

Wpływ kwantowania na dokładność estymacji momentów sygnałów o rozkładach normalnych

Elżbieta Kawecka
Jadwiga Lal-Jadziak *

Przedstawiono twierdzenia Widrowa i warunki odtwarzalności dla kwantowania w zastosowaniu do momentów sygnału. Dokonano analizy obciążenia estymatora momentu rzędu 2. (wartości średniokwadratowej) oraz momentu łącznego rzędu 2. (funkcji korelacji wzajemnej) spowodowanych niespełnieniem tych warunków.

Szczególne uwagę poświęcono sygnałom o rozkładach normalnych. Dokonano analizy obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej. Wyprowadzono i przedyskutowano zależność określającą obciążenie funkcji korelacji wzajemnej.

The influence of quantizing on the accuracy of Gaussian signals moments estimation.

The quantizing theorems of Widrow and quantizing reconstruction conditions for the estimation of the signal moments are presented. An analysis of the bias of the second-order moment (mean square value) estimator and the joint second-order moment (crosscorrelation function) estimator, caused by non-satisfied quantizing reconstruction conditions, is carried out.

Special attention is devoted to the normal pdf signals. An analysis of the bias of the mean square value estimator is carried out. Analytic expression for crosscorrelation function bias is derived and discussed.

Wprowadzenie

Podstawowym przetwarzaniem, jakiemu poddawany jest sygnał we współczesnych systemach pomiarowych, jest dyskretyzacja w dziedzinie czasu (próbki) oraz w dziedzinie wartości (kwantowanie). Na podstawie cyfrowej reprezentacji sygnału otrzymywane są oceny (estymatory) wartości prawdziwej wielkości mierzonej.

Celem niniejszej pracy jest analiza wpływu kwantowania na dokładność wyznaczania momentu rzędu 2. (wartości średniokwadratowej) oraz momentu łącznego rzędu 2. (funkcji korelacji wzajemnej) sygnałów o rozkładach normalnych.

Przeprowadzone w pracy analizy są częścią szerszych badań nad wpływem kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na niepewność typu A i typu B towarzyszącą wyznaczaniu momentów sygnałów o różnych rozkładach prawdopodobieństwa.

Wyznaczone w publikacji obciążenia estymatorów mogą być usuwane za pomocą poprawki do wyniku lub traktowane jako niepewność typu B.

Podstawy teoretyczne

Kwantowanie jest przetwarzaniem sygnałów, których wartości należą do zbioru nieskończonego, na sygnały o wartościach ze zbioru dyskretnego. Jest ono operacją nieliniową, co utrudnia analizę sygnałów skwantowanych i systemów zawierających kwantyzatory.

Za twórcę teorii kwantowania sygnałów jest uważany Widrow. Teoria Widrowa obowiązuje dla kwantowania równomiernego i sygnału kwantowanego będącego zmienną losową ciągłą o znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Kwantowanie dokonywane jest w kwantyzatorze o nieograniczonym zakresie.

Zainteresowanie przetwarzaniem a-c oraz zagadnieniem warunków odtwarzalności dla kwantowania artykułowane na łamach prestiżowych czasopism z zakresu metrologii skłoniło Widrowa do nowoczesnego sformułowania twierdzeń i ustosunkowania się do niektórych poglądów [1].

Przedstawienie teorii Widrowa wymaga wprowadzenia pojęcia funkcji charakterystycznej. Funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ jest przekształceniem Fouriera funk-

* Mgr inż. Elżbieta Kawecka – Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki, dr hab. inż. Jadwiga Lal-Jadziak, prof. UZ – Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej

cji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ do dziedziny v ze zmianą znaku v . Dla sygnału x poddanego kwantowaniu jest ona równa [1, 2, 3]

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jvx} dx = E[e^{jvx}] \quad (1)$$

Łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x oraz y ma postać [1, 2, 3]

$$\Phi_{xy}(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{j(v_1x + v_2y)} dx dy = E[e^{j(v_1x + v_2y)}] \quad (2)$$

Moment rzędu m sygnału x oraz moment łączny rzędu $m + n$ sygnałów x i y mogą być wyznaczone przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej jako [2, 4]

$$E[x^m] = j^{-m} \left. \frac{d^m \Phi_x(v)}{dv^m} \right|_{v=0} \quad (3)$$

$$E[x^m y^n] = j^{-(m+n)} \left. \frac{\partial^{m+n} \Phi_{xy}(v_1, v_2)}{\partial^m v_1 \partial^n v_2} \right|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \quad (4)$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$.

Twierdzeniami teorii kwantowania Widrowa dotyczącymi odtwarzalności momentów są dwa twierdzenia [1]:

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, czyli gdy

$$\Phi_x(v) = 0 \text{ dla } |v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \quad (5)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego z krokiem q sygnału x_q .

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja charakterystyczna sygnałów x_1, \dots, x_N poddanych kwantowaniu ma ograniczoną dziedzinę w N -wymiarach, czyli gdy

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1, \dots, x_N}(v_1, \dots, v_N) &= 0 \\ \text{dla } |v_k| &> \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \\ \text{dla } k &\in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnałów x_1, \dots, x_N mogą być wyznaczone z momentów skwantowanych z krokiem q sygnałów x_{q1}, \dots, x_{qN} .

Można zauważyć, że warunki (5) i (6) są spełnione, gdy funkcje charakterystyczne sygnałów poddanych kwantowaniu mają ograniczoną dziedzinę lub gdy $q \rightarrow 0$, czyli kwantowanie zachodzi z nieskończenie dużą rozdzielczością.

Zgodnie z teorią kwantowania w warunkach spełnienia założeń twierdzeń 1 i 2 słuszne są zależności [2]

$$E[x_q] = E[x] \quad (7)$$

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} \quad (8)$$

$$E[x_q^4] = E[x^4] + \frac{q^2}{2} E[x^2] + \frac{7}{240} q^4 \quad (9)$$

$$E[x_q y_q] = E[x y] \quad (x \neq y) \quad (10)$$

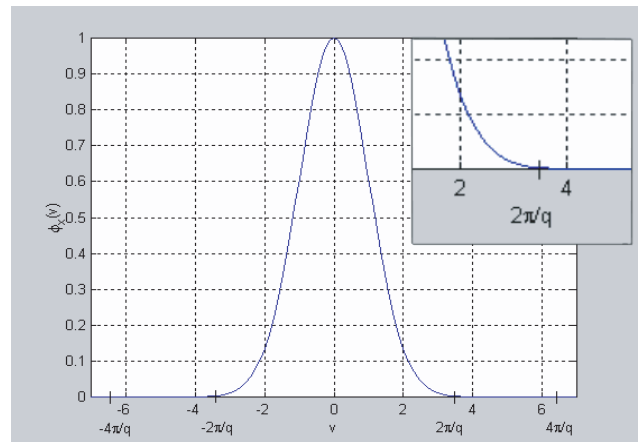
Założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej będące warunkiem dostatecznym¹ odtwarzalności dla kwantowania nie jest spełniane przez sygnały rzeczywiste i dlatego wyznaczaniu momentów towarzyszą dodatkowe składowe nieujęte w równaniach (7-10).

Analiza momentów sygnałów o rozkładach normalnych

Funkcja charakterystyczna sygnału losowego o rozkładzie normalnym i zerowej wartości oczekiwanej jest postaci [3]

$$\Phi_x(v) = \exp\left(-\frac{1}{2} v^2 \sigma^2\right) \quad (11)$$

gdzie σ jest wartością dyspersji sygnału i ma przebieg przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ sygnału o rozkładzie normalnym ($\sigma = 1$)

Zgodnie z założeniem teorii kwantowania Widrowa w pomiarze cyfrowym krok kwantowania q należy dobrać tak, aby funkcja $\Phi_x(v)$ dla argumentów $|v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon$ przyjmowała wartość 0, co jest niemożliwe

¹ B. Sripad i D. Snyder [4] sformułowali warunki konieczne odtwarzalności, w praktyce trudne do spełnienia [1]

do spełnienia dla $q > 0$. Wobec tego estymacji towarzyszy obciążenie.

Względne obciążenie estymatora $E[x_q^2]$ momentu $E[X^2]$ rzędu 2. (wartości średniokwadratowej) sygnału o rozkładzie normalnym i zerowej wartości oczekiwanej wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności można wyrazić jako [5, 6]

$$\delta(\sigma/q) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\pi \sigma i} \right)^2 \right] \exp \left[-2 \left(\frac{\pi \sigma i}{q} \right)^2 \right] \quad (12)$$

Natomiast wynikające z niezastosowania poprawki Shepparda jest postaci

$$\delta_{sh}(\sigma/q) = \frac{q^2}{12} / \sigma^2 \quad (13)$$

W tab. 1 zawarto wartości błędów obliczonych wg (12), natomiast na rys. 2 przebiegi błędów (12) oraz (13) [6, 7].

Jak wynika z tabeli, błąd kwantowania jest ujemny i przy $\sigma/q > 1$ przyjmuje wartość bezwzględną mniejszą od $1,1 \cdot 10^{-8}$.

Łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x i y o rozkładach normalnych i zerowych wartościach oczekiwanych jest postaci [3]

$$\Phi_{xy}(v_1, v_2) = \exp \left[-0,5 (v_1^2 \sigma_1^2 + 2v_1 v_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + v_2^2 \sigma_2^2) \right] \quad (14)$$

gdzie σ_1, σ_2 są dyspersjami natomiast $|\rho_{12}| < 1$ jest współczynnikiem korelacji tych sygnałów.

Na rys. 3 przedstawiono przykładowy przebieg funkcji (14).

Moment łączny rzędu 2. (funkcja korelacji wzajemnej) skwantowanych sygnałów normalnych x_q oraz y_q jest postaci [5]

$$E[x_q y_q] = E[xy] + \frac{q_1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right) \quad (15)$$

Wyrażenie na $E[x_q y_q]$ różni się od $E[xy]$ o wartość b stanowiącą obciążenie estymatora

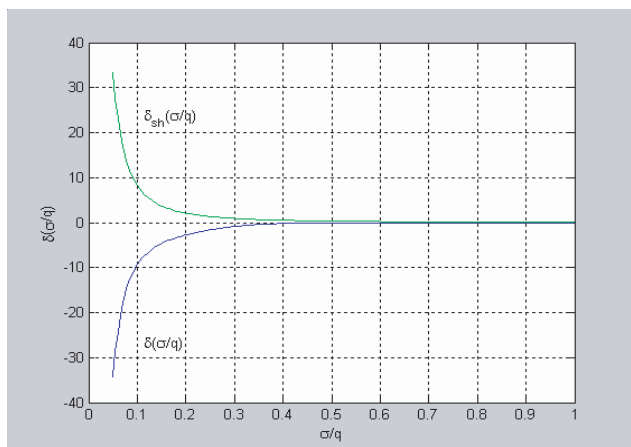
$$b = \frac{q_1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2) = (0,0)} - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right) \quad (16)$$

Jak wynika ze wzoru (16) spełnienie przez łączną funkcję charakterystyczną sygnałów x i y oraz przez jej pochodne warunków

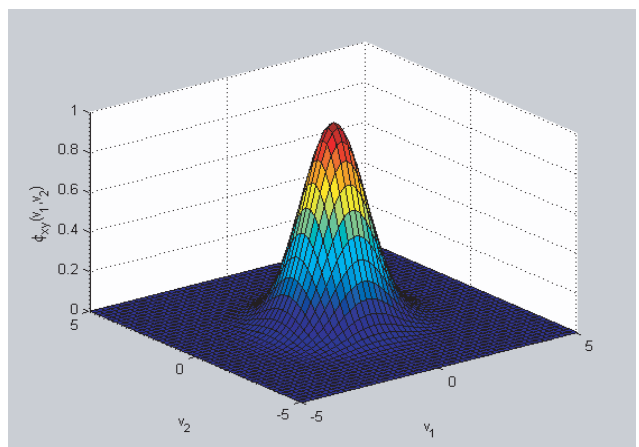
$$\Phi_{xy} \left(\frac{2\pi}{q_1} i, \frac{2\pi}{q_2} l \right) = 0 \quad (17)$$

Tabela 1. Względne obciążenie (12) estymatora wartości średniokwadratowej sygnału o rozkładzie normalnym wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności

σ/q	0,1	1/3	0,5	1	1,5	2	3
$\delta(\sigma/q)$ ($E[x] = 0$)	-9,4	-0,55	$-3,2 \cdot 10^{-2}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$	$-2,1 \cdot 10^{-19}$	$-2,1 \cdot 10^{-34}$	$-2, \cdot 10^{-77}$



Rys. 2. Względne obciążenie momentu rzędu 2 (wartości średniokwadratowej) sygnału normalnego wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności ($\delta(\sigma/q)$) oraz niezastosowania poprawki Shepparda ($\delta_{sh}(\sigma/q)$) [6, 7]



Rys. 3. Łączna funkcja charakterystyczna $\Phi_{xy}(v_1, v_2)$ sygnałów x i y o rozkładach normalnych ($\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho_{12} = 0,1$)

$$\left. \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi/q_2)}{\partial v_1} \right|_{(v_1, v_2) = (0,0)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi/q_1, v_2)}{\partial v_2} \right|_{(v_1, v_2) = (0,0)} = 0 \tag{18}$$

dla $\forall i \neq 0$ oraz $\forall l \neq 0$ prowadzi do braku obciążenia.

Spełnienie sformułowanego przez Widrowa warunku odtwarzalności dla kwantowania [1]

$$\Phi_{xy}(v_1, v_2) = 0 \text{ dla } |v_1| > \frac{2\pi}{q_1} - \varepsilon \text{ oraz } |v_2| > \frac{2\pi}{q_2} - \varepsilon \tag{19}$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, prowadzi do zapewnienia (17) i (18).

Poddamy analizie obciążenie (16) momentu łącznego $E[x_q y_q]$ sygnałów o funkcji charakterystycznej postaci (14). Wyrażenia wchodzące w skład zależności (16) można przedstawić w postaci

$$\Phi_{xy}\left(\frac{2\pi j}{q_1}, \frac{2\pi l}{q_2}\right) = \exp\left[-\left(\frac{2\pi^2}{q_1^2} j^2 \sigma_1^2 + \frac{4\pi^2}{q_1 q_2} j l \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{2\pi^2}{q_2^2} l^2 \sigma_2^2\right)\right] \tag{20}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi/q_2)}{\partial v_1} \right|_{(v_1, v_2) = (0,0)} = \frac{2\pi j}{q_1} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \exp\left(-\frac{2\pi^2 j^2}{q_1^2} \sigma_1^2\right) \tag{21a}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi/q_1, v_2)}{\partial v_2} \right|_{(v_1, v_2) = (0,0)} = \frac{2\pi l}{q_2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \exp\left(-\frac{2\pi^2 l^2}{q_2^2} \sigma_2^2\right) \tag{21b}$$

Względne obciążenie estymatora jest równe

$$\delta(\sigma_1/q_1, \sigma_2/q_2) = \frac{b}{\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \tag{22}$$

przy czym b dane jest wzorem (16). Uwzględniając wyrażenia (20) oraz (21a, b), możemy zależność (22) przedstawić jako

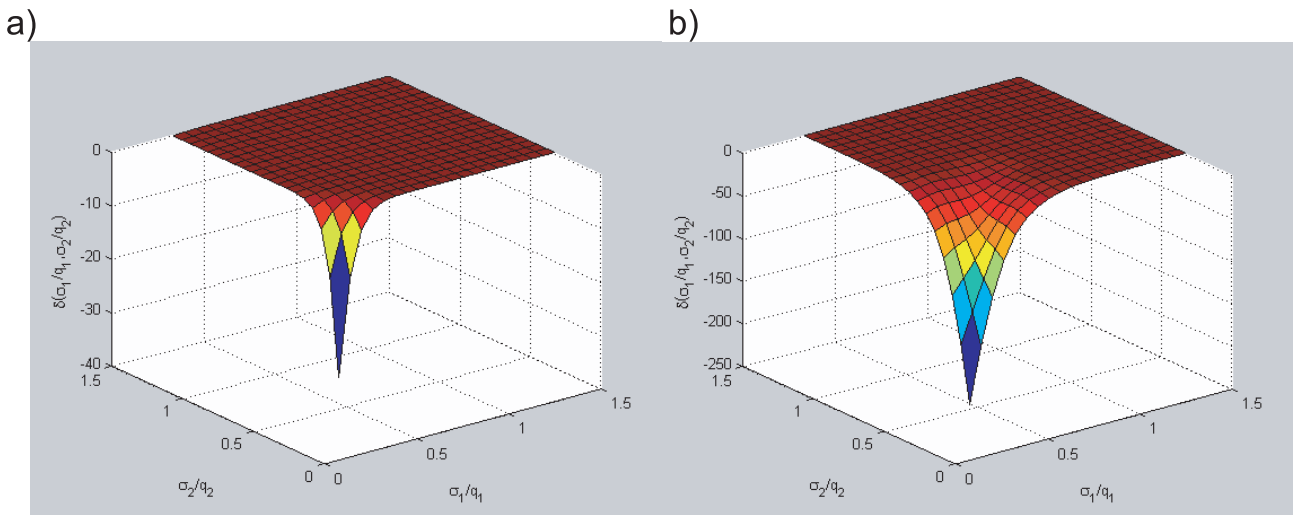
$$\delta(\sigma_1/q_1, \sigma_2/q_2) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \exp\left(-\frac{2\pi^2 j^2}{q_1^2} \sigma_1^2\right) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \exp\left(-\frac{2\pi^2 l^2}{q_2^2} \sigma_2^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+l}}{j l} \exp\left[-\left(\frac{2\pi^2}{q_1^2} j^2 \sigma_1^2 + \frac{4\pi^2}{q_1 q_2} j l \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{2\pi^2}{q_2^2} l^2 \sigma_2^2\right)\right] \tag{23}$$

Jak wynika z tabeli, błąd kwantowania jest ujemny i przy $\sigma_1/q_1 = \sigma_2/q_2 > 1$ dla współczynnika $|\rho_{12}|$ równego 0,1, 0,5 oraz 0,9 przyjmuje wartość bezwzględną odpowiednio mniejszą od $5,4 \cdot 10^{-9}$, $2,8 \cdot 10^{-6}$ oraz $1,1 \cdot 10^1$.

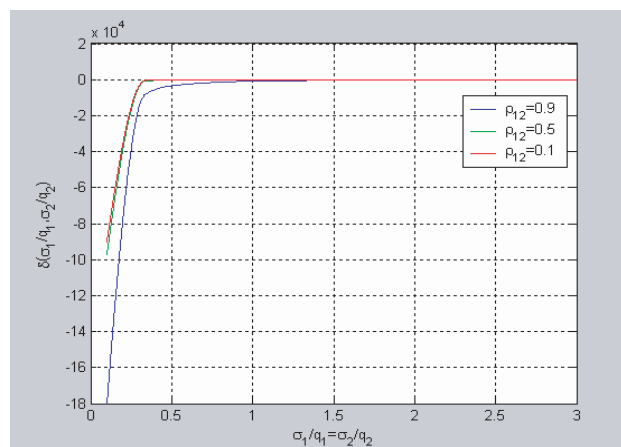
W tabeli 2 przedstawiono wyniki obliczeń a na rys. 4 oraz 5 graficzne reprezentacje zależności (23).

Tabela 2. Względne obciążenie (23) estymatora momentu łącznego sygnałów o rozkładach normalnych wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności

$\sigma_1/q_1 = \sigma_2/q_2$	0,1	1/3	0,5	1	1,5	2	3
$ \rho_{12} = 0,9$							
$\delta(\sigma_1/q_1, \sigma_2/q_2)$	$-1,3 \cdot 10^5$	$-3,8 \cdot 10^3$	$-8,6 \cdot 10^2$	$-1,1 \cdot 10^1$	$-3,5 \cdot 10^{-2}$	$-2,0 \cdot 10^{-5}$	$-2,4 \cdot 10^{-14}$
$ \rho_{12} = 0,5$							
$\delta(\sigma_1/q_1, \sigma_2/q_2)$	$-9,7 \cdot 10^4$	$-1,0 \cdot 10^3$	$-3,0 \cdot 10^1$	$-2,8 \cdot 10^{-6}$	$-2,4 \cdot 10^{-17}$	$-1,3 \cdot 10^{-32}$	$-8,0 \cdot 10^{-76}$
$ \rho_{12} = 0,1$							
$\delta(\sigma_1/q_1, \sigma_2/q_2)$	$-9,0 \cdot 10^4$	$-5,2 \cdot 10^2$	$-2,5 \cdot 10^0$	$-5,4 \cdot 10^{-9}$	$-1,0 \cdot 10^{-19}$	$-1,0 \cdot 10^{-34}$	$-1,4 \cdot 10^{-77}$



Rys. 4. Względne obciążenie momentu łącznego (funkcji korelacji wzajemnej) sygnałów o rozkładach normalnych w funkcji σ_1/q_1 oraz σ_2/q_2 dla współczynnika korelacji: a) $\rho_{12} = 0,1$, b) $\rho_{12} = 0,9$



Rys. 5. Względne obciążenie momentu łącznego (funkcji korelacji wzajemnej) sygnałów o rozkładach normalnych w funkcji $\sigma_1/q_1 = \sigma_2/q_2$ dla współczynnika korelacji $\rho_{12} = 0,1; 0,5; 0,9$

Podsumowanie

Nie istnieją sygnały spełniające dokładnie założenia teorii kwantowania Widrowa.

Funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie normalnym spełnia założenia teorii kwantowania Widrowa (warunek ograniczonej dziedziny) z dobrym przybliżeniem i dlatego obciążenie estymatora momentu rzędu 2. (wartości średniokwadratowej sygnału) osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania ($q > \sigma$). Stanowi to wyjaśnienie znanego zjawiska polegającego na otrzymywaniu dokładnych ocen parametrów sygnału gaussowskiego już przy niewielkich liczbach poziomów kwantowania.

Łączna funkcja charakterystyczna sygnałów o rozkładach normalnych również z dobrym przybliżeniem spełnia założenia teorii kwantowania Widrowa i dlatego obciążenie estymatora momentu łącznego rzędu 2. (funkcji korelacji wzajemnej sygnałów) osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania. Obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów o rozkładach normalnych jest ujemne, a jego wartość bezwzględna jest tym mniejsza im mniejsza jest wartość współczynnika korelacji tych sygnałów.

Bibliografia

- [1] Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: *Statistical theory of quantization*, IEEE Trans. Instrum. Meas., 1996, vol. 45, no. 2, s. 353-361.
- [2] Korn G. A.: *Random Process Simulation and Measurements*, McGraw-Hill Book Comp., New York 1966.
- [3] Pacut A.: *Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice*, WNT, Warszawa 1985.
- [4] Sripad B.; Snyder D.: *A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white*, IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process., vol. ASSP-25, 1977, no. 5, pp. 442-448.
- [5] Lal-Jadziak J.: *Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych*, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Pol. Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001.
- [6] Lal-Jadziak J.: *Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej*, PAK, 2002, nr 7-8, s. 61-64.
- [7] Kawecka E.: *Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych*, V Ogólnopolskie Warsztaty Doktoranckie - OWD 2003. Istebna - Zaolzie, 2003.