

Ocena niepewności wskazania przyrządu pomiarowego

Paweł Fotowicz

Przedstawiono analizę niepewności wskazania przyrządu pomiarowego, dla którego znany jest wynik wzorcowania. Do oceny niepewności zastosowano model probabilistyczny wykorzystywany do opracowania wyniku przy wzorcowaniu.

Zagadnienie oceny niepewności wskazania przyrządu pomiarowego jest jednym z podstawowych problemów stojących przed metrologiem wykonującym pomiar. Problem ten nie jest tożsamy z oceną niedokładności wskazania w klasycznym pojęciu. Na czym jednak polega ta różnica, skoro niepewność – najogólniej mówiąc – jest miarą właśnie niedokładności pomiaru. Miara ta jednak opiera się na pewnych dość ścisłych założeniach, wynikających z przesłanek probabilistycznych. Te z kolei wymagają zastosowania odpowiedniego aparatu matematycznego, związanego z rachunkiem zmiennych losowych. Podejścia takiego nie stosuje się w przypadku oceny niedokładności na podstawie np. błędu granicznego.

Ocena niepewności jest procesem złożonym, jednakże niezbędnym, gdy konieczne jest zachowanie spójności pomiarowej. Dlatego najczęściej stosuje się ją w pomiarach związanych z wzorcowaniem. Można ją jednak z powodzeniem zastosować również do oceny niedokładności każdego wyniku pomiaru.

Wykonując pomiar dowolnej wielkości mierzonej odpowiednim przyrządem pomiarowym, dokonujemy zawsze odczytu jej wartości na urządzeniu wskazującym. Jeżeli warunki pomiaru są stabilne, to ulegamy złudzeniu, że wielkość mierzona jest reprezentowana pojedynczą wartością liczbową. W rzeczywistości jednak jest to zawsze zbiór liczbowy, którego wszystkich wartości nie jesteśmy w stanie ustalić, ale też i nie musimy, gdyż do oceny takich nieokreślonych zbiorów najwygodniej użyć zmiennej losowej. Z każdą zmienną losową jest związany rozkład prawdopodobieństwa charakteryzujący się odpowiednim widmem, którego szerokość możemy oszacować. Dobrą miarą takiej szerokości widmowej jest przedział ufności wyznaczony dla poziomu ufności 95 %. Poziom ten jest chętnie stosowany do oceny niepewności przy wzorcowaniu. Można go również stosować przy wykonywaniu innych pomiarów, gdyż zapewnia wysoką porównywalność obliczeń nawet przy zastosowaniu przybliżonych metod wyznaczania niepewności rozszerzonej.

Zmienna losowa opisująca wielkość mierzoną jest sumą wielu innych zmiennych losowych, będących jej

składowymi. Składowe te należy w procesie szacowania niepewności zidentyfikować i każdą z nich analizować oddzielnie. Przy ocenie wskazania przyrządu pomiarowego można wymienić cztery takie podstawowe składowe. Pierwsza z nich jest związana z rozrzutem wskazań, druga z jego rozdzielczością, trzecia z błędem wskazania, a czwarta z niepewnością jego wyznaczenia. Każda z tych składowych stanowi oddzielną wielkość wejściową.

Rozrzut wskazania

Rozrzut wskazania traktujemy jak samodzielną wielkość wejściową. Wielkość ta jest zmienną losową o odchyleniu standardowym estymowanym zależnością (3).

Najlepszą miarą rozrzutu wskazań jest estymata połączona odchylenia standardowego. Podstawą do jej wyznaczenia jest zależność [1]

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad (1)$$

gdzie s_i^2 jest wariancją z próby i -tej serii powtórzonych niezależnych obserwacji, mającą $v_i = n_i - 1$ stopni swobody.

Gdy do oceny rozrzutu zastosujemy równoliczne serie pomiarowe, wówczas zależność (1) można w prosty sposób przekształcić do użytecznej postaci

$$s_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m s_i^2}{m}} \quad (2)$$

gdzie: s_i – odchylenie standardowe eksperymentalne i -tej serii pomiarowej o jednakowej liczebności n , m – liczba serii pomiarowych.

Liczebność serii pomiarowej nie powinna być mniejsza niż dziesięć odczytów, czyli $n \geq 10$, przeprowadzonych w warunkach powtarzalności. Serie pomiarowe powinny być wykonane w różnych punktach zakresu pomiarowego. Liczba tych serii nie powinna być mniej-

sza niż trzy, czyli $m \geq 3$. Należy zadbać, aby równomiernie rozłożyć punkty w zakresie pomiarowym. Obliczona na podstawie (2) wartość estymaty jest dobrym oszacowaniem odchylenia standardowego zmiennej losowej związanej z rozrzutem wskazań, a duża liczba odczytów pozwala przyjąć wiarygodne założenie o normalności jej rozkładu.

Jeśli chcemy uzyskać informację o niepewności rozrzutu dowolnej wskazanej wartości wielkości mierzonej przez przyrząd pomiarowy, to wystarczy wyznaczyć średnią z odczytów i przypisać jej niepewność standardową daną zależnością

$$u(\delta x_1) = \frac{s_p}{\sqrt{n_w}} \quad (3)$$

gdzie n_w to liczba odczytów wskazania. Zazwyczaj wykonuje się kilka odczytów w celu uniknięcia pomyłki i zwiększenia dokładności. Są jednak sytuacje, w których można wykonać tylko jeden odczyt, gdy np. powtórzenie odczytu tej samej wielkości nie jest możliwe. Zatem liczba odczytów może wynosić $n_w \geq 1$.

Rozdzielczość wskazania

Rozdzielczość to najmniejsza różnica wskazania, która może być zauważona w wyraźny sposób. Można przypisać jej również oddzielną zmienną losową, której zawsze towarzyszy prostokątny rozkład prawdopodobieństwa. Zakłada się bowiem, że każda wartość wielkości mierzonej w obrębie powyższej różnicy jest jednakowo prawdopodobna. Różnica ta również jest nazywana kwantem wskazania. W przypadku przyrządów cyfrowych jest to na ogół wartość odpowiadająca ostatniej cyfrze na wyświetlaczu lub wartości zmiany na ostatnim miejscu urządzenia wskazującego. W przypadku przyrządów analogowych na ogół jest to wartość odpowiadająca dziesiątej części wartości działki elementarnej.

W celu obliczenia niepewności standardowej wielkości opisanej rozkładem prostokątnym stosujemy zależność

$$u(\delta x_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

gdzie a jest szerokością połówkową przedziału zmienności, czyli połową wartości kwantu.

Błąd wskazania i niepewność jego wyznaczenia

Informację o błędzie wskazania można uzyskać ze świadectwa wzorcowania przyrządu pomiarowego. W świadectwie tym są podane wartości błędu wraz z niepewnością ich wyznaczenia dla wybranych punktów zakresu pomiarowego. Ponieważ interesuje nas wielkość wejściowa związana z błędem i niepewnością jego wyznaczenia dla dowolnej wartości wielkości mierzonej w całym zakresie pomiarowym, to musimy przyjąć pewne logiczne założenia. Dla dowolnego punktu w zakresie pomiarowym wartość błędu jest nieznana. Niemniej każdy punkt pomiarowy znajduje się pomiędzy określony-

mi punktami, dla których zostało przeprowadzone wzorcowanie. Wartości błędów dla tych punktów podane są w świadectwie. Należy zatem dokonać ich randomizacji. Randomizacja będzie polegać na założeniu, że każda nieznana wartość błędu z przedziału, którego granice wyznaczają wartości znane, może przyjmować każdą wartość o rozkładzie trapezowym, którego górną i dolną podstawę wyznaczają te granice. Wówczas niepewność standardowa związana ze zrandomizowanym błędem wyniesie

$$u(\delta x_3) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} \quad (5)$$

gdzie a i b to wartości błędów wskazania dla granic przedziału zakresu pomiarowego, w którym dokonano odczytu.

Zasadę powyższą można również uogólnić na cały zakres pomiarowy, przyjmując jako dolną podstawę rozkładu trapezowego największą wartość błędu, a jako górną najmniejszą jego wartość, odczytane ze świadectwa wzorcowania. Wówczas niepewność z powyższego tytułu będzie dotyczyć wszystkich wskazań w całym zakresie pomiarowym, a nie tylko w określonym jego przedziale.

Oprócz niepewności związanej z randomizacją błędu należy uwzględnić również niepewność wyznaczenia samego błędu wskazania. W świadectwie wzorcowania są podawane niepewności rozszerzone U wyznaczenia błędów wskazania wraz ze współczynnikami rozszerzenia k zapewniającymi poziom ufności 95 %. Na ich podstawie należy wyznaczyć niepewności standardowe błędów

$$u(\delta x_4) = \frac{U}{k} \quad (6)$$

Z każdą wartością błędu wskazania może być związana inna wartość niepewności standardowej. Ze względu na to, że wartością oczekiwaną zbioru tych niepewności jest ich wartość średnia, najlepiej przyjąć ją za miarę niepewności standardowej związanej z nieznaną wartością błędu w dowolnym punkcie pomiarowym.

Niepewność wskazania

Niepewność wskazania przyrządu pomiarowego związana jest wymienionymi wyżej składowymi, z których każdą wyznacza się oddzielnie. Jej wartość niepewności standardowej można obliczyć na podstawie zależności definiującej złożoną niepewność standardową

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 u^2(\delta x_i)} \quad (7)$$

a jej niepewność rozszerzoną z zależności

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (8)$$

gdzie współczynnik rozszerzenia k powinien zapewnić wymagany poziom ufności. Przy wyznaczaniu niepewności rozszerzonej preferowany jest poziom ufności 95 % [2].

Przykład obliczeniowy

Założmy, że musimy wyznaczyć masę substancji odważanej na wadze analitycznej. Czynność tę można wykonać tylko jednorazowo. Nie istnieje więc możliwość powtórzenia pomiaru i wykonania serii obserwacji. Można jednak wykonać wcześniej ocenę rozrzutu wskazań wagi poprzez wykonanie serii odczytów, wykonanych w warunkach powtarzalności, dla wzorców masy.

Rozrzut wskazań wagi został oszacowany na podstawie obliczenia estymaty połączonej odchylenia standardowego. Wykonano pięć serii pomiarowych po dziesięć odczytów na wadze analitycznej dla pięciu różnych wzorców masy. Wyniki zestawiono w tabeli 1 wraz z wyznaczonymi dla każdej serii odchyleniami standardowymi eksperymentalnymi. Estymatę połączoną odchylenia standardowego obliczono na podstawie zależności (2)

$$s_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 s_i^2}{5}} = 0,262 \text{ mg} \quad (9)$$

Ponieważ czynność pomiarową wykonujemy jednorazowo, to niepewność standardową przypisaną wielkości wejściowej związanej z rozrzutem wskazań obliczamy na podstawie (3) przyjmując, że $n_w = 1$

$$u(\delta x_1) = \frac{s_p}{\sqrt{n_w}} = 0,262 \text{ mg} \quad (10)$$

Rozdzielczość wskazania wagi wynosi: 0,01 mg. W związku z tym niepewność standardowa związana z tą wielkością wejściową dana jest zależnością (4)

$$u(\delta x_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,003 \text{ mg} \quad (11)$$

gdzie $a = 0,005 \text{ mg}$ jest połową kwantu wskazania.

Błąd wskazania wagi można ustalić na podstawie świadectwa wzorcowania. Świadectwo to podaje wartości błędów wskazań w poszczególnych punktach wzorowania wraz z ich niepewnościami rozszerzonymi i współczynnikami rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % (tab. 2).

Dla zakresu wskazań wagi od 1 g do 30 g na podstawie świadectwa wzorcowania można wyznaczyć niepew-

Tabela 2. Błąd wskazania wagi ze świadectwa wzorcowania

Wzorzec masy (g)	Błąd wskazania wagi (mg)	Niepewność rozszerzona (mg)	Współczynnik rozszerzenia
1	0,01	0,05	2
2	0,02	0,05	2
5	0,05	0,05	2
10	0,10	0,05	2
30	0,20	0,05	2

ność standardową wielkości wejściowej związanej ze zrandomizowanym błędem wskazania. Największa wartość błędu wystąpiła dla wzorca o masie 30 g i wynosiła: $a = 0,20 \text{ mg}$, najmniejsza natomiast dla masy wzorowej 1 g i wynosiła: $b = 0,01 \text{ mg}$. Można zatem wartości te wstawić do wzoru (5) i wyznaczyć wartość niepewności standardowej zrandomizowanego błędu wskazania wagi w powyższym zakresie wskazań

$$u(\delta x_3) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} = 0,082 \text{ mg} \quad (12)$$

Niepewność wyznaczenia powyższego błędu można oszacować na podstawie średniej niepewności standardowej dla wszystkich branych pod uwagę błędów wskazań ze świadectwa wzorcowania. Wartość ta jest jednakoowa dla każdej masy wzorca i można ją wyznaczyć z zależności (6)

$$u(\delta x_4) = \frac{U}{k} = 0,025 \text{ mg} \quad (13)$$

Złożona niepewność standardowa wskazania wagi (7) jest pierwiastkiem z sumy kwadratów niepewności standardowych poszczególnych składowych

$$u_c(y) = 0,089 \text{ mg} \quad (14)$$

Aby obliczyć niepewność rozszerzoną wskazania dla poziomu ufności 95 % należy wyznaczyć wartość współczynnika rozszerzenia. Można to uczynić, korzystając z metody przedstawionej w [3]. Jej istota polega na wyznaczeniu ilorazu udziału największej składowej o rozkładzie prostokątnym. Składowa ta „ukryta” jest w rozkładzie związanym ze zrandomizowanym błędem wskazania wagi. Jest to rozkład trapezowy, który tworzą dwa rozkłady prostokątne o różnej szerokości połówkowej. Dla większej z dwóch składowych tworzących rozkład trapezowy można wyznaczyć niepewność standardową z zależności

$$u_{B_{\max}}(\delta x_3) = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} = 0,061 \text{ mg} \quad (15)$$

Powyższa wartość jest największym udziałem o rozkładzie prostokątnym w złożonej niepewności standardowej związanej ze wskazaniem wagi. Dla niej można wyznaczyć iloraz

$$r_u = \frac{|u_{B_{\max}}(\delta x_3)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_{B_{\max}}^2(\delta x_3)}} = 0,921 \quad (16)$$

W tabeli 3 można odszukać odpowiednią wartość współczynnika rozszerzenia zapewniającego

Tabela 1. Zestawienie wyników pomiaru do obliczenia estymaty połączonej

Seria 1 (g)	Seria 2 (g)	Seria 3 (g)	Seria 4 (g)	Seria 5 (g)
1,01000	2,02002	5,05005	10,10000	30,20002
1,01002	2,02000	5,05000	10,10000	30,19999
1,00998	2,01998	5,05001	10,09998	30,20000
1,01002	2,02000	5,04999	10,10002	30,20002
1,01004	2,02002	5,04997	10,09995	30,19995
1,01000	2,02000	5,05000	10,10004	30,19999
1,00998	2,01995	5,05001	10,09998	30,20000
1,01003	2,02000	5,05000	10,10000	30,20000
1,00996	2,00005	5,04999	10,10002	30,20005
1,01000	2,01998	5,04995	10,10000	30,19997
$s_1=0,250 \text{ mg}$	$s_2=0,271 \text{ mg}$	$s_3=0,263 \text{ mg}$	$s_4=0,251 \text{ mg}$	$s_5=0,277 \text{ mg}$
$s_p = 0,262 \text{ mg}$				

Tabela 3. Wartości współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

k	r_u do wartości	k	r_u do wartości	k	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

poziom ufności 95 % dla niepewności rozszerzonej. Wartość ta to $k = 1,93$, a niepewność rozszerzona (8) związana ze wskazaniem wagi w zakresie jej wskazań od 1 g do 30 g wynosi

$$U = 0,17 \text{ mg} \quad (17)$$

Przedstawione rozważania dotyczą niepewności odnoszącej się do pełnego zakresu wskazań wagi analitycznej. Jednakże na podstawie świadectwa wzorcowania można wydzielić mniejsze podzakresy, dla których też możliwe jest bardziej szczegółowe określenie niepewności wskazania. Różnice w obliczeniach sprowadzają się jedynie do przyjęcia innych wartości przy ocenie wielkości wejściowej związanej ze zrandomizowanym błędem wskazania w poszczególnych podzakresach. Podzakresy te wyznaczają kolejne masy wzorców ze świadectwa wzorcowania. Poszczególne błędy wskazań wagi wyznaczają dolne – a i górne – b podstawy rozkładu trapezowego. Ich wartości zestawiono w tabeli 4. Pozostałe wielkości wejściowe są identyczne.

Postępując podobnie jak w opisanym przykładzie można również dla poszczególnych podzakresów wyznaczyć

Tabela 4. Zestawienie błędów w poszczególnych podzakresach wskazań wagi

Podzakres wskazań (g)	Błąd wskazania b (mg)	Błąd wskazania a (mg)	Niepewność $u(\delta x^2)$ (mg)
1 - 2	0,01	0,02	0,009
2 - 5	0,02	0,05	0,022
5 - 10	0,05	0,10	0,046
10 - 30	0,10	0,20	0,091

Tabela 5. Zestawienie niepewności rozszerzonej wskazania wagi dla poziomu ufności 95 % w poszczególnych jej podzakresach

Podzakres wskazań (g)	Niepewność rozszerzona (mg)	Współczynnik rozszerzenia
1 - 2	0,073	1,96
2 - 5	0,083	1,95
5 - 10	0,11	1,91
10 - 30	0,18	1,82

niepewność rozszerzoną wskazań dla poziomu ufności 95 %. Ich wartości wraz ze współczynnikami rozszerzenia zestawiono w tabeli 5.

Podsumowanie

Przedstawiona analiza pozwala na ocenę niepewności wskazania każdego przyrządu pomiarowego, dla którego znany jest wynik wzorcowania. Do oceny niepewności zastosowano model probabilistyczny wykorzystywany do opracowania wyniku przy wzorcowaniu. W modelu tym stosuje się zmienne losowe ciągle do opisu wielkości wejściowych. Wskazanie traktuje się jak wielkość wyjściową będącą sumą czterech wielkości wejściowych. Sumowanie wykonuje się zgodnie z zasadami sumowania zmiennych losowych niezależnych przy użyciu operacji spłotu matematycznego ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Umożliwia to jednoznaczne określenie wartości współczynnika rozszerzenia dla założonego poziomu ufności. Przyjmując powszechnie stosowany poziom ufności jak przy wzorcowaniu, czyli $p = 95 \%$, można jednoznacznie wyznaczyć wartość niepewności rozszerzonej odnoszącej się do każdego wskazania przyrządu pomiarowego.

W przedstawionym przykładzie obliczeniowym na niepewność wskazania mają przede wszystkim wpływ błędy wskazania wagi, których wartości zostały wyznaczone na drodze wzorcowania. Ponieważ błędy wskazania nie są stałe w całym zakresie pomiarowym, również składowa niepewność z nimi związana jest różna w określonych obszarach zakresu pomiarowego. Pomimo że błąd wskazania dla małych mas jest o rząd wielkości mniejszy niż dla największych, to niepewność związana ze wskazaniem mniejszych wartości masy jest tylko dwukrotnie mniejsza niż dla tych z górnego zakresu pomiarowego. Czynnikiem „stabilizującym” niepewność jest stałość pozostałych jej składowych związanych z rozrzutem, rozdzielczością i niepewnością wyznaczenia błędu wskazania, jednakowymi w całym zakresie pomiarowym. Należy również zwrócić uwagę, że ocena niepewności wskazania odniesiona do całego zakresu pomiarowego daje zbliżony wynik do oceny związanej z niepewnością wyznaczoną dla podzakresu o największej niepewności. Wiąże to się z dominującą wartością błędu wskazania dla górnej granicy zakresu pomiarowego. Przy ocenie niepewności wskazania warto wykonać obliczenia dla każdego możliwego podzakresu wyznaczonego przez użyte wzorce miar. Czynność taka umożliwi ścisłą ocenę niepewności, bez konieczności jej zbędnego zawyżania.

Bibliografia

1. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999.
2. Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument European co-operation for Accreditation EA-4/02, 1999.
3. Fotowicz P.: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR 10/2003.