

Wpływ nieliniowości elementów układu pomiarowego na błąd pomiaru impedancji

Wiesław Miczulski*

W artykule przedstawiono wyniki badań ilustrujące wpływ nieliniowości elementów układu porównania napięć na błąd pomiaru modułu impedancji metodą klasyczną i metodą PKPF. Występowanie wyższych harmonicznnych w napięciu zasilania układu pomiarowego powoduje powstawanie mniejszych błędów pomiaru $|Z_X|$ przy stosowaniu metody klasycznej niż metody PKPF. Stosowanie metody PKPF przy występowaniu impedancji nieliniowych w układzie pomiarowym pozwala osiągnąć mniejsze błędy pomiaru $|Z_X|$.

Wstęp

Algorytmy wyznaczania składowych impedancji w znanych układach pomiarowych opierają się na założeniu, że wszystkie elementy układu pomiarowego są elementami liniowymi. Oznacza to, że układ pomiarowy jest zasilany napięciem lub prądem sinusoidalnym o określonej pulsacji ω , a impedancje występujące w układzie pomiarowym są dwójnikami klasy SLS (skupione, liniowe, stacjonarne). Zmierzona impedancja jest wówczas wyrażana za pomocą jednej liczby zespolonej. Przyjęcie takiego założenia powoduje, że pomiar w warunkach rzeczywistych składowych impedancji jest obarczony błędem.

W układzie pomiarowym do pomiaru impedancji można wyróżnić dwie grupy elementów nieliniowych: źródło napięcia lub prądu zasilającego układ pomiarowy oraz impedancje.

Występowanie elementów nieliniowych w generatorach napięć lub prądów sinusoidalnych powoduje, że układy pomiarowe są zasilane sygnałem okresowym niesinusoidalnym (wieloharmonicznym). Impedancję mierzoną należy wówczas przedstawiać za pomocą funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej $Z(\omega)$, nazywanej impedancją widmową. W takim wypadku określona harmoniczna napięcia w układzie pomiarowym zależy tylko od tej samej harmonicznej prądu (i odwrotnie) oraz od impedancji dla tej harmonicznej. W układzie pomiarowym nie zachodzi proces przenikania harmonicznnych.

Impedancje, jako elementy nieliniowe klasy SNS (skupione, nieliniowe, stacjonarne), mogą powodować generowanie harmonicznnych, których nie ma w napięciu lub prądzie zasilającym układ pomiarowy. Mogą również powodować mieszanie tych harmonicznnych. Pojęcie impedancji takiego dwójnika jest o wiele szersze niż dwójników klasy SLS (skupione, liniowe, stacjonarne).

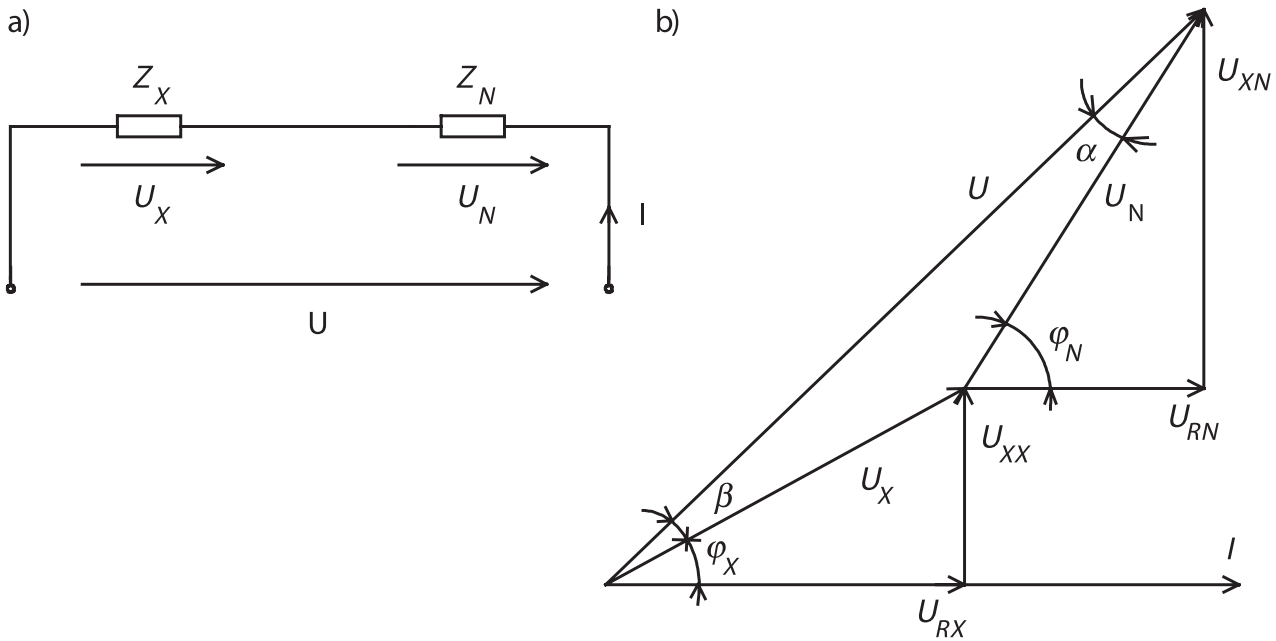
Przykładem elementu nieliniowego może być czujnik indukcyjny z rdzeniem ferromagnetycznym. Charakterystyczne dla elementów nieliniowych jest to, że ich parametry zależą od napięcia lub prądu. Jeżeli element nieliniowy, zależny od wartości chwilowych napięcia lub prądu, osiągnie okresowy stan ustalony pod wpływem okresowego wymuszenia, to jego parametry zmieniają się również okresowo w czasie. Takie zachowanie się elementu nieliniowego w określonym stanie pracy można zamodelować elementem liniowym o okresowo zmiennych parametrach, czyli klasy SLN (skupiony, liniowy, niestacjonarny). Pomiar takiej impedancji, którego koncepcję przedstawiono w pracy [1], sprowadza się do wyznaczania elementów macierzy impedancyjnego operatora cykloparametrycznego lub operatora impedancji widmowej.

W wielu zastosowaniach układów do pomiaru impedancji dąży się do przedstawienia wyniku pomiaru za pomocą jednej liczby zespolonej, niezależnie od świadomości występowania w układzie pomiarowym elementów nieliniowych. Celem pracy było porównanie, na przykładzie układu porównania napięć, w jakim stopniu nieliniowości elementów układu pomiarowego wpływają na błąd pomiaru modułu impedancji metodą klasyczną (na podstawie pomiaru wybranych napięć) i metodą przetwarzania kątów przesunięć fazowych (PKPF) [2]. Badania symulacyjne przeprowadzono przy założeniu, że pozostałe błędy występujące w układzie pomiarowym są pomijalne.

Układ porównania napięć

Na rys. 1 przedstawiono schemat układu porównania napięć przeznaczony do pomiaru składowych impedancji Z_X . W klasycznej metodzie pomiaru impedancji mierząc wartości skuteczne napięć U_X i U_N oraz znając

* Dr hab. inż. Wiesław Miczulski – Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej



Rys. 1. a) Układ porównania napięć, b) wykres wskazowy

wartość modułu impedancji wzorcowej Z_N , moduł impedancji Z_X oblicza się z zależności:

$$|Z_X| = |Z_N| \frac{|U_X|}{|U_N|} \quad (1)$$

W metodzie PKPF mierząc kąty przesunięć fazowych α i β oraz znając wartość modułu impedancji wzorcowej Z_N , moduł impedancji Z_X oblicza się z zależności:

$$|Z_X| = |Z_N| \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad (2)$$

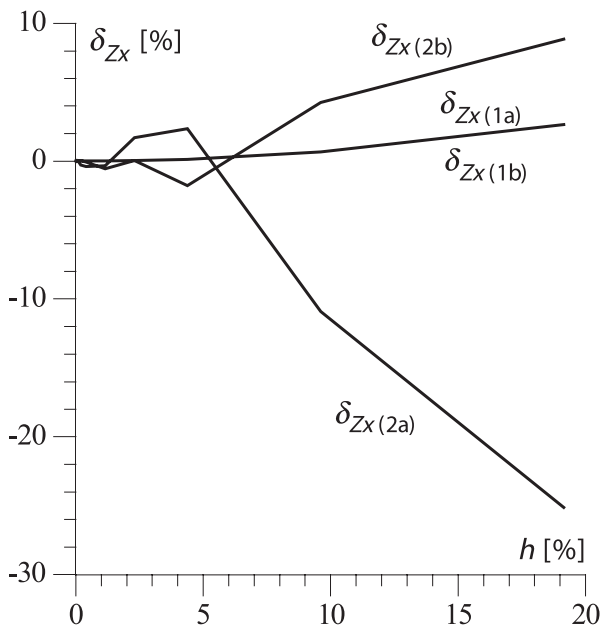
Wpływ wyższych harmonicznych

Badania symulacyjne określające wpływ wyższych harmonicznych, występujących w napięciu zasilającym układ porównania napięć, na błąd pomiaru modułu impedancji przeprowadzono w programie MathCad przy następujących założeniach:

- impedancję wzorcową stanowi rezystor wzorcowy klasy SLS ($Z_N = R_N$)
- impedancją mierzoną jest cewka indukcyjna połączona szeregowo z rezystorem R_X określającym rezystancję uzwojenia cewki, stanowiąca element liniowy klasy SLS
- układ pomiarowy jest zasilany napięciem niesinusoidalnym z generatorów, których amplitudy i fazy początkowe przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Amplitudy i fazy początkowe harmonicznych w napięciach generatorów

Nr harmonicznej	amplituda	nr generatora									
	faza pocz.	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
1	U_{m1} (V)	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
	φ_1 (°)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	U_{m2} (V)	35,06	15,58	11,67	4,87	3,214	0,974	0,351	0,156	0,097	0,045
	φ_2 (°)	-10	160	155	-6	247	5	160	155	-6	5
3	U_{m3} (V)	48,7	25,32	5,84	4,87	1,227	0,721	0,487	0,253	0,097	0,033
	φ_3 (°)	0	250	-80	25	190	-28	250	-80	25	-28
4	U_{m4} (V)	0,097	0,078	0,049	0,039	0,195	0,008	0,097	0,078	0,039	0,008
	φ_4 (°)	-11	210	265	-3	160	-5	210	265	-3	-5
5	U_{m5} (V)	0,088	0,039	0,031	0,039	0,144	0,006	0,088	0,039	0,039	0,006
	φ_5 (°)	0	180	170	5	203	25	180	170	5	25
6	U_{m6} (V)	0,049	0,01	0,019	0,019	0,132	0,006	0,049	0,01	0,019	0,006
	φ_6 (°)	-3	190	-80	-10	243	11	190	-80	-10	11
h (%)		19	9,6	4,4	2,3	1,15	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02



Rys. 2. Charakterystyka $\delta_{Z_x} = f(h)$ dla modułu impedancji Z_x wyznaczonego wg zależności (1) - $\delta_{Z_x(1a)}$, $\delta_{Z_x(1b)}$ i (2) - $\delta_{Z_x(2a)}$, $\delta_{Z_x(2b)}$

Wartości chwilowe napięć występujących w układzie porównania napięć są określone następującymi zależnościami:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n U_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k) \tag{3}$$

$$u_X(t) = \sum_{k=1}^n U_{mk} |A_k| \sin(k\omega t + \varphi_k + \lambda_k) \tag{4}$$

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^n U_{mk} |B_k| \sin(k\omega t + \varphi_k + \eta_k) \tag{5}$$

gdzie:

U_{mk} - amplituda k -tej harmonicznego napięcia U wg tab. 1,

φ_k - faza początkowa k -tej harmonicznego napięcia U wg tab. 1,

$$A_k = \frac{Z_{Xk}}{Z_{Nk} + Z_{Xk}} = |A_k| e^{j\lambda_k}, \tag{6}$$

$$B_k = \frac{Z_{Nk}}{Z_{Nk} + Z_{Xk}} = |B_k| e^{j\eta_k}, \tag{7}$$

$|Z_{Xk}|$, $|Z_{Nk}|$ - moduły impedancji Z_X i Z_N dla k -tej harmonicznego,

λ_k , η_k - argumenty współczynników A i B dla k -tej harmonicznego.

Obliczenia numeryczne wykonano w programie Math-Cad 2001 przy założeniu 5000 próbek na okres, częstotliwości napięcia zasilającego układ pomiarowy $f = 50$ Hz oraz $R_X = 1 \Omega$, $L_X = 0,33$ H i $R_N = 99 \Omega$. Dla poszczególnych generatorów (G1 - G10) kolejno zasilających układ pomiarowy wyznaczono wartości chwilowe napięć $u(t)$, $u_X(t)$ i $u_N(t)$. Otrzymane napięcia są przebiegami niesinusoidalnymi. Obliczone wartości chwilowe napięć $u_X(t)$ i $u_N(t)$ umożliwiły wyznaczenie ich wartości skutecznych, a w dalszej kolejności z zależności (1) obliczono moduł impedancji mierzonej Z_X . Na podstawie wyznaczonych wartości chwilowych napięć obliczono także wartości przesunięć czasowych (w momencie przejścia przez zero) pomiędzy napięciami $u_N(t)$ i $u(t)$ oraz $u_X(t)$ i $u(t)$. Wyznaczone wartości przesunięć czasowych przypisano odpowiednio kątom przesunięć fazowych α i β , które z kolei były podstawą do wyznaczenia modułu impedancji mierzonej Z_X wg zależności (2). Na podstawie obliczonych wartości modułów impedancji Z_X wyznaczono błąd pomiaru modułu impedancji mierzonej δ_{Z_x} , wyrażony w procentach, określający różnicę obliczonego modułu impedancji w stosunku do wartości $|Z_X| = 103,677 \Omega$, wyznaczonego na podstawie znanych wartości R_X i L_X . Badania symulacyjne powtórzono dla napięć generowanych przez generatory G1 - G10 (tab. 1) w taki sposób, że wszystkie

Tabela 2. Wyniki badań symulacyjnych

h (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (1)	$\delta_{Z_x(1a)}$ (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (2)	$\delta_{Z_x(2a)}$ (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (1)	$\delta_{Z_x(1b)}$ (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (2)	$\delta_{Z_x(2b)}$ (%)
	amplitudy i fazy początkowe poszczególnych harmonicznego wg tab. 1				amplitudy poszczególnych harmonicznego wg tab. 1, fazy początkowe równe zero			
0,02	103,676	-0,0009	103,663	-0,014	103,676	-0,0009	103,675	-0,003
0,05	103,676	-0,0009	103,718	0,04	103,676	-0,0009	103,674	-0,003
0,1	103,676	-0,0009	103,632	-0,044	103,677	-0,0008	103,698	0,02
0,2	103,677	-0,0007	103,394	-0,27	103,677	-0,0006	103,715	0,036
0,4	103,677	0,0001	103,28	-0,38	103,678	0,00015	103,606	-0,07
1,15	103,685	0,007	103,322	-0,34	103,685	0,007	103,089	-0,6
2,3	103,714	0,035	105,437	1,7	103,714	0,035	103,721	0,042
4,4	103,799	0,12	106,118	2,4	103,801	0,12	101,833	-1,8
9,6	104,372	0,67	92,349	-11	104,374	0,67	108,102	4,3
19	106,417	2,7	77,614	-25	106,42	2,7	112,834	8,8

fazy początkowe poszczególnych harmonicznych były równe zeru. W tab. 2 oraz na rys. 2 przedstawiono końcowe wyniki badań symulacyjnych obrazujące zależność błędu pomiaru modułu impedancji, dla metody klasycznej i metody PKPF, od wartości współczynnika zniekształceń nieliniowych h , obliczonego dla napięć generowanych przez generatory G1 – G10.

Wpływ nieliniowości impedancji

Badania symulacyjne określające wpływ występowania w układzie pomiarowym impedancji klasy SNS na błąd pomiaru modułu impedancji przeprowadzono w programie MathCad przy następujących założeniach:

- układ pomiarowy jest zasilany napięciem sinusoidalnym
- impedancję wzorcową stanowi rezystor wzorcowy klasy SLS ($Z_N = R_N$)
- impedancję mierzoną stanowi cewka indukcyjna z rdzeniem ferromagnetycznym o charakterystyce magnesowania $\Psi = f(i)$ cewki nieliniowej bez histerezy, opisana modelem matematycznym [3]:

$$\Psi(t) = \frac{2}{\pi} \arctg [i(t)] \quad (8)$$

i połączona szeregowo z rezystorem R_X określającym rezystancję uzwojenia cewki.

Przyjmując powyższe założenia, relacja pomiędzy napięciami wyróżnionymi w układzie pomiarowym (rys. 1) określona jest następująco:

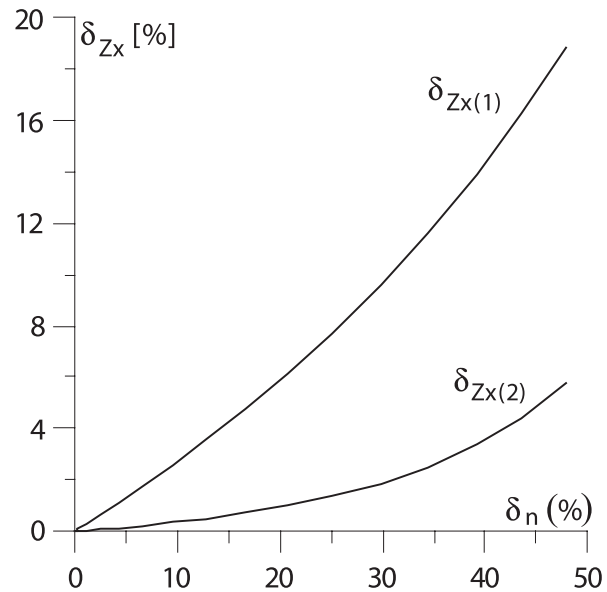
$$u(t) = u_X(t) + u_N(t) = R_X i(t) + u_L(t) + R_N i(t) = (R_N + R_X) i(t) + \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (9)$$

Uwzględniając w zależności (9) wzór (8), otrzymano następujące nieliniowe równanie różniczkowe:

$$\frac{di(t)}{dt} - \frac{\pi}{2} [1 + i^2(t)] [U_m \sin \omega t - (R_X + R_N) i(t)] = 0 \quad (10)$$

Tabela 3. Wyniki badań symulacyjnych

U_m (V)	δ_n (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (11)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (1)	$\delta_{Z_X(1)}$ (%)	$ Z_X $ (Ω) obl. wg (2)	$\delta_{Z_X(2)}$ (%)
1	0	200,00	200,00	0	200,00	0
5	0,017	199,97	199,98	0,004	199,97	0
10	0,067	199,87	199,90	0,02	199,87	0
20	0,27	199,47	199,60	0,07	199,48	0,007
40	1,1	197,87	198,40	0,27	197,93	0,03
60	2,4	195,22	196,41	0,61	195,35	0,07
80	4,2	191,52	193,61	1,1	191,76	0,13
100	6,6	186,79	190,03	1,7	187,19	0,21
120	9,5	181,08	185,68	2,5	181,67	0,33
140	13	174,42	180,59	3,5	175,26	0,48
160	17	166,91	174,79	4,7	168,06	0,69
180	21	158,65	168,35	6,1	160,19	0,97
200	25	149,79	161,37	7,7	151,81	1,4
220	30	140,53	153,98	9,6	143,13	1,8
240	34	131,10	146,35	12	134,39	2,5
260	39	121,76	138,68	14	125,85	3,4
280	43	112,77	131,17	16	117,77	4,4
300	48	104,34	123,99	19	110,34	5,8



Rys. 3. Charakterystyka $\delta_{Z_X} = f(\delta_n)$ dla modułu impedancji Z_X wyznaczonego wg zależności (1) – $\delta_{Z_X(1)}$ i (2) – $\delta_{Z_X(2)}$

Rozwiązując równanie (10) metodą Rungego-Kutty, wyznaczono wartości chwilowe prądu $i(t)$. Obliczenia numeryczne wykonano w programie MathCad 2001 przy takich samych wartościach częstotliwości napięcia zasilającego układ pomiarowy, rezystancjach R_X i R_N oraz liczbie próbek na okres, jak w badaniach symulacyjnych przedstawionych w rozdziale poprzednim.

Zmieniając wartości amplitudy napięcia zasilającego układ pomiarowy, wyznaczono wartości chwilowe prądu $i(t)$, a w dalszej kolejności wartości chwilowe napięć $u(t)$, $u_X(t)$ i $u_N(t)$. Otrzymane napięcia i prąd są przebiegami niesinusoidalnymi. Wyznaczając wartości skuteczne napięć i kąty przesunięć fazowych – analogicznie jak w poprzednim rozdziale – obliczono wartości modułów impedancji z zależności (1) i (2). Na podstawie tak obliczonych wartości modułów impedancji Z_X wyznaczono błąd pomiaru modułu impedancji mierzonej δ_{Z_X} , wyrażony w procentach, określający różnicę obliczonego modułu impedancji w stosunku do wartości modułu impedancji Z_X wyznaczonego z zależności:

$$|Z_X| = \sqrt{R_X^2 + [2\pi f L_s(i)]^2} \quad (11)$$

gdzie:

$L_s(i) = \frac{\Psi(i)}{i}$ – tzw. indukcyjność sieciowa (tangens kąta sieciowej przechodzącej przez określony punkt charakterystyki magnesowania i początek układu współrzędnych).

W tab. 3 oraz na rys. 3 przedstawiono końcowe wyniki badań symulacyjnych obrazujące zależność błędu pomiaru modułu impedancji, dla metody klasycznej i metody PKPF, od nieliniowości charakterystyki magnesowania cewki. Nieliniowość charakterystyki magnesowania cewki (δ_n) wyznaczono jako jej rozbieżność, wyrażoną w procentach, w stosunku do charakterystyki liniowej określonej równaniem linii prostej będącej styczną do krzywej $\Psi(i)$ przy $i = 0$.

Podsumowanie

Otrzymane wyniki badań symulacyjnych potwierdzają, że pomiar składowych impedancji badanego dwójnika jest obarczony błędem wynikającym z przyjętego założenia, że wszystkie elementy występujące w układzie pomiarowym są elementami liniowymi, a impedancja jest wyrażana za pomocą jednej liczby zespolonej.

Wyższe harmoniczne występujące w napięciu zasilania układu porównania napięć powodują powstawanie błędu pomiaru $|Z_X|$ o mniejszych wartościach przy klasycznym sposobie jego wyznaczania, niż przy stosowaniu metody PKPF. Przy stosowaniu metody PKPF błędy pomiaru $|Z_X|$ są trudne do określenia w sposób jednoznaczny. Wartość i znak błędu pomiaru impedancji zależy w różny sposób od faz początkowych poszczególnych harmonicznych, a także od ich amplitud oraz

wartości modułu i argumentu impedancji występujących w układzie pomiarowym [4]. Najskuteczniejszym sposobem zmniejszenia wpływu wyższych harmonicznych na błąd pomiaru modułu impedancji Z_X , zwłaszcza przy zastosowaniu metody PKPF, wydaje się być stosowanie rozwiązań sprzętowych, głównie filtrów środkowoprzepustowych.

Wykonane badania symulacyjne wskazują, że gdy w układzie pomiarowym występują dwójniki klasy SNS, wówczas mniejsze wartości błędu pomiaru modułu impedancji otrzymuje się przy stosowaniu metody PKPF. Przy nieliniowości około 1 % błąd wyznaczania modułu mierzonej impedancji metodą PKPF jest około 10 razy mniejszy niż przy stosowaniu metody klasycznej, a przy nieliniowości 50 % błąd ten jest mniejszy ponad 3 razy. Efekt ten jest najprawdopodobniej spowodowany mieszaniami generowanych harmonicznych w napięciach i prądzie układu pomiarowego. Formułowanie ostatecznego wniosku, że metoda PKPF jest bardziej przydatna niż metoda klasyczna do pomiaru impedancji dwójników klasy SNS wymaga przeprowadzenia badań w szerszym zakresie, m.in. przeprowadzenia analizy widmowej sygnałów występujących w układzie pomiarowym.

Bibliografia

- [1] Kłosiński R.: *Koncepcja pomiaru impedancji niestacjonarnych, cz. 2.: Algorytm identyfikacji operatora cykloparametrycznego, interpretacja wyników pomiaru impedancji*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej (Elektrotechnika; 25), 2003, nr 207, s. 135-144.
- [2] Miczulski W.: *Pomiary impedancji metodą przetwarzania kątów przesunięć fazowych*. Monografia nr 98, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2000.
- [3] Gajda J., Szyper M.: *Modelowanie i badania symulacyjne systemów pomiarowych*. Wydawca Firma Jartek s.c., Kraków 1998.
- [4] Miczulski W.: *Pomiar impedancji metodą komparacji równoprądowej z przetwarzaniem kątów przesunięć fazowych przy napięciach niesinusoidalnych*. Materiały konferencyjne VII Symposium „Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych” Krynica 97, Wydawnictwo Zakładu Metrologii AGH, Kraków 1997, s. 278-285.