Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym

Paweł Fotowicz

Przedstawiono analizę matematyczną splotu dwóch rozkładów prostokątnych i splotu rozkładów prostokątnego i normalnego. Opisano przybliżenie powyższego splotu rozkładem trapezowym. Oceniono wartość błędu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla tego splotu współczynnikiem rozszerzenia dla rozkładu trapezowego przy poziomie ufności *p*= 95 %. Porównano błąd przybliżenia z błędami uzyskiwanymi tradycyjnymi metodami oszacowania współczynnika *k*. Przedstawiono również błędy przybliżeń dla różnych poziomów ufności.

Zagadnienie przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego innym znanym rozkładem jest związane z problemem oceny rzeczywistego rozkładu wartości wielkości mierzonej w procedurach obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Zagadnienie to dla splotu dwóch rozkładów prostokątnych rozwiązuje najnowszy dokument o symbolu EA-4/02-S2 wydany przez europejską organizację do spraw współpracy w dziedzinie akredytacji [1, 2]. Zaleca on w przypadku dominacji dwóch składowych niepewności o rozkładach prostokątnych przybliżenie rozkładu wyniku pomiaru splotem tych składowych, czyli rozkładem trapezowym. Pozwala to na dokładniejsze wyznaczenie współczynnika rozszerzenia, niż wynika to z ogólnych zasad przedstawionych w publikacji [3]. Umożliwia w ten sposób pewniejsze oszacowanie niepewności rozszerzonej dla zadanego z góry poziomu ufności. Dla warunków wzorcowania przyjęto poziom ufności równy ok. 95 % i taki jest podawany w świadectwach wzorcowania. Zatem, aby wynik pomiaru miał przypisaną niepewność na tym właśnie poziomie ufności, należy szukać metod zapewniających jak najdokładniejsze obliczanie współczynnika rozszerzenia.

Splot dwóch rozkładów prostokątnych

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa splotu dwóch rozkładów prostokątnych P_1 i P_2 dana jest wyrażeniem:

$$g_{PP}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{P_1}(x-z) f_{P_2}(z)dz \qquad (1)$$

gdzie funkcje

$$f_{P_1}(x-z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a_1} & |x-z| \le a_1 \\ 0 & |x-z| \ge a_1 \end{cases} \qquad (2)$$

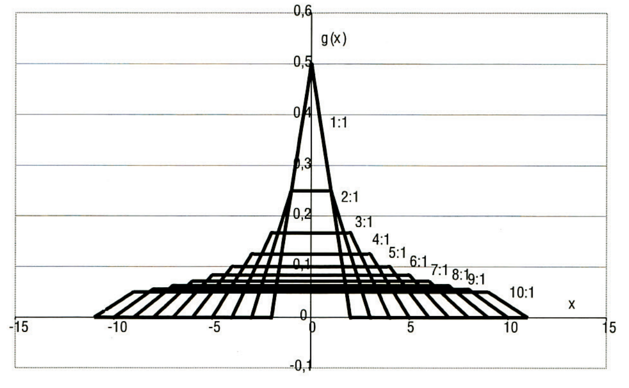
$$f_{P_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a_2} & |z| \le a_2 \\ 0 & |z| \ge a_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Mgr inż. Paweł Fotowicz jest pracownikiem Głównego Urzędu Miar.

są funkcjami gęstości prawdopodobieństwa rozkładów prostokątnych, a a_1 i a_2 odpowiednio ich szerokościami połówkowymi. Stąd funkcja gęstości dla splotu rozkładów P_1 i P_2:

$$g_{PP}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a_1} & |x| \le a_1 - a_2 \\ \dfrac{a_1 + a_2 - |x|}{4a_1a_2} & a_1 - a_2 \le x \le a_1 + a_2 \\ 0 & |x| \ge a_1 + a_2 \end{cases} \quad a_1 \ge a_2 \qquad (4)$$

Z powyższej zależności wyznaczono funkcje gęstości prawdopodobieństw powstałych w ten sposób rozkładów. Na rys. 1 zestawiono te funkcje dla relacji szerokości połówkowych a_1: a_2 od 1: 1 do 10: 1. Definiują one rozkład trapezowy.



Rys 1. Funkcje gęstości splotu dwóch rozkładów prostokątnych o różnych szerokościach połówkowych (a_1: a_2)

Jak wykazano w [4] współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego jest dany wyrażeniem:

$$k = \sqrt{\frac{6}{1+\beta^2}}\left(1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)}\right) \text{ dla } \beta \le \frac{p}{2-p} \qquad (5)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \qquad (6)$$

a p reprezentuje poziom ufności, który dla warunków wzorcowania przyjęto jako p = 95 %.

Splot rozkładów prostokątnego i normalnego

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa splotu rozkładów prostokątnego i normalnego dana jest wyrażeniem:

$$g_{PN}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_P(x-z)f_N(z)\,dz \qquad (7)$$

gdzie:

$$f_P(x-z)=\begin{cases}\frac{1}{2a} & |x-z|\le a\\ 0 & |x-z|\ge a\end{cases} \qquad (8)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu prostokątnego o szerokości połówkowej a, a

$$f_N(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \qquad (9)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Stąd funkcja gęstości dla splotu rozkładów P i N:

$$g_{PN}(x)=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{x-a}^{x+a}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \qquad (10)$$

co można zapisać w postaci:

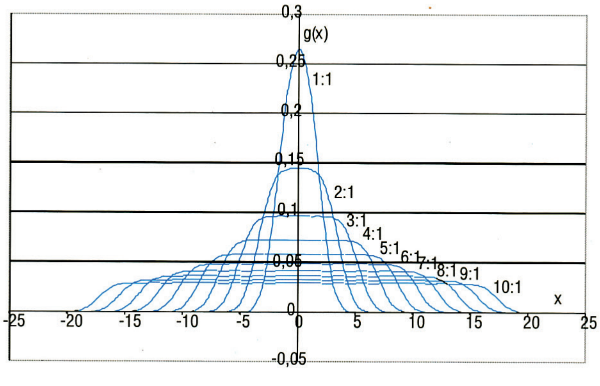
$$g_{PN}(x)=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\left[\Phi(x+a)-\Phi(x-a)\right] \qquad (11)$$

gdzie:

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz \qquad (12)$$

Całkę powyższą najdogodniej można rozwiązać numerycznie, np. przy użyciu arkusza kalkulacyjnego.

Z zależności (10) wyznaczono funkcje gęstości prawdopodobieństwa powstałych w ten sposób rozkładów. Obliczono numerycznie te funkcje dla relacji odchyleń standardowych rozkładów prostokątnego i normalnego (σ_P: σ_N) od 1: 1 do 10: 1 i zestawiono je na rys. 2.



Rys. 2. Funkcje gęstości splotu rozkładów prostokątnego i normalnego o różnych odchyleniach standardowych (σ_P: σ_N)

Przybliżenie funkcji współczynnika rozszerzenia

Współczynnik rozszerzenia dla powstałego rozkładu, opisanego funkcją gęstości prawdopodobieństwa $g_{PN}(x)$, jest funkcją:

$$k_{PN}=f(p,\sigma_P,\sigma_N) \qquad (13)$$

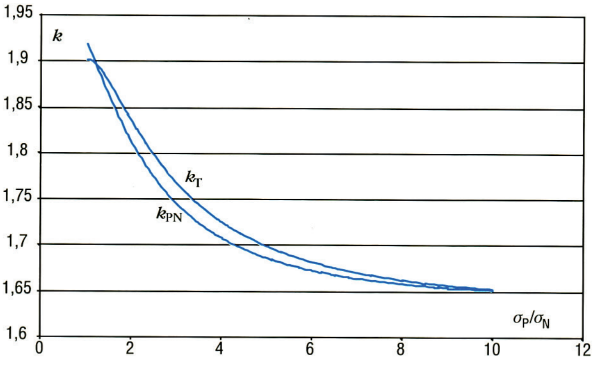
która nie ma postaci analitycznej, lecz można ją wyznaczyć na drodze numerycznej, wykorzystując następujące zależności:

$$k_{PN}=\frac{x_k}{\sqrt{r^2+1}} \qquad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{x_k} g_{PN}(x)\,dx=\frac{1-p}{2} \qquad (15)$$

$$r=\frac{\sigma_P}{\sigma_N} \qquad (16)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3, dla zadanego poziomu ufności p = 95 %, na którym reprezentowane są graficznie przez krzywą oznaczoną symbolem k_{PN}.



Rys. 3. Funkcje współczynnika rozszerzenia wyznaczone ze splotu rozkładu prostokątnego i normalnego oraz z rozkładu trapezowego dla p = 95%

Na tym samym rysunku zobrazowano krzywą k_T powstałą z przekształconej formuły (5), na obliczanie współczynnika rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, sprowadzonej do postaci:

$$k_T=\sqrt{\frac{3(r+1)^2}{r^2+1}}\left(1-\sqrt{(1-p)\frac{4r}{(r+1)^2}}\right) \qquad (17)$$

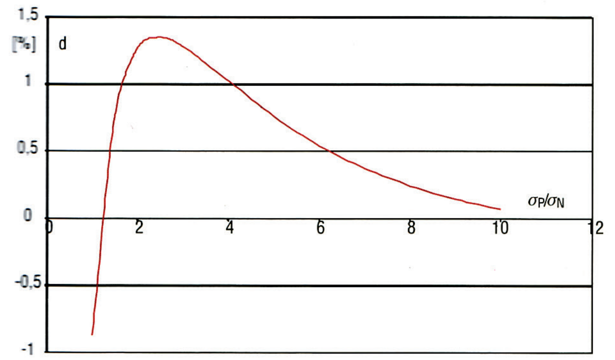
która została wyznaczona, jak poprzednio, dla poziomu ufności p = 95 %.

Błąd przybliżenia funkcji współczynnika rozszerzenia

Błąd przybliżenia funkcji współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego funkcją (17) można opisać formułą:

$$\delta_T=\frac{k_T-k_{PN}}{k_{PN}}\cdot 100\ \% \qquad (18)$$

gdzie: k_T – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, k_{PN} – współczynnik rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego.



Rys. 4. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego współczynnikiem rozszerzenia rozkładu trapezowego, dla $p = 95$ %

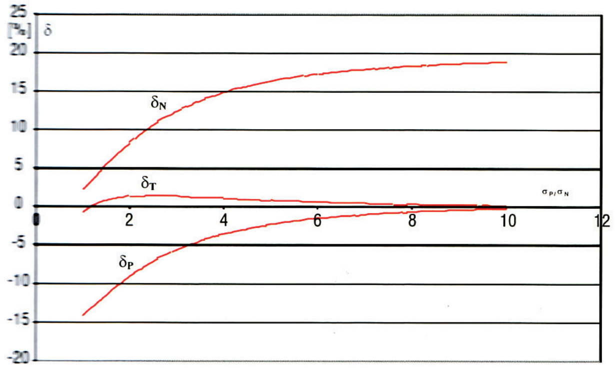
Błąd ten jest funkcją ilorazu σ_P/σ_N i dla poziomu ufności $p = 95$ % ma postać jak na rys. 4. Wartość błędu przybliżenia nie przekracza 1,5 % dla zakresu zmian ilorazu r od 1 do 10, co dla warunków wzorcowania można przyjąć za przybliżenie dokładne.

Można porównać to przybliżenie z tradycyjnym podejściem do zagadnienia, czyli przybliżeniem współczynnika rozszerzenia splotu P*N współczynnikiem dla rozkładu normalnego lub współczynnikiem dla rozkładu prostokątnego. Sytuację taką przedstawia rys. 5. Zestawiono na nim funkcje obrazujące błąd przybliżenia współczynnika dla splotu P*N współczynnikami dla rozkładu normalnego (δ_N), dla rozkładu prostokątnego (δ_P) i dla rozkładu trapezowego (δ_T). Odpowiednie funkcje zostały zdefiniowane następująco:

$$\delta_N = \frac{k_N - k_{PN}}{k_{PN}} \cdot 100\ \% \qquad (19)$$

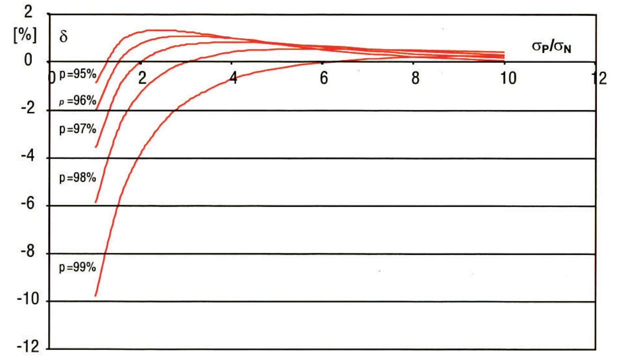
$$\delta_P = \frac{k_P - k_{PN}}{k_{PN}} \cdot 100\ \% \qquad (20)$$

gdzie: k_N – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego, k_P – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego.



Rys. 5. Błędy przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego współczynnikami dla rozkładu normalnego, prostokątnego i trapezowego przy poziomie ufności $p = 95$ %

Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla każdej wartości ilorazu r splatanych rozkładów jest większy w przypadku zastosowania tradycyjnego przybliżenia przy wykorzystaniu współczynników rozkładu normalnego lub prostokątnego w porównaniu z zastosowaniem współczynnika wywodzącego się z formuły dla rozkładu trapezowego. Jego wartość rośnie jedynie dla wyższych poziomów ufności, powyżej $p = 95$ %, co ilustruje rys. 6.



Rys. 6. Błędy przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego współczynnikiem dla rozkładu trapezowego przy różnych poziomach ufności

Jednakże dla warunków przyjętych przy wzorcowaniu, czyli $p = 95$ % przybliżenie to jest w pełni zadowalające.

Podsumowanie

Przedstawiona analiza splotu rozkładów prostokątnego i normalnego pozwala stwierdzić, że dogodnym przybliżeniem tak powstałego rozkładu jest rozkład trapezowy. Jest to o tyle ważna obserwacja, iż opis matematyczny tego rozkładu jest dokładnie znany i względnie analitycznie prosty. Bez konieczności odwoływania się do uciążliwych obliczeń numerycznych można precyzyjnie wyznaczyć dla tego rozkładu współczynnik rozszerzenia dla zadanego z góry poziomu ufności. Ma to istotne znaczenie do oceny wartości współczynnika rozszerzenia stosowanego w procedurach obliczania niepewności wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. Szczególna zaletą jest to, że dla warunków wzorcowania, które wyznacza poziom ufności około 95 %, błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia nie przekracza 2 %. Jest to poziom błędu pomijalny, gdyż jego wartość jest nie większa niż wartość błędu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla rozkładu normalnego wartością liczbową $k = 2$, dla poziomu ufności $p = 95$ %.

Bibliografia

1. Fotowicz P.: Obliczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu użytkowych przyrządów pomiarowych. PAR nr 7-8/2000.
2. Fotowicz P.: Procedury obliczania niepewności pomiaru w świetle dokumentu EA. VI Sympozjum Klubu POLSKIE FORUM ISO 9000 METROLOGIA W SYSTEMACH JAKOŚCI – 3. Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 16-18 października 2000.
3. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM 1999.
4. Fotowicz P.: Kryteria wyboru współczynnika rozszerzenia w procedurach obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. PAR nr 1/2001.

Streszczenia artykułów naukowych

Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym, Paweł Fotowicz – s. 9

Przedstawiono analizę matematyczną splotu dwóch rozkładów prostokątnych i splotu rozkładów prostokątnego i normalnego. Opisano przybliżenie powyższego splotu rozkładem trapezowym. Oceniono wartość błędu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla tego splotu współczynnikiem rozszerzenia dla rozkładu trapezowego przy poziomie ufności p=95%. Porównano błąd przybliżenia z błędami uzyskiwanymi tradycyjnymi metodami oszacowania współczynnika k. Przedstawiono również błędy przybliżeń dla różnych poziomów ufności.

Accuracy of convolution of rectangular and normal distributions approximation by trapezoidal distribution, Paweł Fotowicz – p. 9

Convolution of rectangular distributions and convolution of rectangular and normal distributions are analyzed. Convolution of rectangular and normal distributions is approximated by trapezoidal distribution. At the 95% confidence level, there is estimated the approximation error defined by the coverage factor for the rectangular and normal distributions convolution and the coverage factor for trapezoidal distribution. The approximation error is compared with the errors derived by traditional methods of coverage factor estimation. The approximation errors at various confidence levels are also presented.