

Rozszerzona zasada przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej przy wzorcowaniu

Paweł Fotowicz

Istotnym zagadnieniem w procedurach obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu jest ocena rozkładu wielkości mierzonej, gdy niektóre wielkości wejściowe charakteryzują się ograniczoną liczbą stopni swobody niepewności standardowej. Stosowana w takiej sytuacji metoda rekomendowana w [1] nie daje gwarancji zapewnienia poziomu ufności przyjętego dla warunków wzorowania wynoszącego około 95 %. Zasada przedstawiona w [2] odnosi się jedynie do wielkości o nieograniczonej liczbie stopni swobody niepewności standardowej. Aby poradzić sobie z powyższą sytuacją, należy przeanalizować spłyty rozkładów prostokątnego i *t*-Studenta o różnych liczbach stopni swobody.

Splot rozkładów prostokątnego i *t*-Studenta

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa splotu rozkładów prostokątnego i *t*-Studenta P*S dana jest wyrażeniem:

$$g_{PS}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_P(x-z) f_S(z, \nu) dz \quad (1)$$

gdzie:

$$f_P(x-z) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x-z| \leq a \\ 0 & |x-z| \geq a \end{cases} \quad (2)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu prostokątnego o szerokości połówkowej *a*, a

$$f_S(z, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (3)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu *t*-Studenta o liczbie stopni swobody *ν*.

Stąd funkcja gęstości dla splotu P*S:

$$g_{PS}(x) = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{x-a}^{x+a} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz \quad (4)$$

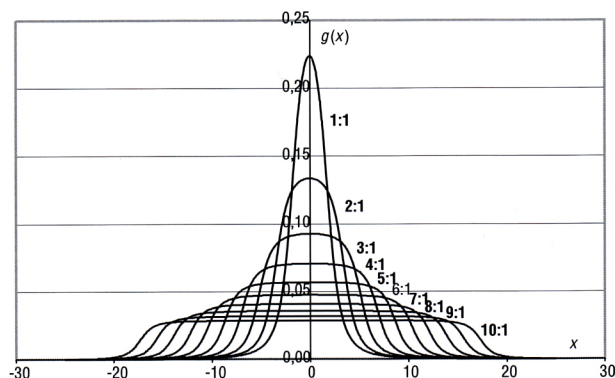
co można zapisać w postaci:

$$g_{PS}(x) = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} [\Psi(x+a) - \Psi(x-a)] \quad (5)$$

gdzie:

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^z \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz \quad (6)$$

Powyższą całkę można najdogodniej rozwiązać numerycznie. Z zależności (4) wyznaczono funkcje gęstości prawdopodobieństwa powstałych w ten sposób rozkładów. Obliczono numerycznie te funkcje dla relacji $\sigma_p:s(\bar{z})$ odchylenia standardowego rozkładu prostokątnego do odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej \bar{z} z liczbą stopni swobody $\nu = 2$ rozkładu *t*-Studenta zmieniającej się od 1:1 do 10:1 i zestawiono je na rys. 1.



Rys. 1. Funkcje gęstości splotu rozkładów prostokątnego i *t*-Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = 2$ o różnych odchyleniach standardowych

Współczynnik rozszerzenia dla splotu P*S

Współczynnik rozszerzenia dla powstałego rozkładu, opisanego funkcją gęstości prawdopodobieństwa $g_{PS}(x)$, jest funkcją:

$$k_{PS} = f(p, \sigma_p, s(\bar{z})) \quad (7)$$

która nie ma postaci analitycznej, lecz można ją wyznaczyć na drodze numerycznej, wykorzystując nastę-

Mgr inż. Paweł Fotowicz jest pracownikiem Głównego Urzędu Miar.

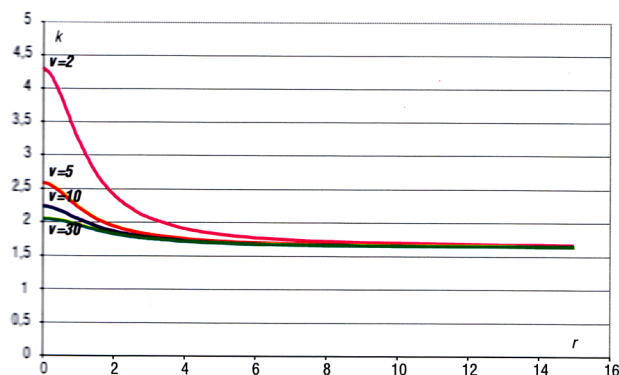
pujące zależności:

$$k_{PS} = \frac{x_k}{\sqrt{r^2 + 1}} \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{x_k} g_{PS}(x) dx = \frac{1-p}{2} \quad (9)$$

$$r = \frac{\sigma_P}{s(\bar{z})} \quad (10)$$

Wyniki obliczeń współczynników k_{PS} dla różnych liczb stopni swobody v i poziomu ufności $p = 95\%$ przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Współczynniki rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i t-Studenta o różnej liczbie stopni swobody i przy poziomie ufności 95 %

Przybliżenie współczynnika rozszerzenia dla splotu P*S

Obliczenia numeryczne współczynników rozszerzenia k_{PS} są czynnością uciążliwą i najwygodniej dla ustalenia ich wartości wykorzystać tablice zamieszczone w [3]. Można również do przybliżonego ustalenia ich wartości posłużyć się opracowaną specjalnie do tego celu formułą matematyczną:

$$k = \frac{vr+1}{vr} k_T \quad (11)$$

gdzie:

$$k_T = \sqrt{\frac{3(r+1)^2}{r^2 + 1} \left(1 - \sqrt{(1-p) \frac{4r}{(r+1)^2}} \right)} \quad (12)$$

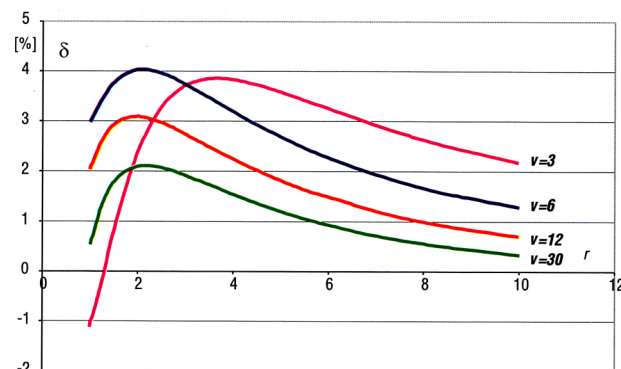
Współczynnik k_T jest współczynnikiem rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, będącego dobrym przybliżeniem splotu rozkładu prostokątnego i normalnego P*N [4]. Należy zauważyć, że dla rosnącej liczby stopni swobody v współczynnik k dąży do wartości k_T , gdyż rozkład P*S zbiega do rozkładu P*N.

Jeżeli zdefiniujemy błąd przybliżenia współczynnika k_{PS} formułą (11) w sposób następujący:

$$\delta = \frac{k - k_{PS}}{k_{PS}} \cdot 100\% \quad (13)$$

to jego wartość maksymalna wynosi około 4 % dla

poziomu ufności $p = 95\%$, liczby stopni swobody $v \geq 3$ i zakresu zmienności $1 \leq r \leq 10$, a jego przebiegi ilustruje rys. 3.



Rys. 3. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i t-Studenta o różnych liczbach stopni swobody przy poziomie ufności 95 %

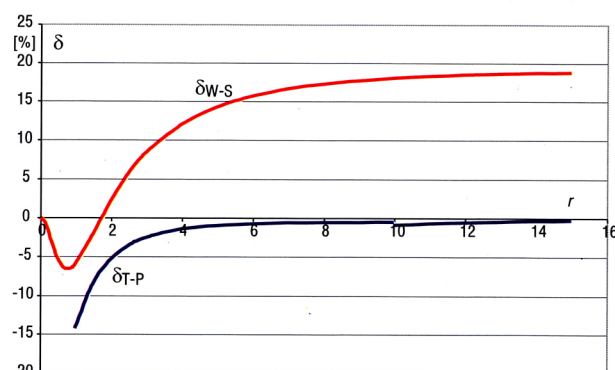
Przybliżenie współczynnika rozszerzenia metodą Welch-Satterthwaite'a

Metoda Welch-Satterthwaite'a polega na przybliżeniu nieznanego splotu rozkładów wielu wielkości wejściowych rozkładem t-Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody danej formułą matematyczną:

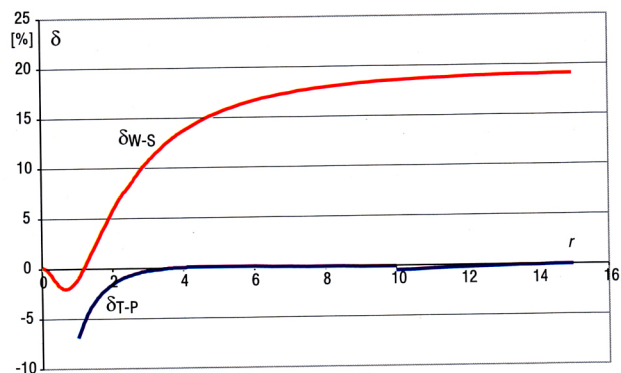
$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} \quad (14)$$

gdzie: u_c - złożona niepewność standardowa, u_i - niepewność wielkości wejściowej, v_i - liczba stopni swobody rozkładu wielkości wejściowej

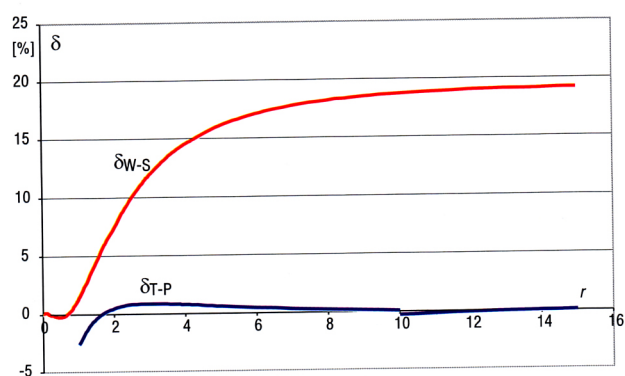
Na podstawie obliczonej liczby v_{eff} z tablicy wartości kwantyli $t_p(v)$ rozkładu t-Studenta dla określonego poziomu ufności wyznaczamy wartość współczynnika rozszerzenia k . Jeżeli zastosujemy powyższą metodę do przybliżenia współczynnika rozszerzenia splotu P*S, to otrzymamy błąd przybliżenia δ_{W-S} , zdefiniowany zależnością (13), którego przebieg przedstawiono na rys. 4-6



Rys. 4. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i rozkładu t-Studenta o liczbie stopni swobody $v = 5$, przy poziomie ufności 95 %



Rys. 5. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i rozkładu *t*-Studenta o liczbie stopni swobody $v = 10$, przy poziomie ufności 95 %



Rys. 6. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i rozkładu *t*-Studenta o liczbie stopni swobody $v = 30$, przy poziomie ufności 95 %

dla kilku wartości stopni swobody v przy poziomie ufności 95 %. Błąd ten dla rosnącego udziału składowej prostokątnej w splotcie P*S zdąża do wartości ok. 20 %, niezależnie od liczby stopni swobody składowej opisanej rozkładem *t*-Studenta. W związku z tym metoda Welch-Satterthwaite'a przy wyznaczaniu współczynnika k nie zapewnia osiągnięcia założonego poziomu ufności niepewności rozszerzonej, w szczególności dla dużej wypadkowej liczby stopni swobody.

Przybliżenie współczynnika rozszerzenia przy użyciu rozkładu trapezowego i prostokątnego

Splot P*S można przybliżyć rozkładem trapezowym i prostokątnym w zakresie zmienności ilorazu r , dla którego istnieje sens matematyczny takiego przybliżenia. Dla wartości r z przedziału od 1 do 10 byłby to rozkład trapezowy, a dla r większego od 10 rozkład prostokątny. Podobnie jak w poprzednim rozdziale można zdefiniować formułą (13) błąd δ_{T-P} przybliżenia współczynnika rozszerzenia. Przebieg tego błędu zilustrowano również na rys. 4-6 dla tych samych splotów P*S i poziomu ufności 95 %. Dla przeważającego zakresu zmienności r przybliżenie to jest dokładniejsze od metody Welch-Satterthwaite'a i co ważne dla rosnących

wartości ilorazu r błąd przybliżenia dąży do zera. Jedynie dla wartości bliskich $r = 1$ błąd przybliżenia dla większości splotów P*S jest większy od błędu metody Welch-Satterthwaite'a. Problem ten można rozwiązać łącząc obie metody przybliżenia współczynnika rozszerzenia.

Zasada przybliżenia współczynnika rozszerzenia przy wzorcowaniu

Przedstawione sposoby przybliżenia rozkładu i współczynnika rozszerzenia dla splotu P*S można ze sobą połączyć, wykorzystując ich najkorzystniejsze obszary przybliżeń. Ze względu na to, że rozkład *t*-Studenta powyżej liczby stopni swobody $v = 100$ niedokładnie przybliża splot P*S, należy metodę Welch-Satterthwaite'a stosować tylko dla wartości v_{eff} nie większej niż 100. W obszarze powyżej wypadkowej liczby stopni swobody $v_{\text{eff}} = 200$ dokładnym przybliżeniem współczynnika rozszerzenia dla splotu P*S jest dla $r \leq 10$ współczynnik dla rozkładu trapezowego, a powyżej tej wartości współczynnik dla rozkładu prostokątnego. W obszarze pomiędzy wypadkową liczbą stopni swobody $v_{\text{eff}} = 100$ a $v_{\text{eff}} = 200$ można współczynnik rozszerzenia przybliżyć współczynnikiem dla rozkładu normalnego.

Na podstawie przedstawionych powyżej wniosków można sformułować następującą zasadę przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej, gdy definiując ją wielkości wejściowe mogą charakteryzować się ograniczoną liczbą stopni swobody niepewności standardowej: Jeżeli wypadkowa liczba stopni swobody v_{eff} wyznaczona ze wzoru Welch-Satterthwaite'a jest mniejsza niż 100, to najlepszym przybliżeniem rozkładu wielkości wyjściowej Y jest rozkład *t*-Studenta o liczbie stopni swobody v_{eff} . Gdy wypadkowa liczba stopni swobody jest większa niż 200 oraz wielkość wejściowa X_i o największym udziale w niepewności złożonej $u_i(y)$ opisana jest rozkładem prostokątnym i spełnia warunek

$$|u_i(y)| \geq \sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)} \quad ,$$

gdzie $u_i(y) = c_i u(x_i)$, $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$,

to niezależnie od rozkładów pozostałych wielkości wejściowych najlepszym przybliżeniem rozkładu wielkości wyjściowej jest rozkład trapezowy lub prostokątny. W pozostałych przypadkach najlepszym przybliżeniem rozkładu wielkości wyjściowej jest rozkład normalny.

Z zasady tej można wyprowadzić sposób przybliżenia współczynnika rozszerzenia niepewności wielkości wyjściowej:

gdy $v_{\text{eff}} < 100$, wtedy $k = k_S$
 gdy $100 \leq v_{\text{eff}} \leq 200$, wtedy $k = k_N$

gdy $v_{\text{eff}} > 200$ wtedy $\begin{cases} k = k_N & \text{dla } 0 < r < 1 \\ k = k_T & \text{dla } 1 \leq r \leq 10 \\ k = k_P & \text{dla } r > 10 \end{cases}$

gdzie:

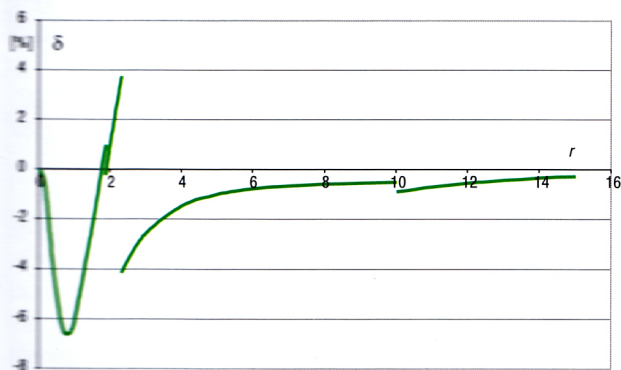
$$r = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (15)$$

$u_i(y)$ – największy udział w niepewności złożonej wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym, k_s – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu t -Studenta z liczbą stopni swobody ν_{eff} , k_N – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego, k_T – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, k_p – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego.

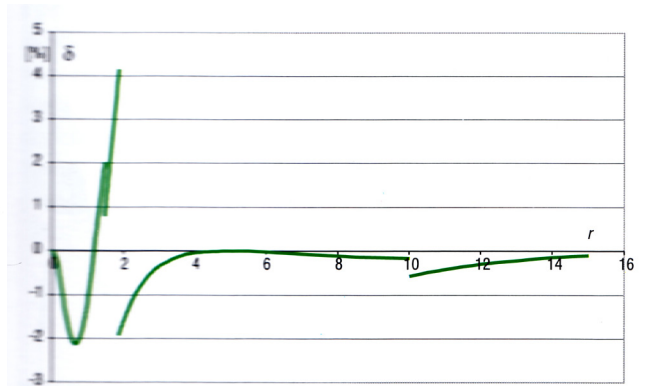
Podsumowanie

Powyższą zasadę zastosowano w celu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego i t -Studenta w pełnym zakresie zmienności ich odchyleń standardowych. Obliczenia wykonano dla kilku rozkładów t -Studenta różniących się liczbą stopni swobody przy $p = 95\%$, a wyniki przedstawiono na rys. 7-9. We wszystkich analizowanych sytuacjach wartość maksymalna błędów przybliżenia współczynnika rozszerzenia malała wraz ze wzrostem liczby stopni swobody.

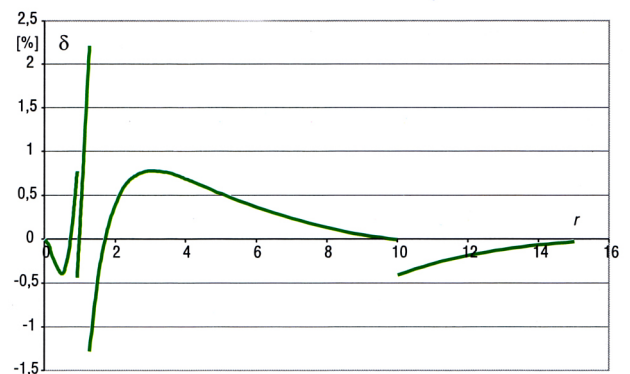
Przedstawiona zasada przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej umożliwia dokładniejsze wyznaczenie wartości współczynnika rozszerzenia dla dowolnej liczby wielkości wejściowych niż metoda rekomendowana w [1].



Rys. 7. Błąd wynikający z zasady przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej przy wzorcowaniu dla splotu rozkładów prostokątnego i t -Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = 5$



Rys. 8. Błąd wynikający z zasady przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej przy wzorcowaniu dla splotu rozkładów prostokątnego i t -Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = 10$



Rys. 9. Błąd wynikający z zasady przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej przy wzorcowaniu dla splotu rozkładów prostokątnego i t -Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = 30$

Jest uogólnieniem zasady opisanej w [2] na wielkości o dowolnej liczbie stopni swobody niepewności standardowej. Może być zatem z powodzeniem stosowana w procedurach obliczania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu dla każdej możliwej sytuacji pomiarowej.

Bibliografia

1. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. GUM, 1999.
2. Fotowicz P.: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR nr 9, 2001.
3. Turzeniecka D.: Analiza dokładności wybranych przybliżonych metod oceny niepewności. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1999.
4. Fotowicz P.: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. PAR nr 5, 2001.

Streszczenia artykułów naukowych

Rozszerzona zasada przybliżenia rozkładu wielkości mierzonej przy wzorcowaniu, Paweł Fotowicz — s. 18

Omówiono rozszerzoną zasadę przybliżenia rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej przy wzorcowaniu, charakteryzującej się ograniczoną liczbą stopni swobody niepewności standardowej. Przedstawiono splot rozkładu prostokątnego i t -Studenta oraz przybliżenie współczynnika rozszerzenia dla tego splotu przy poziomie ufności 95%. Porównano proponowaną metodę obliczeniową z metodą Welch-Satterthwaite'a. Oceniono błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia wynikający z przedstawionej zasady.

The expanded principle of distribution approximation of the measurand in calibration, Paweł Fotowicz — p. 18

The expanded principle of distribution approximation of the measurand in calibration for input quantity with limited degrees of freedom of the standard uncertainty is described. The convolution of rectangular and t -Student distributions and its approximation of coverage factor at confidence level of 95% is presented. The presented method of calculation is compared with the Welch-Satterthwaite method. Approximation error of coverage factor resulting of described method is evaluated.