Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych

Paweł Fotowicz *

Przedstawiono ścisłą metodę obliczania niepewności rozszerzonej, polegającą na wyznaczeniu przedziału ufności na podstawie splotu podstawowych rozkładów stosowanych do oceny wielkości wejściowych. Obliczona niepewność rozszerzona jest zbieżna z wyznaczoną metodami numerycznymi przy zaokrągleniu jej wartości do dwóch cyfr znaczących. Można ją łatwo implementować do arkusza kalkulacyjnego; nie wymaga specjalistycznego oprogramowania komputerowego.

Niepewność rozszerzona określa przedział ufności jaki przypisujemy wynikowi pomiaru wielkości mierzonej. Przedział ten powinien odpowiadać określonemu poziomowi ufności. Na ogół przyjmuje się standardowo poziom ufności 95 %, szczególnie w pomiarach związanych z wzorcowaniem [1]. Obliczanie niepewności rozszerzonej zatem powinno zapewniać jak najściślejsze wyznaczenie wartości przedziału ufności. Oblicza się ją poprzez wyznaczenie iloczynu współczynnika rozszerzenia i złożonej niepewności standardowej. Współczynnik rozszerzenia przyjmuje wartość zależną od rozkładu przypisanego wielkości mierzonej i przyjętego poziomu ufności. Rozkład ten można tradycyjnie przypisać metodą *a priori*, zgodnie z prawem propagacji niepewności [2] lub starać się go określić na podstawie rozkładów wielkości wejściowych, zgodnie z zasadą propagacji rozkładów [3]. To drugie rozwiązanie wymaga wykonania dodatkowych obliczeń, ale jest dokładniejsze przy ocenie przedziału ufności.

Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzoną definiuje zależność

$$U = k \cdot u_c(y) \tag{1}$$

gdzie k to współczynnik rozszerzenia, a $u_c(y)$ to złożona niepewność standardowa. Dla określonego poziomu ufności p niepewność rozszerzona spełnia równanie

$$\int_{-U}^{U} g(y)\,\mathrm{d}y = p \tag{2}$$

gdzie $g(y)$ to funkcja gęstości prawdopodobieństwa wielkości mierzonej y. Jeżeli przyjmiemy założenie o niezależności wszystkich wielkości wejściowych oraz spełnione jest równanie

$$y = c_1 x_1 + \ldots + c_N x_N \tag{3}$$

gdzie x_i są wielkościami wejściowymi, a c_i współczynnikami wrażliwości, to funkcja gęstości wielkości wyjściowej jest policzalna z zależności

$$g(y) = g_1(x_1) * \ldots * g_N(x_N) \tag{4}$$

gdzie

$$g_i(x_i) * g_{i+1}(x_{i+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x_i) g_{i+1}(x - x_i)\,\mathrm{d}x_i \tag{5}$$

a $g_i(x_i)$ funkcje gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowych. Aby wyznaczyć niepewność rozszerzoną należy rozwiązać powyższe równania. Pozwalają one na wyznaczenie odpowiedniej wartości współczynnika rozszerzenia zapewniającego właściwy poziom ufności.

Przy opisie wielkości wejściowych na ogół można ograniczyć się do podstawowych rozkładów takich jak: normalny, Studenta, prostokątny, trójkątny czy trapezowy. Splot tych rozkładów można określić z wystarczającą dokładnością przez zastosowanie przedstawionej poniżej metody postępowania.

Przybliżenie splotu rozkładów

Przybliżeniem wielokrotnego splotu rozkładów normalnych i prostokątnych jest rozkład typu PN. Funkcja gęstości tego rozkładu jest zależna od parametru r będącego ilorazem odchyleń standardowych tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego

$$g_{\mathrm{PN}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{x-\sqrt{3}\cdot r}^{x+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \mathrm{d}z \tag{6}$$

Parametr r rozkładu typu PN można przybliżyć ilorazem udziału

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \tag{7}$$

gdzie $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$ to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym.

* *mgr Paweł Fotowicz – Główny Urząd Miar*

Przybliżenie (7) można rozszerzyć o splot rozkładów trójkątnych i trapezowych. W celu znalezienia największego udziału wielkości o rozkładzie prostokątnym, w każdym z tych rozkładów należy określić jego większą składową prostokątną. Każdy z tych rozkładów bowiem to splot dwóch składowych prostokątnych.

Rozkład trójkątny jest splotem dwóch jednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trójkątnym jest dana zależnością

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \tag{8}$$

gdzie a jest szerokością połówkową rozkładu. Niepewność standardowa składowej prostokątnej tworzącej rozkład trójkątny ma postać

$$u'(x_i) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{9}$$

co prowadzi do zależności

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

Rozkład trapezowy natomiast jest splotem dwóch niejednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trapezowym jest dana zależnością

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{6}} \tag{11}$$

gdzie $2a$ jest szerokością dolnej, a $2b$ szerokością górnej podstawy rozkładu. Niepewność standardowa większej składowej prostokątnej tworzącej rozkład trapezowy ma postać

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \tag{12}$$

co prowadzi do zależności

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}u(x_i) \tag{13}$$

Splot rozkładów Studenta można przybliżyć splotem „równoważnych" im rozkładów normalnych. Owa równoważność polega na przyjęciu takich rozkładów normalnych, dla których przedziały ufności są takie same co do wartości jak wyznaczone na podstawie rozkładów Studenta dla danego poziomu ufności. Aby osiągnąć tę równoważność, należy zastąpić rozkład Studenta rozkładem normalnym, a niepewność standardową wielkości wejściowej powiększyć o iloraz kwantyli tych rozkładów

$$u'(x_i) = \frac{t(v)}{k_{\mathrm{N}}}u(x_i) \tag{14}$$

gdzie $t(v)$ to kwantyl rozkładu Studenta z liczbą stopni swobody v, a k_{N} to współczynnik rozszerzenia (kwantyl) rozkładu normalnego (k_{N} = 1,96 dla p = 95 %).

Estymata niepewności rozszerzonej

Dla wielkości wyjściowej, której rozkład jest opisany splotem wielu wymienionych powyżej rozkładów, można estymować przedział ufności, a ściślej jego połowę, zależnością

$$U = k_{\mathrm{PN}} \cdot u'_{\mathrm{c}}(y) \tag{15}$$

gdzie

$$u'_{\mathrm{c}}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{t(v)}{k_{\mathrm{N}}}u_i(y)\right)^2} \tag{16}$$

k_{PN} – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu typu PN.

Tabela 1. Wartości współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Dla wszystkich wielkości wejściowych nieopisywanych rozkładem Studenta, można przyjąć, że

$$t(v) = k_N \tag{17}$$

Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla poziomu ufności 95 % można odczytać z tabeli 1, przedstawionej również w publikacji [4]. Wartości te są podane dla progowych ilorazów udziału, przy których następuje ich zmiana o 0,01.

Estymata współczynnika rozszerzenia

Zgodnie z zależnością (1) współczynnik rozszerzenia można obliczyć jako

$$k = \frac{U}{u_c(y)} \tag{18}$$

gdzie

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)} \tag{19}$$

Przykłady obliczeniowe

Przedstawiony sposób obliczania można zastosować w procedurze szacowania niepewności w laboratorium wzorcującym. Pierwszym przykładem może być postępowanie przy wzorcowaniu ciśnieniomierza manometrem obciążnikowo-tłokowym. Równanie pomiaru ma postać błędu wskazania ciśnieniomierza

$$e_p = p_c + \delta p_c - p_w \tag{20}$$

gdzie: p_c – wskazanie ciśnieniomierza, δp_c – rozdzielczość odczytu wskazania ciśnieniomierza, p_w – ciśnienie wzorcowe.

W równaniu występują trzy wielkości wejściowe:

1) Wskazanie ciśnieniomierza – p_c

Wykonano trzy serie pomiarowe dla ciśnień rosnących i malejących. Wyniki dla zadawanego ciśnienia 5 MPa zestawiono w tabeli 2. Przyjęto rozkład Studenta z liczbą stopni swobody $v = n-1 = 5$

$$u(p_c) = s(\bar{p}_c) = \frac{s(p_c)}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}013\ \text{MPa}}{\sqrt{6}} = 0{,}0052\ \text{MPa}$$

Tabela 2. Dane pomiarowe przy wzorcowaniu ciśnieniomierza

Wartości odczytane	5,04 MPa 5,02 MPa 5,04 MPa 5,04 MPa 5,06 MPa 5,04 MPa
$\bar{p}_c$	5,04 MPa
$s(p_c)$	0,013 MPa

2) Rozdzielczość odczytu wskazania ciśnieniomierza – δp_c

Wzorcowano ciśnieniomierz analogowy z wartością działki elementarnej 0,2 MPa. Odczyty wykonywano z rozdzielczością do dziesiątej części działki elementarnej

$$u(\delta p_c) = \frac{0{,}02\ \text{MPa}}{2\sqrt{3}} = 0{,}0058\ \text{MPa}$$

3) Ciśnienie wzorcowe – p_w

Zadawano ciśnienie wzorcowe manometrem obciążnikowo-tłokowym o wartości 5 MPa. Klasa dokładności manometru wzorcowego wynosi: 0,05, a jego błąd graniczny

$$D(p_w) = \frac{0{,}05 \cdot p_w}{100} = \frac{0{,}05 \cdot 5\ \text{MPa}}{100} = 0{,}0025\ \text{MPa}$$

$$u(p_w) = \frac{D(p_w)}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}0025\ \text{MPa}}{\sqrt{3}} = 0{,}0014\ \text{MPa}$$

Wszystkie wielkości zestawiono w tabeli budżetu niepewności (tabela 3).

Aby wyznaczyć niepewność rozszerzoną przy użyciu formuły (15), należy określić wartość współczynnika k_{PN}. Wielkością wejściową z rozkładem prostokątnym o największym udziale jest rozdzielczość wskazania δp_c. Dla wielkości tej iloraz udziału (7) wynosi $r_u = 1{,}077$. Z tabeli 1 można odczytać, że współczynnik $k_{PN} = 1{,}91$. Następnie należy określić wartość kwantyla rozkładu Studenta dla wielkości wejściowej p_c związanej ze wskazaniem ciśnieniomierza. Wartość ta dla

Tabela 3. Budżet niepewności błędu wskazania ciśnieniomierza

symbol wielkości	estymata wielkości	niepewność standardowa	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości	udział niepewności	stopnie swobody
p_c	5,04 MPa	0,0052 MPa	Studenta	1	0,0052 MPa	5
δp_c	0 MPa	0,0058 MPa	prostokątny	1	0,0058 MPa	∞
p_w	5 MPa	0,0014 MPa	prostokątny	-1	-0,0014 MPa	∞
e_p	0,04 MPa				0,0079 MPa	27

liczby stopni swobody ν = 5 i poziomu ufności p = 95% wynosi $t(5)$ = 2,5706. Teraz można obliczyć niepewność rozszerzoną

$$U = k_{PN}\sqrt{\left(\frac{t(5)}{k_N}u(p_c)\right)^2 + u^2(\delta p_c) + u^2(p_w)} \cong 0{,}017\text{MPa}$$

i współczynnik rozszerzenia

$$k = \frac{U}{\sqrt{u^2(p_c) + u^2(\delta p_c) + u^2(p_w)}} = 2{,}19$$

Niepewność rozszerzona obliczona metodą dokładnego wykonywania operacji splotu rozkładów wielkości wejściowych, przy użyciu szybkiej transformaty Fouriera, dała ten sam rezultat przy zaokrągleniu do drugiego miejsca znaczącego. Obliczony tą metodą współczynnik rozszerzenia jest o jeden procent mniejszy i wynosi k = 2,17. Dla porównania niepewność rozszerzona wyznaczona metodą Welcha-Satterthwait'a na podstawie wypadkowej liczby stopni swobody ν_{eff}=27 daje rezultat U = 0,016 MPa i współczynnik rozszerzenia k = 2,05, o pięć procent mniejszy od dokładnej jego wartości. Przy zastosowaniu stałego współczynnika k = 2 niepewność rozszerzona jest o osiem procent mniejsza od obliczonej w przykładzie.

Drugim przykładem może być postępowanie przy wzorcowaniu woltomierza. Równanie pomiaru ma postać

$$e_w = V_w + \delta V_w - V_k - \delta V_k \tag{21}$$

gdzie: V_w – wskazanie woltomierza, δV_w – rozdzielczość odczytu wskazania woltomierza, V_k – napięcie kalibratora, δV_k – poprawka wartości napięcia kalibratora.

W równaniu występują cztery wielkości wejściowe:

1) Wskazanie woltomierza – V_w

Wykonano serię dziesięciu odczytów, których wyniki zestawiono w tabeli 4. Przyjęto rozkład Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = n - 1 = 9$

$$u(V_w) = s(\bar{V}_w) = \frac{s(V_w)}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}047 \text{ V}}{\sqrt{10}} = 0{,}015 \text{ V}$$

Tabela 4. Dane pomiarowe przy wzorcowaniu woltomierza

Wartości odczytane	100,1 V 100,1 V 100,1 V 100,0 V 100,1 V 100,1 V 100,1 V 100,2 V 100,1 V 100,1 V
$\bar{V}_w$	100,1 V
$s(V_w)$	0,047 V

2) Rozdzielczość odczytu wskazania woltomierza – δV_w

Wzorcowano woltomierz cyfrowy, którego ostatnia cyfra znacząca wskazania odpowiada 0,1 V

$$u(\delta V_w) = \frac{0{,}1 \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 0{,}029 \text{ V}$$

3) Napięcie kalibratora – V_k

Napięcie kalibratora wynosiło 100 V. W świadectwie wzorcowania podano, że dla powyższego napięcia niepewność rozszerzona wynosi U = 0,002 V (k = 2)

$$u(V_k) = \frac{0{,}002 \text{ V}}{2} = 0{,}001 \text{ V}$$

4) Poprawka wartości napięcia kalibratora – δV_k

Na podstawie danych producenta wyznaczono graniczną wartość poprawki z formuły: 0,0001 V_k + 1 mV

$$u(\delta V_k) = \frac{0{,}011 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0{,}0064 \text{ V}$$

Wszystkie wielkości zestawiono w tabeli budżetu niepewności (tabela 5).

Tabela 5. Budżet niepewności błędu wskazania woltomierza

symbol wielkości	estymata wielkości	niepewność standardowa	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości	udział niepewności	stopnie swobody
V_w	100,1 V	0,015 V	Studenta	1	0,015 V	9
δV_w	0 V	0,029 V	prostokątny	1	0,029 V	∞
V_k	100 V	0,001 V	normalny	-1	-0,001 V	∞
δV_k	0 V	0,0064 V	prostokątny	-1	-0,0064 V	∞
e_w	0,1 V				0,033 V	219

Wielkością wejściową opisaną rozkładem prostokątnym o największym udziale jest rozdzielczość wskazania δV_{w}. Dla wielkości tej iloraz udziału wynosi $r_u = 1{,}778$. Z tabeli 1 można odczytać, że współczynnik $k_{\mathrm{PN}} = 1{,}83$. Kwantyl rozkładu Studenta dla wielkości wejściowej V_{w} związanej ze wskazaniem woltomierza wynosi t(9) = 2,2622 przy poziomie ufności 95 %. Zatem niepewność rozszerzona wynosi

$$U = k_{\mathrm{PN}} \sqrt{\left(\frac{t(9)}{k_{\mathrm{N}}} u\left(V_{\mathrm{w}}\right)\right)^2 + u^2\left(\delta V_{\mathrm{w}}\right) + u^2\left(V_{\mathrm{k}}\right) + u^2\left(\delta V_{\mathrm{k}}\right)} \cong 0{,}063\mathrm{V}$$

a współczynnik rozszerzenia

$$k = \frac{U}{\sqrt{u^2\left(V_{\mathrm{w}}\right) + u^2\left(\delta V_{\mathrm{w}}\right) + u^2\left(V_{\mathrm{k}}\right) + u^2\left(\delta V_{\mathrm{k}}\right)}} = 1{,}89$$

Niepewność rozszerzona obliczona metodą dokładną dała ten sam rezultat przy zaokrągleniu do drugiego miejsca znaczącego. To samo dotyczy współczynnika rozszerzenia przy podawaniu go do drugiego miejsca dziesiętnego. Dla porównania niepewność rozszerzona wyznaczona metodą Welcha-Satterthwaite'a na podstawie wypadkowej liczby stopni swobody $\nu_{\mathrm{eff}} = 219$ daje rezultat $U = 0{,}065$ V i współczynnik rozszerzenia $k = 1{,}97$. Przy zastosowaniu stałego współczynnika $k = 2$ niepewność rozszerzona $U = 0{,}066$ V. Obie metody zawyżają niepewność rozszerzoną i związany z nią współczynnik rozszerzenia o około pięć procent.

Podsumowanie

Przy zastosowaniu opisanej metody obliczeniowej jest możliwa bardziej adekwatna ocena przedziału ufności od zalecanych standardowo. Niepewność rozszerzona obliczana na postawie zależności (15) daje wyniki zbieżne z metodami numerycznymi przy zaokrągleniu jej wartości do dwóch cyfr znaczących. Metoda uwzględnia stosowane standardowo rozkłady przy opisie wielkości wejściowych. Można ją łatwo implementować do arkusza kalkulacyjnego, w którym na ogół wykonuje się obliczenia niepewności. Nie wymaga w związku z tym zastosowania specjalistycznego oprogramowania komputerowego.

Bibliografia

1. Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument EA-4/02, tłumaczenie GUM, 2001
2. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999
3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions – projekt dokumentu Międzynarodowego Biura Miar z 16.03.2004
4. Fotowicz P.: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR 10/2003 ■

REKLAMA

Bezpłatny katalog firmy
National Instruments na rok 2005

Zawiera informacje o nowych produktach, tabele porównawcze oraz szczegółowo przedstawia:

- LabVIEW 7.1 narzędzie graficznego programowania
- SignalExpress interaktywne oprogramowanie pomiarowe
- Nowe karty pomiarowe serii M
- Tanie, przenośne urządzenia USB DAQ
- Kontrolery high-performance PXI
- Instrumenty modułowe 200 MS/s
- CompactRIO rekonfigurowalny systemy pomiaru i akwizycji czasu rzeczywistego
- Linki do strony ni.com

Aby uzyskać bezpłatną kopię odwiedź stronę ni.com/info i wprowadź kod lub zadzwoń (22) 33 90 150.

NATIONAL INSTRUMENTS