Metoda precyzyjnej rekonstrukcji sygnałów okresowych z próbek integracyjnych

Andrzej Muciek*

Omówiono podstawy matematyczne i własności próbkowania integracyjnego. Wykorzystano próbki integracyjne do estymacji amplitud harmonicznych szeregu Fouriera. Opracowano i zbadano nowy algorytm rekonstrukcji sygnałów z próbek. Polega on na przeprowadzeniu pomiarów i estymacji w kolejnych seriach, w których występują różne czasy całkowania. Umożliwia to optymalizację dokładności estymacji harmonicznych.

A Method for Precise Reconstruction of Periodic Signals from Integrative Samples. Fundamentals and properties of integrative sampling are presented. The integrative samples are applied for estimation of the Fourier series harmonics. A new algorithm for a signals reconstruction is presented. It is based on carrying measurements and estimation in a sequential series, with different times of integration.

Wprowadzenie

Próbkowanie znajduje coraz większe zastosowanie w pomiarach różnych wielkości elektrycznych: wartości skutecznej napięć i prądów, mocy i energii elektrycznej czy impedancji [1, 2]. Wykorzystywane są do tego celu metody rekonstrukcji sygnałów z próbek punktowych, które wymagają stosowania układów śledząco-pamiętających dla zapewnienia odpowiednio długiego czasu przetwarzania AC. Tymczasem można uniknąć stosowania tych układów, przy zachowaniu relatywnie długiego czasu przetwarzania, jeśli zastosuje się próbkowanie integracyjne. Ponadto, dobierając odpowiednio czasy całkowania (integracji) w próbkowaniu integracyjnym można dodatkowo wykorzystać właściwości filtracyjne tego próbkowania i w ten sposób osiągnąć dalsze korzyści, np. zmniejszyć wpływ zakłóceń.

W artykule omówiono podstawy matematyczne i właściwości próbkowania integracyjnego. Zastosowano próbkowanie integracyjne do estymacji harmonicznych sygnału okresowego metodą najmniejszych kwadratów (NK). Opracowano i zbadano nowy sposób pobierania próbek integracyjnych i rekonstrukcji sygnału. Polega on na przeprowadzeniu pomiarów w kolejnych seriach, w których występują różne, odpowiednio dobrane czasy całkowania i następnie estymacji amplitud harmonicznych sekwencyjnie. Umożliwia to optymalizację dokładności estymacji harmonicznych dostosowaną do założonego celu pomiaru.

Postawienie problemu

Załóżmy, że sygnał $s(t)$, który ma być rekonstruowany, jest sygnałem okresowym o okresie $T_1 = 1/f_1$ i ograniczonym paśmie częstotliwości f_g. Przy tych założeniach badany sygnał $s(t)$ można przedstawić w formie skończonego rozwinięcia w szereg Fouriera

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} \left[a_k \cos(2\pi f_1 kt) + b_k \sin(2\pi f_1 kt) \right], \tag{1}$$

w którym $f_1 K < f_g$. Celem rekonstrukcji sygnału $s(t)$ z próbek jest estymacja składowej stałej a_0 oraz amplitud, a_k, b_k, $k = 1, 2,...,K$. Należy rozważyć różne sytuacje praktyczne, z których najważniejsze to: znana lub nieznana częstotliwość podstawowa sygnału oraz znane lub nieznane pasmo sygnału. Do estymacji parametrów można stosować dyskretną transformatę Fouriera (DFT) lub metodę najmniejszych kwadratów (NK). Metody oparte na DFT mają szereg ograniczeń: wymóg równomiernego próbkowania, czas pobierania próbek powinien być wielokrotnością okresu sygnału $s(t)$ itd. W artykule zastosowano metodę NK, która może być stosowana przy znacznie mniejszych wymaganiach, okupione jest to jednak większą złożonością obliczeń numerycznych.

Zazwyczaj w trakcie estymacji należy również wyznaczyć pasmo sygnału i numer najwyższej harmonicznej

* *Dr hab. inż., Andrzej Muciek, prof. nadzw. – Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej*

K. Liczba estymowanych elementów a_k i b_k wynosi $2K+1$. Stąd liczba pobranych próbek N powinna spełniać warunek $N > 2K + 1$. Dla uniknięcia zjawiska aliasingu częstotliwość próbkowania f_s powinna spełniać warunek Nyquista $f_s > 2\,K f_1$.

Próbkowanie integracyjne

W próbkowaniu punktowym jest mierzona wartość sygnału $s(t_n)$ w ustalonym momencie t_n, natomiast próbkowanie integracyjne polega na wyznaczeniu wartości średniej sygnału w przedziale czasu Δ, więc n-ta próbka integracyjna $s_a(t_n)$ w punkcie $t_n = nT$, gdzie $T=1/f_s$, $n = 1, 2,...,N$, jest określona wzorem

$$s_n = s_a[t_n] = s_a[nT] = \frac{1}{\Delta}\int_{t_n-\Delta/2}^{t_n+\Delta/2} s(t)dt \quad (2)$$

w którym Δ jest czasem integracji (całkowania). Próbka integracyjna, s_n, różni się na ogół, od wartości sygnału w punkcie t_n, $s_n \neq s(t_n)$. Jeśli $\Delta \ll T_1$, to próbkowanie integracyjne może być aproksymowane za pomocą próbkowania punktowego. Jeśli jednak Δ jest zbliżone do wartości okresu próbkowania T, to można się spodziewać efektu filtrowania. Zbadamy ten efekt dokładniej, a następnie wykorzystamy do doboru czasu integracji.

Charakterystykę częstotliwościową próbkowania integracyjnego wyznaczymy dla dowolnego sygnału $s(t)$, nie tylko okresowego. W tym celu zdefiniujmy pomocniczy sygnał

$$y(t) = \int^{t} s(\tau)d\tau + C \quad (3)$$

w którym C jest dowolną stałą. Zauważmy, że jeśli

$$x(t) = [y(t+\Delta/2) - y(t-\Delta/2)]/\Delta,$$

to próbka integracyjna $s_a[nT]$ sygnału $s(t)$ w punkcie $t_n = nT$ może być przedstawiona jako próbka punktowa $x(t_n)$ sygnału $x(t)$

$$s_a[nT] = x[nT] = \frac{1}{\Delta}[y(nT-\Delta/2) - y(nT+\Delta/2)] \quad (4)$$

Wykorzystując liniowość transformaty Fouriera oraz zmianę przy przesunięciu w czasie i całkowaniu, określimy związek między transformatą Fouriera $X(\omega)$, sygnału $x(t)$ a transformatą Fouriera $S(\omega)$ sygnału $s(t)$, stąd

$$X(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)S(\omega) \quad (5)$$

gdzie

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Transformata Fouriera $\hat{S}(\omega)$ ciągu próbek punktowych $s[nT]$ sygnału $s(t)$ jest równa [3]

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad (7)$$

więc na mocy (5) transformata Fouriera $\hat{S}_a(\omega)$ próbek integracyjnych $s_a[nT]$ wynosi

$$\hat{S}_a(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right), \quad (8)$$

gdzie $X(\omega)$ dane jest wzorem (5). Wzory (7) i (8) określają zależność między transformatą $\hat{S}_a(\omega)$, ciągu próbek integracyjnych, transformatą próbek punktowych $\hat{S}(\omega)$ i transformatą $S(\omega)$ rekonstruowanego sygnału. Wynika stąd, że próbkowanie integracyjne jest równoważne dolnopasmowemu filtrowaniu i występującemu, po nim próbkowaniu punktowemu. Funkcja transmitancji filtru zdefiniowana jest wzorem $\mathrm{sinc}(\omega\Delta/2)$ i zależy od relacji między czasem integracji Δ i okresem T_1 sygnału $s(t)$. Odpowiedni dobór tego czasu umożliwia skonstruowanie algorytmów wyznaczania estymatorów amplitud sygnałów harmonicznych.

Rekonstrukcja sygnału metodą NK

Podstawiając szereg Fouriera sygnału (1) do wzoru (2), po przekształceniach, otrzymuje się wyrażenie

$$s_n = a_0 + \sum_{k=1}^{K}\left[a_k \mathrm{sinc}(\pi k\theta)\cos(2\pi f_1 k t_n) + b_k \mathrm{sinc}(\pi k\theta)\sin(2\pi f_1 k t_n)\right] \; n=1, 2,...,N \quad (9)$$

w którym $\theta = \Delta/T_1$ jest względnym czasem pobierania próbek integracyjnych odniesionych do okresu sygnału T_1. Wzór (9) można również otrzymać ze wzoru (5), podstawiając $\omega = k\omega_1$, $k = 1, 2,...$, gdzie $\omega_1 = 2\pi f_1$. Zauważmy, że w wyrażeniu (9) amplitudy harmonicznych są mnożone przez współczynniki $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)$, które nie zależą od punktu próbkowania, t_n, i są znane, jeśli znana jest częstotliwość sygnału mierzonego f_1 oraz czas całkowania Δ.

Jeśli wprowadzimy *skorygowane amplitudy* poszczególnych harmonicznych

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = a_0, \\ &\alpha_k(\theta) = a_k \mathrm{sinc}(\pi k\theta),\; k = 1,2,...,K, \\ &\beta_k(\theta) = b_k \mathrm{sinc}(\pi k\theta),\; k = 1,2,...,K, \end{aligned} \quad (10)$$

to wyrażenie (9) przyjmuje prostszą postać

$$s_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k(\theta)\cos(2\pi f k t_n) + \beta_k(\theta)\sin(2\pi f k t_n)\right] \; n=1,2,...,N \quad (11)$$

odpowiednią do estymacji $\alpha_k(\theta)$ oraz $\beta_k(\theta)$, z których następnie, wykorzystując wzory (10) można estymować wartości amplitud a_k oraz b_k, $k = 1, 2,..., N$.

Estymacja amplitud harmonicznych sygnału

Przejdziemy do estymacji amplitud sygnału metodą NK. W tym celu załóżmy, że mierzony sygnał $s(t)$ jest próbkowany w N punktach $t_1, t_2,..., t_N$, $N>2K+1$, (np. równomiernie, wtedy $t_n=nT$) za pomocą próbkowania integracyjnego, a otrzymane wartości $s_1,s_2,...,s_N$ są obciążone błędami, odpowiednio $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_N$. Uwzględniając te błędy w (11) otrzymujemy tzw. równania fundamentalne

$$s_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k(\theta)\cos(2\pi f_1 k t_n) + \beta_k(\theta)\sin(2\pi f_1 k t_n)\right] + \varepsilon_n \quad n = 1,2,...,N. \tag{12}$$

O próbkach $s_1,...,s_N$ (lub co jest równoważne, błędach ε_n) założymy, że są losowo niezależne o jednakowej dokładności, $\mathrm{Var}[s_n] = \mathrm{Var}[\varepsilon_n] = \sigma^2$ i nie są obciążone błędami systematycznymi – wartości oczekiwane $E[\varepsilon_n] = 0$, $n = 1, 2,..., N$. Przy tych założeniach estymatory najmniejszych kwadratów minimalizują wyrażenie

$$Q = \sum_{n=1}^{N}\left[s_n - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k(\theta)\cos(2\pi f_1 k t_n) + \beta_k(\theta)\sin(2\pi f_1 k t_n)\right]\right]^2 \tag{13}$$

Wprowadzimy obecnie oznaczenia macierzowe:

$\boldsymbol{S}^T = [s_1,s_2,...,s_N]^T$ – wektor obserwowanych w pomiarach próbek integracyjnych,

$\mathbf{E}^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon N]^T$ – wektor błędów,

$\boldsymbol{A}^T = [\alpha_0,\alpha_1(\theta),...,\alpha_K(\theta),\beta_1(\theta),...,\beta_K(\theta)]^T$ – wektor skorygowanych amplitud,

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_1 t_1 & \dots & \cos\omega_1 K t_1 & \sin\omega_1 t_1 & \dots & \sin\omega_1 K t_1 \\ 1 & \cos\omega_1 t_2 & \dots & \cos\omega_1 K t_2 & \sin\omega_1 t_2 & \dots & \sin\omega_1 K t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\omega_1 t_N & \dots & \cos\omega_1 K t_N & \sin\omega_1 t_N & \dots & \sin\omega_1 K t_N \end{bmatrix}$$

– macierz eksperymentu,

$\omega_1=2\pi f_1$ pulsacja podstawowa sygnału $s(t)$, indeks ^{T} oznacza transpozycję.

Równania fundamentalne (12) oraz formę kwadratową (13) można teraz zapisać

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} \tag{14}$$

$$Q = (\boldsymbol{S}-\boldsymbol{XA})^T(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{XA}) \tag{15}$$

Ogólnie mogą wystąpić dwie podstawowe sytuacje praktyczne:

a) znana jest częstotliwość f_1 mierzonego sygnału, np. na podstawie wstępnych pomiarów,

b) nie jest znana częstotliwość f_1 – trzeba estymować jej wartość na podstawie próbek.

Częstotliwość sygnału okresowego można zwykle łatwo zmierzyć z dużą dokładnością, więc w dalszej części ograniczymy się do przypadku *a*). Przy założeniu, że macierz $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ jest nieosobliwa, estymatory skorygowanych amplitud są określone wzorem [4]

$$\hat{A} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \boldsymbol{S} \tag{16}$$

Znajomość estymatorów $\hat{\alpha}_k(\theta)$ oraz $\hat{\beta}_k(\theta)$, $k = 1, 2,..., K$, skorygowanych amplitud umożliwia wyznaczenie, ze wzorów (10), amplitud a_k oraz b_k, k = 1, 2,..., K szeregu Fouriera (1) sygnału $s(t)$. Jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy iloczyn $k\theta = k\,\Delta/T_1$ nie jest liczbą naturalną; funkcja $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)$ zeruje się w tych punktach. Również należy unikać przypadku, gdy wartość funkcji $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)$ jest relatywnie mała, gdyż amplituda określonej harmonicznej wyznaczona będzie z dużym błędem. Aby tego uniknąć należy odpowiednio dobrać czas całkowania Δ.

Dobór czasu integracji – metoda sekwencyjna

Najprostszym sposobem uniknięcia przypadku, gdy $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)=0$ lub $\mathrm{sinc}(\pi k\theta) \approx 0$ jest przyjęcie, warunku, że $k\theta < 1$ dla każdej harmonicznej, k = 1, 2,..., K. Oznacza to, że wszystkie wartości funkcji sinc mieszczą się w głównym jej listku. Stąd otrzymujemy ograniczenie

$$\Delta < T_1/K.$$

Warunek ten jest szczególnie niekorzystny dla sygnałów o dużych zniekształceniach (duże K), gdyż prowadzi do znacznego zmniejszenia czasu integracji Δ. Zastosowanie takiego podejścia ogranicza się do sygnałów małej częstotliwości i o małych zniekształceniach.

Można nieco usprawnić to podejście, dobierając czas integracji Δ tak, aby punkty $\pi k\Delta/T_1$, k = 1, 2,..., N przeplatały się z zerami funkcji sinc, a jednocześnie układały się możliwie „daleko" od tych zer. Takie podejście wymaga szczegółowej analizy błędów i doboru wartości integracji do każdego mierzonego sygnału. Żeby uzyskać możliwie optymalny efekt należałoby wstępnie wyznaczyć nie tylko numer maksymalnej harmonicznej, ale również numery tych harmonicznych mniejszych od K, które są równe zeru, np. parzyste harmoniczne często się zerują.

Dla rozwiązania problemu proponujemy sekwencyjną estymację harmonicznych, która umożliwia wydłużenie czasu integracji i zapewnia mały błąd pomiaru. Metoda ta polega na estymacji harmonicznych sekwencyjnie grupami, dobierając czas całkowania dla każdej grupy oddzielnie. Najpierw estymowana jest składowa stała, następnie składowe nieparzyste, a w końcu parzyste.

Estymacja składowej stałej. Wybieramy czas integracji $\Delta = T_1$, tj. równy okresowi mierzonego sygnału. Wtedy $\theta = 1$, a wartość funkcji $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)= 0$ dla dowolnego k. Jeśli pominiemy błąd pomiaru, to pobierane próbki będą równe składowej stałej sygnału a_0 i możemy je bezpośrednio wykorzystać do jej estymacji

$$\hat{a}_0 = s_0 \tag{17}$$

Tak więc do wyznaczenia składowej stałej a_0 wystarcza jedna próbka integracyjna, $N_0 = 1$, o czasie integracji równym T_1, lub wielokrotności T_1. Ponadto, dla zapewnienia największej dokładności pomiaru, punkt próbkowania należy dobrać tak, aby całkowanie rozpoczynało się i w konsekwencji kończyło w momencie przejścia sygnału przez zero.

Estymacja składowych nieparzystych. Zmniejszamy czas całkowania Δ dwukrotnie, wtedy $\Delta = T_1/2$, co oznacza, że $\theta = 0{,}5$. Funkcja $\mathrm{sinc}(\pi k\theta) = \mathrm{sinc}(\pi k/2)$ przyjmuje wartości zerowe dla parzystych harmonicznych, $k = 2,4,\ldots$ Pobieramy N_1 próbek integracyjnych s_n i korygujemy je, odejmując otrzymaną w zerowym kroku ocenę składowej stałej

$$s_n{}^c = s_n - \hat{a}_0, \quad n = 1,\ldots,N_1 \tag{18}$$

Wykorzystując fakt, że skorygowane amplitudy parzystych harmonicznych, dla $\Delta = T_1/2$, są równe zeru, równania fundamentalne (12) po przeniesieniu a_0 na lewą stronę, przyjmują postać

$$s_n^c = \sum_{k=1}^{K_1}\left[\alpha_{2k+1}(0.5)\cos(2\pi f_1(2k-1)t_n) + \beta_{2k+1}(0.5)\sin(2\pi f_1(2k-1)t_n)\right] + \varepsilon_n,\ n = 1,\ldots, N_1, \tag{19}$$

w której występują tylko nieparzyste harmoniczne. Podstawiając we wzorze (16) wektor skorygowanych wyników pomiarów $\boldsymbol{S}^c$ zamiast $\boldsymbol{S}$, usuwając w wektorze parametrów A amplitudy parzystych harmonicznych i usuwając z macierzy eksperymentu X odpowiadające im kolumny, otrzymamy estymatory nieparzystych skorygowanych harmonicznych

$$\hat{\mathbf{A}}^1 = [\hat{\alpha}_1(0.5), \hat{\beta}_1(0.5), \hat{\alpha}_3(0.5), \hat{\beta}_3(0.5), \ldots, \hat{\alpha}_{2K^1-1}(0.5), \hat{\beta}_{2K_1-1}(0.5)]^{\mathrm{T}},$$

z których i z równań (10) wyznaczamy odpowiednie estymatory amplitud.

Estymacja składowych parzystych. Możliwe są tu różne warianty. Przedstawimy taki, w którym względne czasy całkowania θ, w kolejnych krokach są elementami ciągu $\{1/3, 1/5, 1/7, 1/11, \ldots\}$ (w mianownikach występują kolejne liczby pierwsze).

Pobieramy N_2 próbek integracyjnych dla pierwszej wartości $\theta = 1/3$ ($\Delta = T_1/3$) i otrzymamy ciąg $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N_2$. Zauważmy, że jeśli podstawimy je do równań fundamentalnych (17), to znana jest już ocena składowej stałej a_0, a ponadto, występujące tu skorygowane amplitudy $\alpha_{2k-1}(1/3)$ oraz $\beta_{2k-1}(1/3)$ nieparzystych harmonicznych można oszacować z wyznaczonych wcześniej estymatorów nieparzystych harmonicznych otrzymanych dla $\theta = 1/2$. Na mocy (15) otrzymamy

$$\hat{a}_{2k-1}(1/3) = \hat{a}_{2k-1}(1/2)\frac{3}{2}\frac{\sin[\pi(2k-1)/3]}{\sin[\pi(2k-1)/2]},$$

$$\hat{\beta}_{2k-1}(1/3) = \hat{\beta}_{2k-1}(1/2)\frac{3}{2}\frac{\sin[\pi(2k-1)/3]}{\sin[\pi(2k-1)/2]},$$

$$k = 1, 2, \ldots, 2K_1 - 1 \tag{20}$$

Podstawiamy te oceny do równań fundamentalnych (17), przenosimy znane składniki na lewą stronę równań, które stanowią teraz skorygowane próbki

$$s_n^c = s_n - \hat{\alpha}_0 - \sum_{k=1}^{K_2}\left[\hat{\alpha}_{2k-1}(1/3)\cos(2\pi f_1(2k-1)t_n) + \hat{\beta}_{2k-1}(1/3)\sin(2\pi f_1(2k-1)t_n)\right], \tag{21}$$

Równania fundamentalne przyjmują postać

$$s_n^c = \sum_{k=1}^{K_2}\left[\alpha_{2k}(1/3)\cos(2\pi f_1 2kt_n) + \beta_{2k}(1/3)\sin(2\pi f_1 2kt_n)\right],\ n = 1, 2, \ldots, N_2 \tag{22}$$

w której nieznane są skorygowane amplitudy $\alpha_{2k}(1/3)$ oraz $\beta_{2k}(1/3)$. Estymatory $\hat{\alpha}_{2k}(1/3)$ oraz $\hat{\beta}_{2k}(1/3)$ tych parametrów są określone wzorem (21), w którym wektor próbek $\boldsymbol{S}$ zastąpimy wektorem skorygowanych próbek $\boldsymbol{S}^c$ określonych równaniem (21). Wyznaczymy, w ten sposób estymatory parzystych harmonicznych z wyjątkiem tych o numerach będących wielokrotnością 6, dla których funkcja $\mathrm{sinc}(\pi k\theta)$ się zeruje.

Powtarzając powyższą procedurę dla względnego czasu całkowania $\theta = 1/5$, wyznaczymy amplitudy harmonicznych o numerach $6k$, $k = 1, 2, \ldots$, z wyjątkiem tych o numerach będących wielokrotnością $k = 2*3*5=30$. To jest wystarczające dla typowych sytuacji. Jeśli jednak sygnał jest bardzo zniekształcony i występują wyższe harmoniczne, to należy powtórzyć procedurę dla $\theta = 1/7$. Wtedy wyznaczymy wszystkie amplitudy do $k = 210$.

Podsumowanie

Przedstawiona metoda rekonstrukcji sygnałów pozwala na optymalne wykorzystanie właściwości próbek integracyjnych. Nadaje się do implementacji w systemach wykorzystujących przetworniki integracyjne, takie jak np. multimetr HP3458A, który pozwala na realizację próbkowania integracyjnego z dokładnością na poziomie 10 ppm. Metoda ta nadaje się do precyzyjnych pomiarów podstawowych wielkości elektrycznych, wartości skutecznej, mocy oraz energii elektrycznej sygnałów małej częstotliwości.

Bibliografia

[1] Pogliano U.: *Precision measurement of AC voltage below 20 Hz at IEN,* IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-46, No.2, Apr. 1997, p. 369-372.

[2] Muciek A.: *A method for precise RMS measurements of periodic signals at low frequencies,* Conference on Electromagnetic Measurements, CPEM'98 digest.

[3] Baher H.: Analog and Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, NY1990.

[4] Brandt S.: Analiza danych, PWN, Warszawa 1998.