n$ spełnia warunek* (A) *dla $S = \mathbb{R}^n$ i niech $\mu$ będzie daną miarą probabilistyczną na $K^n := K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Wtedy istnieje przynajmniej jedno słabe rozwiązanie zagadnienia* (8), *tzn. istnieje układ $(\Omega, \mathcal{F}, P, (x_t)_{t\in[0,T]})$, gdzie $(x_t)_{t\in[0,T]}$ jest procesem wielowartościowym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spełniającym warunki* (8).

W oparciu o przytoczone twierdzenia można wnioskować w pewnych sytuacjach ([15], [17]) o istnieniu rozwiązań inkluzji losowych postaci:

$$\dot{x}_t \in G(t,x_t) \text{ P.1., } t \in [0,T] - \text{p.w.} \tag{3}$$

zarówno z warunkiem początkowym $x_0 \in U_0$ z P.1. jak i warunkiem postaci $x_0 \stackrel{d}{=} \mu$.

8. TWIERDZENIA RELAKSYJNE DLA ODWZOROWAŃ LOSOWYCH. W teorii inkluzji różniczkowych przy badaniu własności zbioru ich wszystkich rozwiązań istotną rolę odgrywa wypukłość prawych stron rozpatrywanych inkluzji. Niestety wiele praktycznych zagadnień prowadzi do inkluzji o zwrotnych lecz nie koniecznie wypukłych prawych stronach. Naturalnym jest więc rozpatrywanie w takim przypadku inkluzji, których prawe strony są domkniętymi uwypukleniami rozpatrywanych tam multifunkcji. Powstaje w takim przypadku pytanie o wzajemne relacje między zbiorami wszystkich rozwiązań tak powiązanych ze sobą inkluzji. W przypadku inkluzji losowych bezpośrednie uzyskanie takich związków stwarza duże trudności. Okazuje się, że można je uzyskać z ogólnej teorii relaksacyjnej odnoszonej do odwzorowań losowych, będących szczególnym przypadkiem odwzorowań wielowartościowych o dekomponowalnych wartościach w przestrzeni $\mathbb{L}^2(T, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$. Podstawą tej teorii jest pewne specyficzne twierdzenie selekcyjne dla odwzorowań o dekomponowalnych wartościach.

Niech $(T, \mathcal{A}, \mu)$ będzie ośrodkową przestrzenią miary z nieatomową miarą probabilistyczną $\mu$ i niech $\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Banacha $\mathbb{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$ z normą $\|\cdot\|$. Przez $\|\cdot\|_E$ będziemy oznaczać normę przestrzeni $\mathbb{L}^1(E, \mathcal{A} \cap E, \mu, \mathbb{R}^n)$ dla ustalonego $E \in \mathcal{A}$.

Zbiór $K \subset \mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$ nazywany jest dekomponowalnym, jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ i dowolnych $f, g \in K$ mamy $\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_{T \setminus A}\, g \in K$. Oznaczmy przez $DCl(\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n))$ przestrzeń wszystkich niepustych domkniętych i dekomponowalnych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$. Przez $H$ oznaczmy metrykę Hausdorffa indukowaną przez normę $\|\cdot\|$. Będziemy również korzystać z odległości Hausdorffa $H_E$ wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_E$, dla ustalonego $E \in \mathcal{A}$. Przy powyższych oznaczeniach uzyskane zostało następujące ogólne twierdzenie selekcyjne.

**Twierdzenie 25** ([23], Th. 1). *Niech $(T, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią ośrodkową z bezatomową miarą $\mu$. Niech $X$ będzie niepustym słabo zwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$ oraz $F : X \to DCl(\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n))$ multifunkcją całkowo ograniczoną taką, że istnieje funkcja $K \in \mathbb{L}(T, \mathbb{R})$ spełniająca związek:*

$$H_E(F(x), F(y)) \leq \|K\|_E \sup_{E \in \mathcal{A}} \left| \int_E [x - y] d\mu \right|$$

*dla $x, y \in X$ i $E \in \mathcal{A}$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $\eta \in X$ i $\xi \in \overline{co}F(\eta)$ istnieje ciągła funkcja $f : X \to \mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$ taka, że $f(x) \in F(x)$ dla $x \in X$ i o tej własności, że:*

$$\left| \int_E [f(x) - \xi] d\mu \right| \leq \varepsilon(\|K\| + 2) + \|K\|_E \sup_{E \in \mathcal{A}} \left| \int_E [x - \eta] d\mu \right|$$

*dla każdego $x \in X$ i $E \in \mathcal{A}$.*

Konsekwencją przedstawionego twierdzenia selekcyjnego jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 26** ([24], Th. 2). *Niech $(T, \mathcal{A}, \mu)$ będzie ośrodkową przestrzenią miary z bezatomową miarą $\mu$ i niech $F : \mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n) \to DCl(\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n))$ będzie multifunkcją całkowo ograniczoną przez funkcję $m \in \mathbb{L}(T, \mathbb{R})$. Załóżmy, że istnieje funkcja $K \in \mathbb{L}(T, \mathbb{R})$ z $\|K\| < 1$ i taka, że*

$$H_E(F(x),\ F(y)) \leq \|K\|_E \sup_{E\in\mathcal{A}} \left| \int_E [x-y] d\mu \right|$$

*dla* $x, y \in B_m := \{f \in \mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n) : |f(t)| \leq m(t),$ p.w.$\}$ *i* $E \in \mathcal{A}$. *Wtedy zbiór* $S(F)$ *wszystkich punktów stałych multifunkcji* $F$ *jest niepusty i* $S(\overline{co}F) = cl_w(S(F))$, *gdzie* $cl_w$ *oznacza słabe domknięcie w przestrzeni* $\mathbb{L}(T, \mathbb{R}^n)$.

9. PEWNE TWIERDZENIA SELEKCYJNE. Teorie inkluzji różniczkowych, losowych i stochastycznych są w istotny sposób oparte o różnego typu twierdzenia selekcyjne. Dlatego też, badanie istnienia selekcji multifunkcji, a wszczególności wielowartościowych procesów stochastycznych, należy do problemów podstawowych każdej z wymienionych wyżej teorii. Badania takie prowadzone były w pracach [19] -[21].

**Twierdzenie 27** ([19], Coroll. 8). *Niech* $S$ *będzie przestrzenią metryczną i* $X$ *– n-wymiarową przestrzenią Banacha. Załóżmy, że* $F : S \to \mathbb{C}(X)$ *i* $f : S \to X$ *są odwzorowaniami spełniającymi warunki Lipschitza, gdzie* $\mathbb{C}(X)$ *oznacza klasę wszystkich niepustych domkniętych wypukłych podzbiorów* $X$. *Niech* $\gamma > 1$. *Wtedy istnieje selektor* $s = s_\gamma : S \to X$ *dla* $F$, *spełniający warunek Lipschitza i taki, że:*

(i) $\|f(x) - s(x)\| \leq \gamma \operatorname{dist}(f(x), F(x))$ *dla* $x \in S$; *w szczególności,* $s(x) = f(x)$ *gdy* $f(x) \in F(x)$,

(ii) $\mathbb{L}_s \leq \mathbb{C}_n d_n(\mathbb{L}_F + (\mathbb{L}_f + \mathbb{L}_F)(\gamma+1)\xi(\frac{1}{\gamma}))$, *gdzie* $\mathbb{L}_f, \mathbb{L}_F$ *i* $\mathbb{L}_s$ *są stałymi Lipschitza dla* $f, F$ *i* $s$, *odpowiednio, zaś* $\xi$ *jest modulem przestrzeni* $X$ *zdefiniowanym wzorem* $\xi(\beta) = \sup\{\omega(x,y) : \|y\| \leq \beta < 1 < \|x\|\}$, *gdzie*

$$\omega(x,y) = \frac{\|x - z(x,y)\|}{\|x\| - 1};$$

$z(x,y)$ *jest jednoznacznym elementem odcinka* $[x,y]$ *o normie równej* 1.

**Twierdzenie 28** ([20], Th. 9). *Niech* $X$ *będzie n-wymiarową przestrzenią Banacha,* $S$ *przestrzenią pseudometryczną i* $S_0 \subset S$. *Załóżmy, że* $F : S \to \mathbb{C}(X)$ *i* $g : S_0 \to X$ *spełniają warunek Lipschitza ze stałymi* $\mathbb{L}_f$ *i* $\mathbb{L}_g$, *odpowiednio. Niech* $g(x) \in F(x)$ *dla* $x \in S_0$. *Wtedy istnieje funkcja* $f : S \to X$ *spełniająca warunek Lipschitza ze stałą* $\mathbb{L}_f$ *rozszerzająca funkcję* $g$ *i taka, że* $f(x) \in F(x)$ *dla* $x \in S$. *Ponadto* $f$ *może być tak wybrana by* $\mathbb{L}_f \leq 7n^2\mathbb{L}_g + 8n\mathbb{L}_F$.

Problem istnienia selekcji wielowartościowych procesów losowych jest przedmiotem badań w pracy [21]. Udowodniono tam m. in. następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 29** ([21], Th. 2). *Jeżeli wielowartościowy proces stochastyczny* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *nad przestrzenią probabilistyczną* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *z filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *o domkniętych wypukłych wartościach w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *jest taki, że dla każdego* $z \in \mathbb{R}^n$, *funkcja* $t \to \operatorname{dist}(z, F_t)(\omega)$ *jest ciągła dla p.w.* $\omega \in \Omega$, *to dla dowolnego* $y \in \mathbb{R}^n$ *proces losowy* $(f_t)_{t\geq 0}$ *określony przez* $f_t(\omega) = P_r(y, F_t(\omega))$, *gdzie* $\|P_r(y, F_t(\omega)) - y\| = \operatorname{dist}(y, F_t(\omega))$, *jest* $\mathcal{F}_t$*–zgodnym ciągłym procesem takim, że* $f_t(\omega) \in F_t(\omega)$ *dla* $t \geq 0$ *i p. w.* $\omega \in \Omega$.

**Twierdzenie 30** ([21], Th. 4). *Załóżmy, że wielowartościowy proces stochastyczny* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *nad przestrzenią probabilistyczną* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *z filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *przyjmie domknięte wypukłe wartości w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$. *Jeżeli ponadto dla każdego* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ *i* $A \in \mathcal{F}_s$ *funkcja* $t \to E(\mathbb{1}_A \mathrm{dist}(z, F_t))$ *jest prawostronnie górnie półciągła w punkcie* $s$, *wtedy proces* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *posiada stochastycznie ciągłą prawostronnie selekcję* $(f_t)_{t\geq 0}$.

**Twierdzenie 31** ([21], Th. 4). *Niech filtracja* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ *będzie taka, że* $(\mathcal{F}_t) = \sigma(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s)$. *Załóżmy, że wielowartościowy proces stochastyczny* $(F_t, \mathcal{F}_t)$ *przyjmuje domknięte wartości w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *jest taki, że dla każdego* $z \in \mathbb{R}^n, s \geq 0$ *oraz* $A \in \mathcal{F}_s$ *funkcja* $t \to E(\chi_A \mathrm{dist}(z, F_t))$ *jest górna półciągła. Jeżeli ponadto* $P$ *jest miarą bezatomową lub* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *przyjmuje wypukłe wartości, to* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *posiada stochastycznie ciągłą selekcję* $(f_t)_{t\geq 0}$.

**Twierdzenie 32** ([21], Prop. 9). *Niech filtracja* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *będzie taka, że* $\sigma(\cup_{s<t}(\mathcal{F}_s) = \mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$. *Jeśli proces* $(F_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *jest wielowartościowym martyngałem, to posiada on selekcję, która jest martyngałem posiadającym prawie wszystkie ciągłe realizacje.*

## WYKAZ PUBLIKACJI BĘDĄCYCH WYNIKIEM REALIZACJI PROJEKTU


[1] Kisielewicz M., Set – valued integrals and stochastic inclusions, Stochastic Anal. Appl. (przedstawiono do druku).

[2] Kisielewicz M., Properties of solution set of stochastic inclusions, Journal Appl. Math. Stoch. Anal., 6 (3) (1993) 217–326.

[3] Kisielewicz M., Generalized stochastic inclusions, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 38 (1993) 401–417.

[4] Kisielewicz M., Set – valued stochastic integrals and stochastic inclusions, Discuss. Math., 13 (1993) 119–126.

[5] Kisielewicz M., Existence theorem for nonconvex stochastic inclusions, Journal Appl. Math. Stoch. Anal., 7 (2) (1994) 151–159.

[6] Kisielewicz M., Strong and weak solutions to stochastic inclusions, Banach Center Publications, (w druku).

[7] Kisielewicz M., Set – valued stochastic integrals over martingale measures and stochastic inclusions, Discuss. Math., Ser. Diff. Incl. (w druku).

[8] Kisielewicz M., Viability theorems for stochastic inclusions, Discuss. Math., Ser. Algebra and Stoch. Math., (w druku).

[9] Kisielewicz M., Controllability theorem for stochastic inclusions, Journal Appl. Math. Stoch. Anal. (przedstawiono do druku).

[10] Kisielewicz M., Quasi – retractive representation of solution sets to stochastic inclusions, Journal Appl. Math. Stoch. Anal. (przedstawiono do druku).

[11] Kisielewicz M., Quasi - subretractive representation of solution sets for non-convex stochastic inclusions. Discuss. Math., Ser. Algebra and Stoch. Math. (przedstawiono do druku).

[12] Kisielewicz M., Set - valued methods in stochastic optimal control theory, Discuss. Math., Ser. Diff. Incl. (przedstawiona do druku).

[13] Motyl J., Set - valued stochastic integrals. Probability and Math. Stat. (przedstawiona do druku).

[14] Motyl J., Stochastic functional inclusion driven by semimartingale, Probability and Math. Stat. (przedstawiona do druku).

[15] Motyl J., Stochastic evaluation equation, Journal Appl. Math. Stoch. Anal. (przedstawiono do druku).

[16] Michta M., Set - valued random differential equations in Banach space, Dem. Math (przedstawiono do druku).

[17] Michta M., Weak solutions of set - valued random differential equations, Journal Appl. Math. Stoch. Anal. (przedstawiono do druku).

[18] Michta M., On weak solutions of random differential inclusions, Discuss. Math., Ser Diff. Incl. (w druku).

[19] Przeslawski K., Lipschitz continuous selections, Part I, Discuss. Math., Ser. Diff. Incl. (w druku).

[20] Przeslawski K., Yost. D., Lipschitz selections extensions and retractions, Quaderno 49 (1993).

[21] Rybiński L., Michta M., Selections of set - valued stochastic processes, Journal Multiv. Anal. (przedstawiona do druku).

[22] Rybiński L.E., Abstract optimality principle and optimal solutions of stochastic differential equation, Discuss. Math., Ser. Diff. Incl. (w druku).

[23] Kisielewicz A.P., Selection theorem for set - valued functions with decomposable values, Comm. Math. (w druku).

[24] Kisielewicz A.P., Relaxation theorem for set - valued functions with decomposable values. Journal Appl. Math. Stoch. Anal. (przedstawiono do druku).

[25] Kisielewicz A.P., Retraction theorem for set - valued functions with decomposable values, Discuss. Math., Ser. Diff. Incl. (przedstawiona do druku).

[PD] Michta M., Istnienie i jednoznaczność rozwiązań losowych wielowartościowych równań różniczkowych o wypuklych i zwartych prawych stronach. Rozprawa doktorska obroniona 23.09.1993r. na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu.