

# Właściwości i nieznane zależności mostka rezystancyjnego 4-T jako czwórnika

Zygmunt L. Warsza\*

W literaturze o mostkach pomiarowych i ich zastosowaniach, nie wszystkie ich właściwości interesujące przy dzisiejszych zastosowaniach są opisane. Konieczne stało się używanie rozszerzonej teorii mostków, obejmującej problemy ich stosowania w pomiarach wieloparametrowych (nD), w których mierzy się bezpośrednio kilka parametrów na dostępnych zaciskach układu, a badanymi mesurandami są bądź zmiany parametrów gałęzi mostka, bądź wielkości wywołujące te zmiany.

Układy zawierające strukturę o postaci mostka mają utrwaloną pozycję we współczesnej technice pomiarowej. Ich rola jest obecnie znacznie szersza niż poprzednio. Obok zastosowań w przyrządach autonomicznych, pasywne i aktywne mostki występują też:

- w schematach zastępczych mierzonych obiektów przestrzennie ciągłych lub dyskretnych, w tym rozbudowanych układów elektrycznych o wnętrzu dostępnym pośrednio tylko z kilku końcówek, podlegających testowaniu, monitoringowi i diagnostyce
- w schematach zastępczych cztero- i wielokońcówkowych pojedynczych czujników i ich zestawów, w tym półprzewodnikowych i scalonych
- w członach wejściowych układów kondycjonowania sygnałów dla różnych czujników impedancyjnych, stosowanych w autonomicznych przyrządach i przetwornikach pomiarowych oraz w kartach pomiarowych systemów komputerowych. Zazwyczaj są one bezpośrednio scalone z przetwornikami analogowo-cyfrowymi
- w innych samodzielnych modułach pomiarowych.

W większości zastosowań, zwłaszcza w dwu pierwszych rodzajach, wykonujący pomiary i nawet konstruktor aparatury, nie mają wpływu na strukturę wewnętrzną układu, który jest dostępny tylko z zacisków i nierozłączalny.

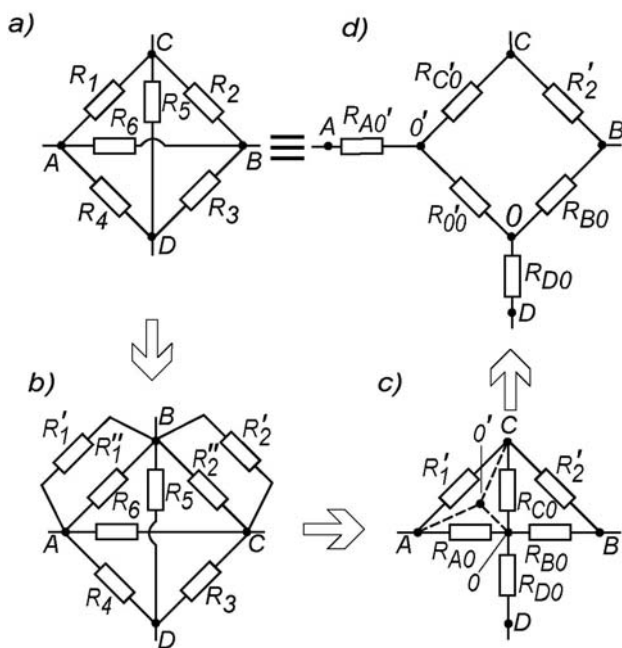
Próby macierzowego opisu mostka jako czwórnika podjęto przed laty [1]. Dotyczyła ona jednak tylko stanów bliskich równowagi i stosowano łańcuchowy układ równań o dwu elementach macierzy nieoznaczonych przy równowadze mostka. Dotąd nie podaje się w literaturze teorii mostków jako czwórników typu X w stopniu wystarczającym do opisu pomiarów dwuparametrowych (2D), których szczególnym przypadkiem są pomiary jednoparametrowe. Stąd też wynika potrzeba poniższego opracowania.

## Mostek rezystancyjny jako układ 4-T

Układem 4-T (*four Terminal*) nazywa się układ o czterech zaciskach, w którym trzy prądy dopływające mogą być dowolne, zaś czwarty wynika z prądowego prawa Kirchhoffa. Poniżej rozważa się tylko odwracalny liniowy lub linearyzowany układ 4-T. Jego podstawowy schemat zastępczy składa się z sześciu gałęzi połączonych w **czworobok zupełny**, podany na rys. 1a. Węzły tego układu znajdują się w czterech końcówkach, a więc jest to czteroramienny **mostek z przekątnymi**, można nazwać też – mostkiem pełnym. Wartości rezystancji układu wynikają z admitancyjnej postaci równań opisujących zależności pomiędzy prądami i potencjałami zacisków.

Układ bezźródłowy o wielu końcówkach i nieznannej strukturze wewnętrznej (czarna skrzynka), zawiera nieusuwalny mostek, gdy dla co najmniej dwu par niezwarłych pomiędzy sobą zacisków, po dołączeniu źródła zasilającego do jednej pary, napięcie drugiej pary może zmieniać znak na przeciwny dla pewnego zbioru wartości parametrów wewnętrznych. Dowolnie rozbudowane układy pasywne i odwracalne o czterech wyodrębnionych końcówkach dają się przekształcić do układów z rys. 1 lub ich przypadków szczególnych. Możliwości transfiguracji układu 4-T o strukturze czworoboku zupełnego z rys 1a, autor opracował na potrzeby teorii układów hallotronowych, zawartej w monografii [5]. Układ czworoboku zupełnego można przekształcić w gwiazdę czteroramienną tylko wtedy, gdy spełnia on warunek równości trzech iloczynów rezystancji ramion przeciwległych, tj.  $R_1R_3 = R_2R_4 = R_5R_6$ . Taki układ  $R''_1, R''_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  wyodrębniono z układu 1b) i po transfiguracji otrzymano układ 1c), a następnie z niego, po przekształceniu trójkąt-gwiazda – układ 1d). Istnieją aż cztery różne układy o strukturze typu d) w postaci mostka z rezystancjami szeregowymi w dwu sąsiednich jego wierzchołkach, tj.: A i C, C i B, B i D oraz A i D. Są one równoważne i sobie i układowi czworoboku 1a) oraz innym, otrzymywanym w wyniku transfiguracji, w tym układowi 1c). Równowaga wszystkich mostków

\* doc. dr inż. Zygmunt L. Warsza  
– Polskie Towarzystwo Metrologiczne



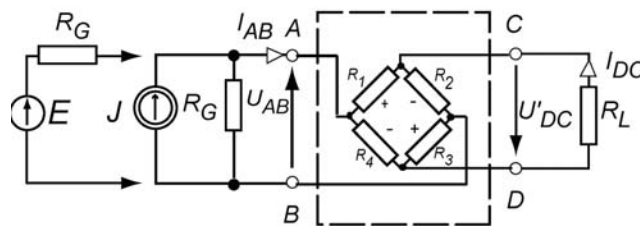
**Rys. 1.** Przykłady układów 4-T w pełni sobie równoważnych: a) bez węzłów wewnętrznych – mostek pełny (z przekątnymi); b) wyodrębnienie wieloboku  $R'_1, R'_2, R'_3, R'_4, R'_5, R'_6$  do transformacji w czteroramienną gwiazdę  $R_{A0'}, R_{B0'}, R_{C0'}, R_{D0'}$ ; c) z jednym węzłem wewnętrznym 0; d) o dwu węzłach wewnętrznych 0, 0'

z rys. 1 zachodzi równocześnie. Te same zależności pomiędzy napięciami i prądami zacisków realizuje więc szereg układów 4-T o różnych strukturach. Układ 4-T pasywny i odwracalny może więc mieć różną strukturę wewnętrzną o sześciu gałęziach: z dwoma, jednym lub bez węzłów w środku. **Szczególne jego przypadki** o czterech tylko gałęziach – to **mostek bez przekątnych (4R)** oraz gwiazda czteroramienna. Mostek ten nie ma odpowiedników o 4 dodatnich rezystancjach, czyli jest jednym z układów podstawowych (jak liczba pierwsza w algebrze).

Układ 4-T można zasilac z jednego lub kilku źródeł i różnie odbierać sygnały wyjściowe z jego zacisków. Z pomiarów na zaciskach parametrów powiązanych prawami Kirchoffa, można jednoznacznie określić immitancje czworoboku zupełnego. Jeśli gałęzie tego układu są na przykład rezystancjami różnie zależnymi od wielkości wpływających, to z wartości tych rezystancji teoretycznie można wyznaczyć nawet sześć takich wielkości, gdy układ równań je opisujących ma rozwiązania jednoznaczne lub dające się wybrać jako realizowalne fizycznie. Znane metody pośredniego lub bezpośredniego pomiaru immitancji łączących węzły wieloboku zupełnego, w tym stosowane w diagnostyce impedancyjnej, nie zapewniają wystarczającej dokładności, gdy zmiany parametrów układu są niewielkie i występują równocześnie w kilku gałęziach. Trzeba stosować wówczas inne sposoby.

### Mostek rezystancyjny jako czwórnik

Klasyyczny mostek niezrównoważony jest jednym ze szczególnych przypadków układu 4-T. Współpracuje on z resztą układu jako czwórnik zasilany z jednej strony.



**Rys. 2.** Mostek czteroramienny jako czwórnik wraz ze źródłem zasilającym i obciążeniem dołączonymi do jego przekątnych

Rys. 2 przedstawia czteroramienny mostek rezystancyjny wraz ze schematami zastępczymi obwodów wewnętrznych dołączanych do jego przekątnych. Sam mostek jest czwornikiem typu **X** o zmiennych elementach, jedynie inaczej tu narysowanym.

Każdy czwórnik liniowy lub liniaryzowany opisuje się układem dwu równań na sześć różnych sposobów. Przy oznaczeniach prądów i napięć, takich jak na rys. 2 równania czwórnik rezystancyjny mają następującą postać algebraiczną:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= r_{11}I_{AB} + r_{12}I_{DC} \\ U_{DC} &= r_{21}I_{AB} + r_{22}I_{DC} \end{aligned} \quad (1a, b)$$

Zmiennymi niezależnymi są prądy  $I_{AB}$  oraz  $I_{CD} = -I_{DC}$  wpływające do zacisku A strony pierwotnej oraz zacisku D strony wtórnej czwórnik. Zmiennymi zależnymi są napięcia  $U_{AB}$  i  $U_{DC}$  równocześnie dodatnie na tych zaciskach. Elementy  $r_{11}$  oraz  $r_{22}$  to rezystancje widziane odpowiednio z zacisków AB lub CD przy rozwarciu przeciwnej strony czwórnik, czyli tzw. **rezystancje rozwarciowe: wejściowa  $R_{AB}^\infty$  i wyjściowa  $R_{CD}^\infty$** . Natomiast elementy  $r_{12} = r_{21}$  to **transmitancje prądowo-napięciowe**, określane w obu kierunkach przy braku obciążenia (gdy  $I_{DC} = 0$  lub  $I_{AB} = 0$ ). Dla czwórnik pasywnego i odwracalnego są one jednakowe, tj.  $r_{12} = r_{21}$ . Wyznamy te parametry dla mostka rezystancyjnego w wartościach bezwzględnych oraz względnych, odniesionych do stanu równowagi.

Transmitancja prądowo-napięciowa mostka wynosi:

$$r_{21} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\sum R_i} \equiv t'_0 \cdot f'(\varepsilon_i) \quad (2)$$

Przyjmujemy następujące oznaczenia:  $R_i \equiv R_{i0} + \Delta R_i \equiv R_{i0}(1 + \varepsilon_i)$  – bieżące wartości rezystancji ramion mostka ( $R_i \geq 0$ );  $R_{i0}$  – wartość początkowa rezystancji przy równowadze mostka;  $R_{20} \equiv mR_{10}$ ,  $R_{40} \equiv nR_{10}$ ,  $R_{30} = mnR_{10}$  – wartości rezystancji początkowych odniesione do  $R_{10} \varepsilon_i$ ;  $\Delta R_i \equiv R_{i0} \varepsilon_i$  – ich przyrosty: względny i bezwzględny ( $\varepsilon_i \geq -1$ );  $\sum R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$  – suma rezystancji głównego oczka A B C D mostka oraz

<sup>1)</sup> Indeksami górnymi  $\infty$  lub 0 oznacza się parametry na zaciskach danej strony przy drugiej rozwartej lub zwartej. Dodatkowym znakiem 0 w indeksie dolnym – parametry w stanie równowagi mostka.

$\Sigma R_{10}$  – jej wartość w równowadze;

$$t_0 \equiv \frac{R_{10} R_{30}}{\Sigma R_{10}} = R_{10} \frac{mn}{(1+m)(1+n)} \quad (3)$$

– czułość początkowa  $r_{21}$  względem funkcji  $f'(\varepsilon_i)$  dla  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ;

$$f'(\varepsilon_i) = \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_4)}{1 + \frac{\Sigma R_{10} \varepsilon_i}{\Sigma R_{10}}} \equiv \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}(\varepsilon_i)} \quad (4)$$

– napięciowa funkcja niezrównoważenia;  
 $\Delta L(\varepsilon_i)$ ;  $\varepsilon_{\Sigma R}$  – przyrosty jej licznika i mianownika.

Rezystancje rozwarciowe mostka są opisane wzorami

$$r_{11} \equiv R_{AB}^\infty = R_{AB0} (1 + \varepsilon_{AB}) = R_{AB0} \frac{(1 + \varepsilon_{12})(1 + \varepsilon_{34})}{(1 + \varepsilon_{\Sigma R})} \quad (5)$$

$$r_{22} \equiv R_{CD}^\infty = R_{CD0} (1 + \varepsilon_{CD}) = R_{CD0} \frac{(1 + \varepsilon_{14})(1 + \varepsilon_{23})}{(1 + \varepsilon_{\Sigma R})} \quad (6)$$

gdzie:

$$R_{AB0} = R_{10} \frac{n(1+m)}{1+n} \quad (7)$$

– początkowa rezystancja wejściowa mostka w równowadze,

$$R_{CD0} = R_{10} \frac{m(1+n)}{1+m} \quad (8)$$

– początkowa rezystancja wyjściowa mostka w równowadze,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}(\varepsilon_i)} \left( \frac{n\varepsilon_{12} + \varepsilon_{43}}{1+n} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{43} \right) \quad (9)$$

– przyrost względny wejściowej rezystancji rozwarcia,

$$\varepsilon_{CD} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}(\varepsilon_i)} \left( \frac{m\varepsilon_{14} + \varepsilon_{23}}{1+m} + \varepsilon_{14} \varepsilon_{23} \right) \quad (10)$$

– przyrost względny wyjściowej rezystancji rozwarcia,

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{\Delta R_i + \Delta R_j}{R_{10} + R_{j0}} \quad (11)$$

– przyrost względny sumy rezystancji  $R_i + R_j$  ramion  $i, j$  mostka,

$$\varepsilon_{\Sigma R} \equiv \frac{\varepsilon_{12} + n\varepsilon_{43}}{1+n} = \frac{\varepsilon_{14} + m\varepsilon_{23}}{1+m} \quad (12)$$

– przyrost względny sumy rezystancji oczka głównego.

Pomimo, że mostek ma tylko trzy różne parametry – współczynniki w równaniach opisujących jego pracę jako czwórnik, to realizują je aż cztery rezystancje. Dodatkowym równaniem jest warunek równowagi mostka. Wartości parametrów impedancyjnych są skończone dla wszystkich skończonych wartości rezystancji mostka, w tym i przy jego równowadze. Ze wzorów (2) i (4) wynika bezpośrednio zależność transmitancji  $r_{21}$  mostka od znaków i wartości przyrostów  $\varepsilon_i$  poszczególnych rezystancji jego ramion. Znaki przeciwne w ra-

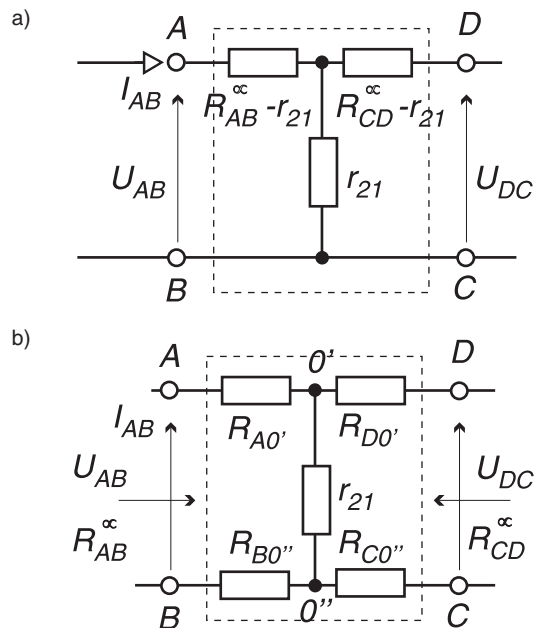
mionach sąsiednich, które podano na rys. 2 rozróżniają układ mostka w tym samym kierunku. Transmitancja  $r_{21}$  i jej funkcja  $f'(\varepsilon_i)$  mogą teoretycznie przyjmować wartości w zakresie  $(-\infty, +\infty)$ . Ograniczenia wynikają z wartości przyrostów  $\varepsilon_i$ , z dopuszczalnych mocy rezystancji mostka oraz z maksymalnego dopuszczalnego napięcia źródła prądowego  $J$  lub maksymalnego prądu źródła napięciowego  $E$ . Transmitancja  $r_{21} = 0$ , gdy jej funkcja niezrównoważenia  $f'(\varepsilon_i) = 0$ , a więc może to zachodzić dla wielu różnych kombinacji przyrostów  $\varepsilon_i$ . Jako podstawowy przyjmuje się stan, gdy wszystkie przyrosty  $\varepsilon_i = 0$ . Wówczas ze wzoru (3) otrzymuje się znany **warunek równowagi czteroramiennego mostka rezystancyjnego** o liniowych elementach, w postaci:

$$R_{10} R_{30} = R_{20} R_{40} \quad (13)$$

Należy podkreślić, że jest to właściwość samego układu rezystancyjnego o strukturze mostka, równoważna sygnałowi na wyjściu równemu zeru tylko przy jednym źródle dołączonym do przekątnej.

### Proste schematy zastępcze mostka

W szczególnych przypadkach pracy mostka jako czwórnik typu **X** można go zastępować innymi schematami. Dwa takie schematy podano na rys. 3. Układ 3a) stosuje się, gdy poza mostkiem nie ma żadnych innych połączeń pomiędzy obwodami po obu jego stronach. Jest to czwórnik typu **T** o rezystancjach jak na rysunku, równoważny dla mostka jedynie co do parametrów na zaciskach obu stron. W czwórniku tym, inaczej niż w mostku, jeden z zacisków wejścia i wyjścia jest wspólny (B zwarty z C). Czwórnik **T** ma też swój odpowiednik ty-



**Rys. 3.** Schematy zastępcze mostka w postaci czwórników typu T i 2T: a) równoważność z mostkiem tylko dla parametrów wejścia i wyjścia, b) równoważność elementów macierzy i wszystkich napięć zacisków

pu II, użyteczny przy opisie ramion mostka poprzez przewodności i przy wyznaczaniu prądu zwarcia.

Schemat z rys. 3b) jest czwórnikami typu 2-T. Jego rezystancje zależą różnie od rezystancji ramion mostka w równowadze i ich przyrostów. Rezystancje poziome:

$$R_{A0'} = \frac{R_4(R_1+R_2)}{\Sigma R_i} \quad (14)$$

$$R_{D0'} = \frac{R_2(R_1+R_4)}{\Sigma R_i} \quad (15)$$

$$R_{B0'} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{\Sigma R_i} \quad (16)$$

$$R_{C0'} = \frac{R_4(R_2+R_3)}{\Sigma R_i} \quad (17)$$

Obok równoważności parametrów wejścia i wyjścia schemat ten zachowuje taki sam jak w mostku rozkład napięć pomiędzy wszystkimi zaciskami. Ma on jedynie inne wartości rezystancji wejściowych, widzianych od strony ramion mostka, np. z zacisków AD. Schematu tego nie opisywano w literaturze. Można go stosować w analizie układów, w działaniu których istotne są też zmiany potencjałów na zaciskach, na przykład gdy mostek i współpracujące obwody zawierają wzmacniacze zasilane ze wspólnego źródła.

W obu schematach, transmitancję mostka  $r_{21}$  odwzorowuje równa jej co do wartości rezystancja gałęzi narysowanej pionowo. Dla ujemnej transmitancji  $r_{21}$  rezystancja ta też staje się ujemna. Oba schematy można więc stosować z ograniczeniem – tylko dla jednego kierunku napięcia wyjściowego  $U_{DC}$ . Przy przechodzeniu tego napięcia przez zero należałoby zamieniać miejscami odprowadzenia wyjścia. W opisie pracy dowolnego mostka jako czwórnik, przy pełnych zakresach zmian jego rezystancji, nie można więc użyć trójkąta typu T lub II o nieprzełączanej strukturze. Trzeba stosować jako układ zastępczy czwórnik typu X, czyli mostek o czterech ramionach bez gałęzi w przekątnych.

## Zależności pomiędzy parametrami zewnętrznymi mostka

Z postaci rezystancji początkowych  $R_{AB0}, R_{CD0}$  mostka w stanie równowagi – wzory (7) i (8) – wynika, że ich iloczyn też spełnia warunek równowagi (13). Otrzymuje się:

$$R_{AB0} R_{CD0} = mnR_{10}^2 = R_{10}R_{30} = R_{20}R_{40} \quad (18)$$

Zależność tę nazwiemy **rozszerzonym warunkiem równowagi mostka czteroramiennego**.

Ponadto ze wzorów (2) i (3) wynika, że początkowe wartości parametrów zewnętrznych mostka są powiązane prostą zależnością:

$$\frac{R_{AB0} R_{CD0}}{\Sigma R_{i0}} = t_0 \quad (19)$$

Nie są więc one zupełnie dowolne.

Obie zależności można z pożytkiem stosować w praktyce pomiarowej, np. do upraszczania postaci wzorów mostka i przy syntezie schematu zastępczego o nieznannej strukturze i niedostępnym bezpośrednio wnętrzu, dokonywanej tylko na podstawie pomiarów na jego zaciskach. Dla mostka czterogałęziowego z wartości rezystancji  $R_{AB0}, R_{CD0}$  otrzymuje się bezpośrednio stosunki rezystancji jego ramion przy równowadze:

$$m = \frac{r_{CD0}(r_{AB0}-1)}{r_{CD0}-1} \quad (20a)$$

oraz

$$n = \frac{r_{AB0}(r_{CD0}-1)}{r_{AB0}-1} \quad (20b)$$

gdzie:

$$r_{AB0} \equiv \frac{R_{AB0}}{R_{10}} \quad r_{CD0} \equiv \frac{R_{CD0}}{R_{10}}$$

Wyznaczone z tych wzorów wartości  $m$  i  $n$ , przy zadanej wartości  $R_{10}$ , umożliwiają znalezienie pozostałych rezystancji mostka czteroramiennego 4R, który zastępuje znajdujący się w równowadze dowolny układ w postaci „czarnej skrzynki”, oraz określenie jego czułości początkowej  $T'_0$  ze wzoru (19).

Ze wzorów (5) i (6) wynika też, że przyrosty  $\varepsilon_{AB}$  oraz  $\varepsilon_{CD}$  rezystancji rozwarciowych  $R_{AB}^\infty$  i  $R_{CD}^\infty$  mostka są ze sobą powiązane poprzez wspólny mianownik  $1+\varepsilon_{\Sigma R}$  zależnością:

$$\frac{1+\varepsilon_{CD}}{1+\varepsilon_{AB}} = \frac{(1+\varepsilon_{14})(1+\varepsilon_{23})}{(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{34})} = \left(\frac{1+m}{1+n}\right)^2 \frac{(1+n+\varepsilon_1+n\varepsilon_4)(1+n+\varepsilon_2+n\varepsilon_3)}{(1+m+\varepsilon_1+m\varepsilon_2)(1+m+\varepsilon_4+m\varepsilon_3)} \quad (21)$$

Określenie wartości dowolnych przyrostów względnych poszczególnych rezystancji mostka poza stanem równowagi, na podstawie pomiarów tylko na jego zaciskach wejściowych i wyjściowych, w ogólnym przypadku prowadzi do układu równań nieliniowych.

## Linearyzacja zależności parametrów zewnętrznych mostka

Zależności parametrów mostka od przyrostów  $\varepsilon_i$  linearyzują się przy małych ich wartościach. Liniowy przebieg funkcji niezrównoważenia  $f'(\varepsilon_i)$  czteroramiennego mostka można też uzyskać i przy dużych przyrostach  $\varepsilon_i$  rezystancji. Przyrosty te muszą jednak zachodzić równocześnie w co najmniej dwu jego ramionach. Ze wzoru (11) definiującego przyrosty sum par rezystancji, dla  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{34}$  lub  $\varepsilon_{14} = \varepsilon_{23}$  otrzymuje się: przyrosty rezystancji ramion mostka muszą być powiązane jedną z zależności

$$\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 = \varepsilon_4 + m\varepsilon_3 \quad (22a)$$

lub

$$\varepsilon_1 + m\varepsilon_4 = \varepsilon_2 + m\varepsilon_3 \quad (22b)$$

Wymagania te można nazwać **ogólnymi warunkami linearyzacji**. Przy spełnianiu każdego z nich z osobna uzyskuje się istotne uproszczenia wzorów opisujących parametry mostka. Ponadto przyrosty rezystancji rozwarciowych spełniają wówczas zależności:  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{\Sigma R}$  lub  $\varepsilon_{CD} = \varepsilon_{14} = \varepsilon_{\Sigma R}$ . Po podstawieniu warunku (22a) lub (22b) do wzoru (4), w liczniku i mianowniku funkcji niezrównoważenia  $f'(\varepsilon_i)$  występuje wspólny wielomian podlegający skróceniu i funkcja ta staje się zależna liniowo od różnicy tylko dwu przyrostów  $\varepsilon_i$ . Dla warunku (22a) jest to wyrażenie:  $1 + m + \varepsilon_1 + m\varepsilon_2$ , a transmitancja  $r_{21}$  mostka i względny przyrost rezystancji wejściowej  $\varepsilon_{AB}$  wynoszą:

$$r_{21} = R_{10} \frac{n}{1+n} (\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \quad (23a)$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2}{1+m} \quad (23b)$$

Jeśli zaś przyrosty spełniają warunek 22b, to otrzymuje się:

$$r_{21} = R_{10} \frac{m}{1+m} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (24a)$$

oraz

$$\varepsilon_{DC} = \frac{\varepsilon_1 + n\varepsilon_4}{1+n} \quad (24b)$$

Zależność (7) opisująca rezystancję wejściową  $R_{AB}^\infty$  mostka nieobciążonego linearyzuje się więc też przy spełnieniu warunku (22a), zaś zależność (9) rezystancji wyjściowej  $R_{CD}^\infty$  przy warunku (22b). Powyższe ogólne warunki linearyzacji transmitancji prądowo-napięciowej i jednej z rezystancji zewnętrznych mostka obejmują też różne prostsze zależności pomiędzy przyrostami rezystancji ramion mostka. Jeśli któryś z warunków (22a) lub (22b) ma być spełniony, to tylko trzy przyrosty mogą być od siebie niezależne. Czwarty musi już zależeć liniowo i w określony sposób od pozostałych. Jest to trudne do realizacji. Łatwiej jest powiązać przyrosty ze sobą parami poprzez ich odpowiednie zależności od wspólnych wielkości wpływających. Można np. bardzo prosto i w określonym stosunku zmniejszyć przyrost względny wybranej rezystancji poprzez dodanie doń stałej rezystancji szeregowej. Innym rozwiązaniem, nadającym się do stosowania m.in. w przetwornikach tensometrycznych siły lub ciśnienia, jest umieszczanie czujników w miejscach elementu sprężystego naprężanych niejednakowo, ale w znanym stosunku.

W obu parach zależności (23a, b) i (24a, b) występują po trzy przyrosty  $\varepsilon_i$ . Do osobnego wyznaczenia każdego z nich niezbędne jest więc jeszcze jedno równanie. Ale np. w pierwszym z przypadków, dla warunku (22a), przyrost  $\varepsilon_{DC}$  rezystancji wyjściowej zależy nieliniowo od przyrostów  $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ . Upraszcza się to, gdy przyrosty spełniają jeden z warunków (22a) lub (22b) i są jeszcze ze sobą powiązane parami np. dla (22a) następująco:

$$\varepsilon_1 = m\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 = m\varepsilon_4 \quad (25a)$$

lub

$$\varepsilon_4 = -m\varepsilon_2, \quad \varepsilon_4 = -m\varepsilon_3 \quad (25b)$$

Dla uzyskania możliwie dużego sygnału, znaki przyrostów w ramionach sąsiednich powinny być przeciwne, tj.:  $\text{sign } \varepsilon_4 = -\text{sign } \varepsilon_1$  oraz  $\varepsilon_2 = -\text{sign } \varepsilon_1$ .

W pierwszym z przypadków para przyrostów dodatkich jest ograniczona dopuszczalną mocą rezystancji mostka lub przez parametry źródła zasilania. Drugi przypadek – to np. mostek o wyjściu ze styków ślizgowych dwu potencjometrów, których krańce ograniczają wartości przyrostów rezystancji według warunku:  $|\varepsilon_i| \leq 1 + m$ .

Liniowe zależności transmitancji i jednej z rezystancji zewnętrznych mostka od przyrostów rezystancji jego ramion stanowią cenną właściwość dla wykorzystania w pomiarach. Opisaną tu linearyzację stosowano dotąd tylko przy pomiarach jednej wielkości i w przypadkach szczególnych, np. dla mostka o jednakowych rezystancjach początkowych. Pomiar drugiej wielkości tym samym mostkiem są stosowane jedynie w sposób niejawni na wyjściu, zazwyczaj do wewnętrznej kompensacji lub korekcji temperaturowych zmian czułości w przetwornikach z czujnikami różnicowymi o małych przyrostach rezystancji. Np. w tensometrycznych przetwornikach naprężeń do tego celu służą zmiany rezystancji wejściowej mostka symetrycznego w równowadze, zależne tylko od temperatury.

## Parametry robocze mostka o dowolnym zasilaniu i obciążeniu

Jeśli w rzeczywistym układzie z mostkiem istnieją gałęzie, wewnętrzne lub zewnętrzne, łączące jego przeciwległe wierzchołki, to należy je uwzględnić też na wejściu i wyjściu schematów zastępczych z rys. 3 lub wyznaczać wraz z ich rezystancjami zastępczymi parametry robocze na zaciskach mostka. Podobne schematy zastępcze można też utworzyć dla pełnego mostka (czworobok zupełny) jako czwórnika. Wartości poszczególnych rezystancji będą jednak opisane wówczas innymi, dosyć skomplikowanymi wzorami i zależą od rezystancji w przekątnych. Rezystancje  $R_{AB}^\infty$  i  $R_{CD}^\infty$  zastępuje się w nich rezystancjami roboczymi  $R_{AB}$  i  $R_{CD}$ , a transmitancję prądowo-napięciową  $r_{21}$  nieobciążonego mostka – transmitancją roboczą  $T_0$ . Dla rzeczywistego źródła zasilania o prądowym lub napięciowym schemacie zastępczym **napięcie wyjściowe mostka obciążonego** (gdy  $U_{DC} = R_L I_{DC}$ ) wynosi:

$$U_{DC} = J \frac{R_G R_L r_{21}}{(R_G + R_{AB}^\infty)(R_L + R_{CD}^\infty) - r_{21}^2} \quad (26a)$$

$$U_{DC} = E \frac{R_L r_{21}}{(R_G + R_{AB}^\infty)(R_L + R_{CD}^\infty) - r_{21}^2} \quad (26b)$$

Wzór (26a) upraszcza się przy idealnym zasilaniu prądowym, tj. dla  $R_G \rightarrow \infty$  oraz gdy  $i/$  lub  $R_L \rightarrow \infty$ . Wzór (26b), otrzymany po prostym podstawieniu  $J = ER_G^{-1}$ , uprasz-

cza się zaś przy idealnym zasilaniu napięciowym, tj. gdy  $R_G=0$ , oraz – tak jak poprzedni – przy nieobciążonym wyjściu mostka, czyli dla  $R_L \rightarrow \infty$ . Wypadkowa rezystancja  $R_G$  w gałęzi źródła i wypadkowa rezystancja  $R_L$  w gałęzi odbiornika są zwykle stałe w układach pomiarowych, zaś mogą zmieniać się w mostkowych schematach zastępczych obiektów badanych i czujników czterozaciskowych np. hallotronu [2].

Uwzględniając wzory (26a, b) dla rezystancji  $R_{AB}^\infty, R_{CD}^\infty$  i zakładając, że:  $R_G \equiv gR_{10} \equiv k_G R_{AB0}$ ;  $R_L \equiv lR_{10} \equiv k_L R_{CD0}$ , otrzymuje się:

$$U_{DC} = J \frac{r_{21}}{\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right) \left(1 + \frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right) - \frac{r_{21}^2}{R_G R_L}} \quad (27a)$$

$$U_{DC} = \frac{E}{R_G} \frac{r_{21}}{\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right) \left(1 + \frac{1+\varepsilon_{CD}}{k_L}\right) - \frac{r_{21}^2}{R_G R_L}} \quad (27b)$$

Wynika stąd, jak rezystancje  $R_G, R_L$  i ich współczynniki  $k_G, k_L$  wpływają na wartość i na przebieg napięcia wyjściowego mostka.

Rezystancje robocze na zaciskach mostka z rezystancjami  $R_L, R_G$  w przekątnych są opisane wzorami:

$$R_{AB} = R_{AB}^\infty - \frac{r_{21}^2}{R_{CD}^\infty + R_L} = R_{AB0} \left[ 1 + \varepsilon_{AB} - \frac{r_{12}^2}{mn R_{10}^2 (1 + \varepsilon_{CD} + k_L)} \right] \quad (28a, b)$$

$$R_{CD} = R_{CD}^\infty - \frac{r_{21}^2}{R_{AB}^\infty + R_G} = R_{CD0} \left[ 1 + \varepsilon_{CD} - \frac{r_{12}^2}{mn R_{10}^2 (1 + \varepsilon_{AB} + k_G)} \right] \quad (29a, b)$$

**Obie rezystancje na zaciskach mostka pełnego i ich przyrosty względne maleją z kwadratem transmitancji  $r_{21}$ , a więc niezależnie od jej znaku. Zmiany te są też odwrotnie proporcjonalne do rezystancji obwodu dołączonego, o przeciwnej stronie.** Jedynie w stanie równowagi obie rezystancje wejściowe nie zależą od  $R_L$  oraz  $R_G$ , i wynoszą:  $R_{AB0}, R_{CD0}$ .

Gdy  $R_L=0$  lub  $R_G=0$ , otrzymuje się rezystancje zwarcia  $R_{AB}^0, R_{CD}^0$ . Z porównania ich wzorów wynika, że przy dowolnej wartości transmitancji  $r_{21}$  obowiązują zależności:

$$\frac{R_{CD}^0}{R_{CD}^\infty} = \frac{R_{AB}^0}{R_{AB}^\infty} = 1 - \frac{r_{21}^2}{R_{CD}^\infty R_{AB}^\infty} \quad (30a)$$

oraz

$$R_{CD}^0 R_{AB}^\infty = R_{AB}^0 R_{CD}^\infty \quad (30b)$$

Tak więc stosunki rezystancji obu stron mostka przy zwarcia i rozwarciu zacisków strony przeciwnej są jednakowe i maleją wraz z  $r_{21}^2$ . Z tych wzorów wynika po-

nadto, że stosunki obu rezystancji zwarcia i obu rezystancji rozwarcia stron są sobie równe.

Ze wzorów (26) lub (27) i (29) można przy  $R_L=0$  wyznaczyć wyjściowy prąd zwarcia

$$I_{DC}^0 = \frac{U_{DC}^\infty}{R_{CD}} = J \frac{R_G r_{21}}{\left(R_G + R_{AB}^\infty\right) R_{CD}^\infty - r_{21}^2} = \quad (30a, b)$$

$$= \frac{J r_{21}}{R_{CD0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{AB}}{k_G}\right) (1 + \varepsilon_{CD}) - \frac{r_{21}^2}{k_G mn R_{10}^2}}$$

W szczególnych przypadkach: przy idealnych źródłach zasilania, przy rezystancjach obciążenia  $R_L=0$  lub  $R_L=\infty$ , przy różnych zależnościach wartości początkowych rezystancji  $R_{10}$  i ich przyrostów  $\varepsilon_i$  (np. symetria, antysymetria itp.) wszystkie powyższe wzory częściowo się upraszczają. Dyskusja tych przypadków wykracza poza ramy tej publikacji.

Robocze napięcie wyjściowe można zapisać też ogólnie, w sposób podobny jak we wzorze (2), tj.

$$U_{DC} \equiv T_0 f_{UJ}(\varepsilon_i) \quad (31)$$

gdzie:

$$T_0 \equiv J \frac{R_{10} R_{30}}{M_{UJ0}} = \frac{E}{R_G} \frac{R_{10} R_{30}}{M_{UJ0}}$$

– robocza czułość początkowa napięcia wyjściowego mostka przy rezystancji źródła  $R_G > 0$  i dowolnym obciążeniu  $R_L > 0$ ,

$$f_{UJ}(\varepsilon_i) \equiv \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1 + \varepsilon_{UJ}(\varepsilon_i)}$$

– robocza funkcja niezrównowazenia napięcia wyjściowego mostka wraz z dołączonymi układami współpracującymi,

$$\Delta L(\varepsilon_i) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4$$

– licznik tej funkcji,

$$\varepsilon_{UJ}(\varepsilon_i) \equiv \frac{\Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)}{M_{UJ0}}$$

– przyrost względny jej mianownika,

$$M_{UJ} \equiv M_{UJ0} + \Delta M_{UJ}(\varepsilon_i)$$

– mianownik wzoru na napięcie z wyodrębnioną jego wartością w równowadze mostka i przyrostem bezwzględnym od tego stanu.

Licznik  $\Delta L(\varepsilon_i)$  roboczej funkcji  $f_{UJ}(\varepsilon_i)$  niezrównowazenia mostka jest taki sam jak w funkcji  $f'(\varepsilon_i)$  transmitancji  $r_{21}$  mostka o rozwartym wyjściu, podanej we wzorze (4), zaś przyrost  $\varepsilon_{UJ}(\varepsilon_i)$  jej mianownika zależy od bieżących wartości różnych iloczynów wszystkich sześciu rezystancji w układzie (14 składników) [2, 8].

Robocza czułość początkowa  $T_0$  napięcia  $U_{DC}$  ze wzoru (31) jest następująca:

$$T_0 = JR_{10} \frac{mn}{(1+n)(1+m)} \frac{k_G}{1+k_G} \frac{k_L}{1+k_L} = E \frac{m}{(1+m)^2} \frac{k_L}{(1+k_G)(1+k_L)} \quad (32a, b)$$

Przy prądzie źródła  $J = const.$ , czułość  $T_0$  dąży do czułości początkowej  $T_0' = Jt_0'$  mostka nieobciążonego zasilanego prądowo (tj. gdy współczynniki  $k_G \rightarrow \infty$  i  $k_L \rightarrow \infty$ ) oraz  $T_0$  jest największe dla  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Zaś przy  $E = const.$   $T_0 \rightarrow T_{0max}'$ , gdy  $k_G \rightarrow 0$ ,  $k_L \rightarrow \infty$ ,  $m=1$ .

Ze wzoru (32a), po uwzględnieniu rozszerzonego warunku równowagi, się otrzymuje:

$$\frac{R_{AB0} R_{CD0}}{\Sigma R_{10}} = \frac{T_0}{J} \frac{k_G}{1+k_G} \frac{k_L}{1+k_L} \quad (33)$$

Jest to rozszerzenie zależności (19) na przypadek ogólny mostka pełnego. Wiąże ono podstawowe parametry samego mostka – lewa strona wzoru, z jego początkową czułością roboczą  $T_0$  i współczynnikami charakteryzującymi obwody dołączone – prawa strona.

Przy zmianach immitancji ramion mostka w postaci przyrostów konduktancji liniowe zależności dwu parametrów na jego zaciskach otrzymuje się dla układu dualnego, tj. przy zasilaniu napięciowym i wyjściu w postaci prądu zwarcia.

Niektóre z podanych tu wzorów, głównie dla parametrów mostka nieobciążonego i zasilanego prądowo autor wykorzystał już, opisując zastosowanie mostka jednoprądowego w pomiarach dwuparametrowych oraz wspólnie z niekonwencjonalnym, dwuprądowym mostkiem – w pomiarach trój- i czteroparametrowych, m.in. w [6 cz. 1 i cz. 2, 7 i 8].

## Podsumowanie

- W pracy wykazano, że pasywny układ SLS (skupiony, liniowy, stacjonarny) o czterech wyodrębnionych końcówkach (4-T) zastępują w ogólnym przypadku następujące układy o sześciu gałęziach:
  - 1 mostek z przekątnymi (czyli czworobokiem zupełny),
  - 4 różne równoważne mu układy mostka z pojedynczą przekątną i gałęzią dołączoną szeregowo do węzła jednego z jej końców oraz
  - 4 układy mostka bez przekątnych z szeregowymi rezystancjami w dwu sąsiednich wierzchołkach.
- Przy prądzie stałym (DC) z pomiarów na zaciskach układu 4-T można wyznaczyć przyrosty immitancji sześciu gałęzi czworoboku zupełnego, które umożliwiają pośrednie pomiary aż sześciu wielkości wywołujących te przyrosty wówczas, gdy równania opisujące ich wpływy mają jednoznaczne lub sensowne fizycznie rozwiązania.
- Jako szczególnie przypadek układu 4-T rozpatrzono pracę niezrównoważonego czteroramiennego most-

ka rezystancyjnego 4R o zasilaniu i wyjściu z przekątnych. Użyto równań impedancyjnych mostka jako czwórnika typu X, opisanych w wartościach bezwzględnych i względnych parametrów odniesionych do stanu równowagi.

- Dzięki stosowanym tu opisom otrzymano dotąd niepublikowane:
  - warunek równowagi rozszerzony o iloczyn rezystancji wejściowych
  - zależności przyrostów rezystancji linearyzujące przebieg napięcia wyjściowego i jednej z rezystancji wejściowych
  - związek początkowych parametrów na zaciskach zewnętrznych mostka.
- Dla napięcia wyjściowego nieprzechodzącego przez zero podano czwórniki typu T o takich samych parametrach na zaciskach zewnętrznych jak mostek oraz czwórniki pięciogałęziowy 2T zachowujący też napięcia węzłów mostka.
- Opis mostka 4R jako czwórnika umożliwił też wyznaczenie różnych postaci parametrów roboczych na jego zaciskach i ich związków przy dowolnym źródle zasilania i obciążeniu oraz przy wszystkich ramionach niezależnie zmiennych (patrz tabele w [7, 8]).
- W mostku 4R można zmierzyć niezależne cztery przyrosty.
- Uogólnione opisy parametrów mostka 4R autor wykorzystał już w analizie możliwości i propozycjach pomiarów 2–4 parametrów mostkami o zasilaniu: klasycznym i dwuprądowym (podanym przez autora) oraz nimi oboma po kolei.

## Bibliografia

1. Hague B. Foord T. R.: Alternating Current Bridge Methods. 6 ed. Pitman Publishing 1971 (1 wydanie 1941).
2. Karandiejew K. B.: Pomiary elektryczne metodami mostkowymi i kompensacyjnymi. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1969 (tłumaczenie oryginału rosyjskiego z 1963 r.).
3. Szulce A.: Mostki elektryczne pomiarowe. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977.
4. Szumilewicz i in.: Pomiary elektroniczne w technice. WNT, Warszawa 1982.
5. Kobus A., Tuszyński J., Warsza Z. L. (rozd. 1, 3 i 6): Technika Hallotronowa. WNT, Warszawa 1980.
6. Warsza Z. L.: Pomiary wieloparametrowe mostkami rezystancyjnymi o różnym prądowym zasilaniu. PAR Część 1 nr 7-8/2003, s. 5-11 i Część 2 nr 9/2003, s. 21-25.
7. Warsza Z. L.: Rezystancyjny mostek jednoprądowy w pomiarach dwuparametrowych. Część 1. PAK 12/2003, wkładka s. V-VIII.
8. Warsza Z. L.: Mostki rezystancyjne jako układy kondycjonowania sygnałów w pomiarach kilku parametrów. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, seria Elektryka 2/2004, Radom 2004. ■