

Niepewność pomiaru

Ocena metody Welch-Satterthwaite'a

Paweł Fotowicz

Metoda Welch-Satterthwaite'a jest zalecana przez dokument ISO [1] przy obliczaniu niepewności pomiaru wielkości mierzonej. Metoda ta umożliwia przybliżone wyznaczenie wartości współczynnika rozszerzenia.

Idea metody Welch-Satterthwaite'a polega na założeniu, że rozkładem wielkości mierzonej jest rozkład Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody. Liczbę stopni swobody pozwala obliczyć wzór przedstawiony przez B. L. Welcha i F. E. Satterthwaite'a. Należy pamiętać, że rozkład Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody jest jedynie przybliżeniem rzeczywistego rozkładu wielkości mierzonej. Powstaje zatem pytanie, na ile to przybliżenie jest dokładne i jakich należy oczekiwać rozbieżności w ocenie samego współczynnika rozszerzenia. Problemem jest znalezienie prawidłowego odniesienia dla przybliżonego rozkładu wielkości mierzonej. Określenie rzeczywistego rozkładu wielkości mierzonej może wydawać się niemożliwe, a wszelkie próby zgodne z zasadami statystyki matematycznej, bardzo problematyczne. Jednakże wspomniany dokument ISO dopuszcza alternatywny sposób obliczenia współczynnika rozszerzenia. Polega on na wyznaczeniu rozkładu wielkości mierzonej jako splotu rozkładów wielkości wejściowych pod warunkiem, że wielkość wyjściowa jest funkcją liniową wielkości wejściowych, które dodatkowo powinny być zmiennymi losowymi niezależnymi. Operacja splotu matematycznego pozwala na dokładne wyznaczenie, aczkolwiek na ogół w postaci numerycznej, rozkładu wielkości mierzonej, gdy jednoznacznie są określone wszystkie rozkłady wielkości wejściowych. Pozwala to na obliczenie współczynnika rozszerzenia dla założonego poziomu ufności. Rozwiązanie to można zaliczyć do kategorii dokładnych przy obliczaniu współczynnika k . Można zatem potraktować je jako odniesienie, pod przyjętymi warunkami, dla metody Welch-Satterthwaite'a.

Metoda Welch-Satterthwaite'a

Zgodnie z wywodem przedstawionym w [1] dla każdej zmiennej losowej Y będącej sumą zmiennych losowych X_i wariancja estymaty jej wariancji $s^2(y)$ jest dana zależnością

$$\sigma^2[s^2(y)] = \frac{2\sigma^4(y)}{v} \quad (1)$$

gdzie: $\sigma(y)$ – odchylenie standardowe zmiennej Y , v – liczba stopni swobody estymaty odchylenia standardowego zmiennej Y .

Ponieważ zmienna losowa $Y = c_1X_1 + \dots + c_NX_N$, to

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 s^2(x_i) \quad (2)$$

gdzie: c_i – współczynnik wrażliwości, $s(x_i)$ – estymata odchylenia standardowego zmiennej X_i .

Biorąc pod uwagę wariancje estymat wariancji zmiennych losowych otrzymamy

$$\sigma^2(s^2(y)) = \sum_{i=1}^N c_i^4 \sigma^2(s^2(x_i)) \quad (3)$$

co prowadzi do równości

$$\frac{\sigma^4(y)}{v} = \sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 \sigma^4(x_i)}{v_i} \quad (4)$$

gdzie: v_i – liczba stopni swobody estymaty odchylenia standardowego zmiennej X_i .

Powyższa równość po przekształceniu prowadzi do wzoru Welch-Satterthwaite'a przedstawiającego wypadkową liczbę stopni swobody

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \quad (5)$$

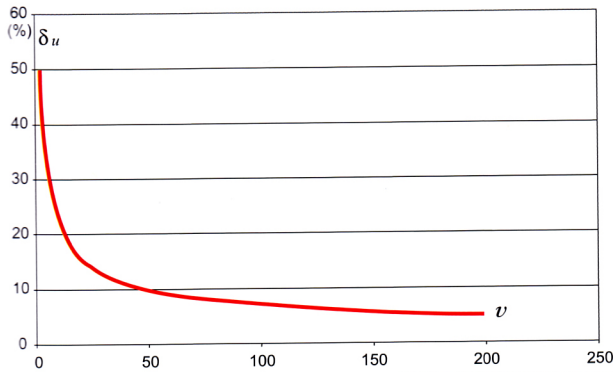
gdzie: $u_c(y)$ – złożona niepewność standardowa wielkości mierzonej y , $u(x_i)$ – niepewność standardowa wielkości wejściowej x_i .

Dla obliczonej w ten sposób liczby v_{eff} z tablicy wartości kwantyla $t_p(v)$ rozkładu Studenta dla określonego poziomu ufności wyznacza się wartość współczynnika rozszerzenia.

Obliczona w powyższy sposób liczba stopni swobody może też posłużyć do oceny wariancji złożonej niepewności standardowej, czyli niepewności wyznaczonej niepewności. Jeżeli niepewność tę oznaczymy: $\Delta u_c(y)$, to względna zmiana złożonej niepewności standardowej wynosi

$$\delta u_c(y) = \frac{\Delta u_c(y)}{u_c(y)} \approx \frac{1}{\sqrt{2v_{\text{eff}}}} \quad (6)$$

Powyższa zależność przedstawia w jakim zakresie obliczona wartość niepewności standardowej wielkości mierzonej może być zmienna. Zmienność tę graficznie ilustruje rys. 1. Dla bardzo małej liczby stopni swobody zmienność powyższa sięga ponad 50 %, lecz dla rosnącej wartości v_{eff} powyżej $v = 200$, spada już poniżej 5 %.



Rys. 1. Względna zmiana niepewności standardowej w funkcji liczby stopni swobody

Założenia do oceny metody

Warunki, o których wspomniano we wstępie na ogół są spełnione przy wyznaczaniu niepewności w pomiarach związanych z wzorcowaniem. Dla tych pomiarów przyjęto arbitralnie stały poziom ufności 95 %. Można zatem pokusić się o przeprowadzenie następującego rozumowania. Wielkościom wejściowym na ogół przypisuje się rozkłady prawdopodobieństwa: Studenta, normalne bądź prostokątne. Na mocy centralnego twierdzenia granicznego splot wielu różnych rozkładów zdąża do rozkładu normalnego, gdy ich liczba jest dostatecznie duża, ich odchylenia standardowe porównywalne i dużo mniejsze od odchylenia standardowego rozkładu wynikowego. Współczynnik rozszerzenia dla takiego rozkładu jest równy współczynnikowi jak dla rozkładu normalnego.

Metoda Welch-Satterthwaite'a daje ten sam rezultat, gdyż wypadkowa liczba stopni swobody obliczona ze wzoru (5) dąży do nieskończoności, dając wynikowy rozkład Studenta zbieżny z rozkładem normalnym. Inaczej sytuacja przedstawia się dla alternatywnych, granicznych przypadków splotu rozkładów. Przypadkami tymi są sploty tylko dwóch rozkładów Studenta, splot rozkładu Studenta z rozkładem prostokątnym oraz splot dwóch rozkładów Studenta z rozkładem prostokątnym, szczególnie gdy rozkład Studenta charakteryzuje się małą liczbą stopni swobody. Dla tych właśnie sytuacji wykonano obliczenia, porównując otrzymane wartości współczynników.

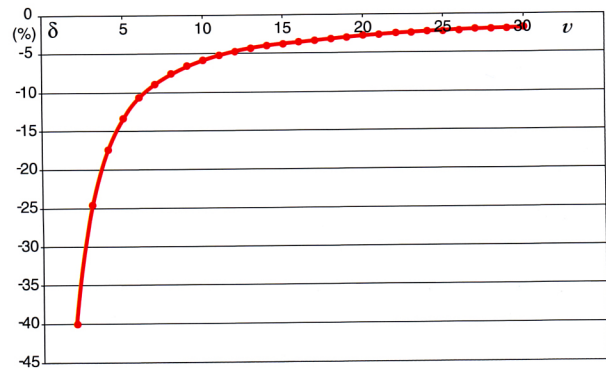
Jako poziom ufności przyjęto prawdopodobieństwo objęcia jak przy wzorowaniu, czyli $p = 95$ %. Wyniki przedstawiono w postaci odchylenia wartości współczynnika wyznaczonego metodą Welch-Satterthwaite'a w odniesieniu do wartości wyznaczonych przy zastosowaniu metody splotu matematycznego, danego następującą zależnością:

$$\delta = \frac{k - k_{\text{splot}}}{k_{\text{splot}}} \cdot 100 \% \quad (7)$$

gdzie: k – współczynnik rozszerzenia wyznaczony metodą Welch-Satterthwaite'a, k_{splot} – współczynnik rozszerzenia wyznaczony metodą splotu matematycznego.

Odniesienie metody do splotu dwóch rozkładów Studenta

Współczynnik rozszerzenia obliczono zakładając, że wielkość wyjściowa jest opisana splotem dwóch rozkładów Studenta o jednakowej liczbie stopni swobody. Wyniki obliczeń zestawiono na rys. 2. Zaznaczone na wykresie punkty przedstawiają graficznie wartości odchylenia współczynnika rozszerzenia, wyznaczonego formułą (7). Analizowano odchylenia w odniesieniu do splotu rozkładów Studenta o liczbie stopni swobody z przedziału od $v = 2$ do $v = 30$, jako najbardziej reprezentatywnego zakresu zmienności tego parametru. Największa względna wartość odchylenia sięga aż 40 % i zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby stopni swobody. Wszystkie otrzymane wartości są ujemne, co świadczy, że analizowana metoda daje wartości współczynnika mniejsze niż te, które wynikają z operacji splotu matematycznego.



Rys. 2. Błąd wyznaczenia współczynnika rozszerzenia w odniesieniu do splotu dwóch rozkładów Studenta o jednakowej liczbie stopni swobody v

Odniesienie metody do splotu rozkładów prostokątnego i Studenta

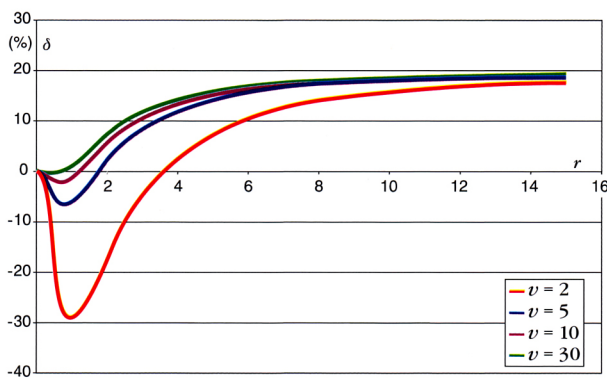
Ocenę błędów metody przedstawiono w funkcji pewnego parametru splotu rozkładów będącego ilorazem

$$r = \frac{u_B(x_i)}{u_A(x_j)} \quad (8)$$

gdzie: $u_B(x_i)$ – niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem prostokątnym, $u_A(x_j)$ – niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem Studenta.

Parametr r pokazuje jaki jest wzajemny udział w splotcie niepewności standardowych obu wielkości wejściowych. Wyniki obliczeń błędów przedstawiono na

rys. 3. Analizowano odchylenia wartości współczynnika w odniesieniu do splotu rozkładów prostokątnego i Studenta o różnych liczbach stopni swobody w zakresie od $v = 2$ do $v = 30$. Błąd ten w większości analizowanych przypadków ma przebieg, dla rosnącego ilorazu r , od wartości zerowej poprzez ujemne do wartości dodatniej, asymptotycznie zdążającej do 20 %. Najmniejsza ujemna wartość to prawie -30 %, która zanika dla rosnącej liczby stopni swobody. Przebieg krzywych błędu świadczy, że analizowana metoda ma tendencję do „spłaszczenia” wartości współczynnika. Oznacza to, że rzeczywista jego wartość dla rosnącego udziału składowej opisanej rozkładem Studenta jest większa, a dla rosnącego udziału składowej opisanej rozkładem prostokątnym jest mniejsza, niż wartości obliczone metodą Welch-Satterthwaite'a.



Rys. 3. Błąd wyznaczenia współczynnika rozszerzenia w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego i Studenta o różnych liczbach stopni swobody v

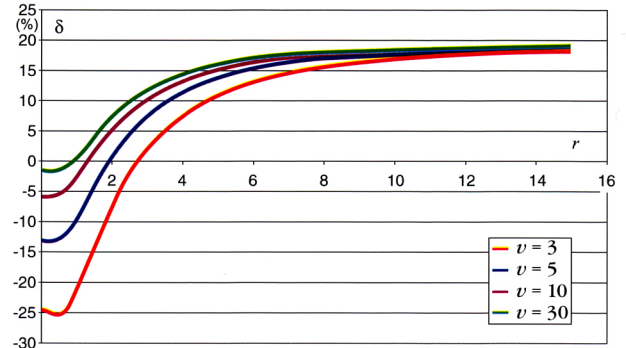
Odniesienie metody do splotu dwóch rozkładów Studenta i rozkładu prostokątnego

Ocenę błędów metody przedstawiono w funkcji pewnego parametru splotu rozkładów będącego ilorazem

$$r = \frac{u_B(x_i)}{\sqrt{u_A^2(x_k) + u_A^2(x_l)}} \quad (9)$$

gdzie: $u_B(x_i)$ – niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem prostokątnym, $u_A(x_k)$ i $u_A(x_l)$ – niepewności standardowe wielkości opisanych rozkładami Studenta.

Wyniki obliczeń błędów przedstawiono na rys. 4. Analizowano odchylenia wartości współczynnika w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego i dwóch rozkładów Studenta o równych liczbach stopni swobody z zakresu od $v = 3$ do $v = 30$. Błąd ten dla rosnącego ilorazu r zmienia się od wartości ujemnej do wartości dodatniej. Najmniejsza jego ujemna wartość to ponad -25 % i zanika dla rosnącej liczby stopni swobody. Wartość dodatnia błędów asymptotycznie dąży do 20 %, niezależnie od liczby stopni swobody. I w tym wypadku mamy do czynienia ze zjawiskiem „spłaszczenia” wartości współczynnika otrzymanego analizowaną metodą. Jego wartości bo-



Rys. 4. Błąd wyznaczenia współczynnika rozszerzenia w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego i dwóch rozkładów Studenta o różnych liczbach stopni swobody v

wiem zmieniają się w znacznie mniejszym zakresie niż wynika to z obliczeń metodą splotu matematycznego.

Alternatywne zastosowanie wzoru Welch-Satterthwaite'a

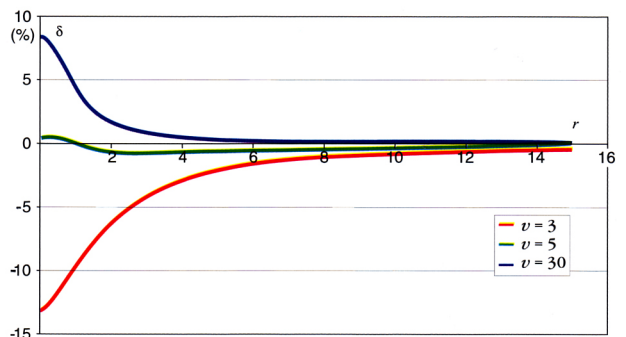
Wzór podany przez Welch-Satterthwaite'a można również wykorzystać przy obliczaniu niepewności pomiaru w alternatywny sposób. Wypadkowa liczba stopni swobody jest miarą niedokładności oszacowania niepewności złożonej, którą wyraża wielkość $\delta u_c(y)$ opisana zależnością (6). Jeżeli w pomiarze uwzględnimy fakt owej niedokładności, co szczególnie dotyczy składowych niepewności ocenianych metodą statystyczną na podstawie serii obserwacji, to niepewność rozszerzoną można wówczas powiększyć o wartość $\delta u_c(y)$. Niepewność rozszerzona przyjmie postać:

$$U_m = k \cdot u_c(y) \cdot (1 + \delta u_c(y)) \quad (10)$$

Powstaje pytanie, na ile tak obliczona niepewność pomiaru różni się od niepewności rozszerzonej U liczonej metodą dokładną. Odpowiedź na to pytanie można uzyskać rozwiązując poniższe równanie, w którym należy zastosować operację splotu matematycznego:

$$\int_{-U}^U g(y) \cdot dy = p \quad (11)$$

gdzie: $g(y) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \dots \cdot g_N(x_N)$, $g_i(x_i)$ – gęstość prawdopodobieństwa wielkości wejściowej, p – poziom ufności.



Rys. 5. Błąd wyznaczenia niepewności rozszerzonej w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego i Studenta o różnych liczbach stopni swobody v

Błąd wyznaczenia niepewności opisanej zależnością (10) można zdefiniować jako

$$\delta = \frac{U_m - U}{U} \cdot 100\% \quad (12)$$

Przy założeniu poziomu ufności $p = 95\%$ i w odniesieniu do splotu rozkładów prostokątnego i Studenta przebieg tego błędu przedstawia rys. 5. Z przebiegu krzywych błędu wynika, że dla rosnącej wartości ilorazu r niepewność obliczona z zależności (10) jest zbliżona z wartością niepewności liczoną metodą splotu matematycznego, niezależnie od liczby stopni swobody v . W powyższej sytuacji do obliczenia współczynnika rozszerzenia można zastosować przybliżoną metodę opisaną w [2, 3].

Podsumowanie

Przedstawiona analiza pozwala uświadomić, na ile może być dokładne obliczanie niepewności rozszerzonej przy wzorcowaniu metodą Welch-Satterthwaite'a. Rozbieżności pomiędzy wartościami współczynnika, w odniesieniu do obliczeń wykonanych metodą splotu matematycznego, mogą dochodzić nawet do kilkunastu procent. Stanowi to niejednokrotnie równowartość udziału wielu składowych niepewności. Rozbieżność powyższa wynika z założenia, że rozkładem wielkości wyjściowej jest rozkład Studenta, gdy w rzeczywistości jest on nieznanym rozkładem prawdopodobieństwa, ale możliwym do wyznaczenia przy zastosowaniu operacji splotu matematycznego.

Zastosowanie analizowanej metody zależy w głównej mierze od decyzji metrologa, czy jest skłonny zaakceptować przy opracowaniu wyniku pomiaru kilkunastoprocentowy poziom niedokładności niepewności rozszerzonej. Cenną zaletą metody Welch-Satterthwaite'a natomiast jest możliwość oszacowania niedokładności obliczonej złożonej niepewności standardowej. Oszacowanie to pozwala wnioskować z jakim poziomem „niedoszacowania” niepewności mamy do czynienia. Ta zaleta może być podstawą do zastanowienia się, jak wykorzystać informację o tym „niedoszacowaniu” w celu dokładnego, a nie przybliżonego obliczania niepewności rozszerzonej. Jedną z takich propozycji może być uwzględnianie owego „niedoszacowania” przy podawaniu niepewności rozszerzonej poprzez jej powiększenie, co w przybliżeniu zbliża tę wartość do niepewności liczonej metodą splotu matematycznego, a jednocześnie nie wymaga zastosowania tej skomplikowanej operacji matematycznej.

Bibliografia

1. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999.
2. Fotowicz P.: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR 9/2001.
3. Fotowicz P.: Method for calculating the coverage factor in calibration. OIML Bulletin, vol. XLIII, no 4 October 2002. ■

Błąd wyznaczenia niepewności opisanej zależnością (10) można zdefiniować jako

$$\delta = \frac{U_m - U}{U} \cdot 100\% \quad (12)$$

Przy założeniu poziomu ufności $p = 95\%$ i w odniesieniu do splotu rozkładów prostokątnego i Studenta przebieg tego błędu przedstawia rys. 5. Z przebiegu krzywych błędu wynika, że dla rosnącej wartości ilorazu r niepewność obliczona z zależności (10) jest zbliżona z wartością niepewności liczoną metodą splotu matematycznego, niezależnie od liczby stopni swobody v . W powyższej sytuacji do obliczenia współczynnika rozszerzenia można zastosować przybliżoną metodę opisaną w [2, 3].

Podsumowanie

Przedstawiona analiza pozwala uświadomić, na ile może być dokładne obliczanie niepewności rozszerzonej przy wzorcowaniu metodą Welch-Satterthwaite'a. Rozbieżności pomiędzy wartościami współczynnika, w odniesieniu do obliczeń wykonanych metodą splotu matematycznego, mogą dochodzić nawet do kilkunastu procent. Stanowi to niejednokrotnie równowartość udziału wielu składowych niepewności. Rozbieżność powyższa wynika z założenia, że rozkładem wielkości wyjściowej jest rozkład Studenta, gdy w rzeczywistości jest on nieznanym rozkładem prawdopodobieństwa, ale możliwym do wyznaczenia przy zastosowaniu operacji splotu matematycznego.

Zastosowanie analizowanej metody zależy w głównej mierze od decyzji metrologa, czy jest skłonny zaakceptować przy opracowaniu wyniku pomiaru kilkunastoprocentowy poziom niedokładności niepewności rozszerzonej. Cenną zaletą metody Welch-Satterthwaite'a natomiast jest możliwość oszacowania niedokładności obliczonej złożonej niepewności standardowej. Oszacowanie to pozwala wnioskować z jakim poziomem „niedoszacowania” niepewności mamy do czynienia. Ta zaleta może być podstawą do zastanowienia się, jak wykorzystać informację o tym „niedoszacowaniu” w celu dokładnego, a nie przybliżonego obliczania niepewności rozszerzonej. Jedną z takich propozycji może być uwzględnianie owego „niedoszacowania” przy podawaniu niepewności rozszerzonej poprzez jej powiększenie, co w przybliżeniu zbliża tę wartość do niepewności liczonej metodą splotu matematycznego, a jednocześnie nie wymaga zastosowania tej skomplikowanej operacji matematycznej.

Bibliografia

1. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999.
2. Fotowicz P.: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. PAR 9/2001.
3. Fotowicz P.: Method for calculating the coverage factor in calibration. OIML Bulletin, vol. XLIII, no 4 October 2002. ■

Streszczenia artykułów naukowych

Niepewność pomiaru. Ocena metody Welch-Satterthwaite'a, Paweł Fotowicz – s. 18

Przedstawiono analizę metody Welch-Satterthwaite'a stosowaną przy obliczaniu niepewności pomiaru. Oceniono błąd metody przy wyznaczaniu niepewności rozszerzonej dla warunków wzorcowania. Przedstawiono alternatywny sposób wykorzystania metody obliczeniowej. Wyniki jej odniesiono do definicyjnego wyznaczania niepewności rozszerzonej, opartego na numerycznym rozwiązaniu jej równania dla poziomu ufności przy wzorcowaniu.

The uncertainty in measurement. Valuation of the Welch-Satterthwaite method, Paweł Fotowicz – p. 18

The analysis of the Welch-Satterthwaite method for calculating the uncertainty in measurement is presented. The error of the method for expanded uncertainty evaluation in calibration is calculated. The alternative manner of utilization of the method is described. Suitable results of the expanded uncertainty evaluation are referenced to solution according with numerical calculation of the uncertainty at specified confidence level in calibration.