

Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru

Paweł Fotowicz *

Omówiono nowy projekt dokumentu dotyczący wyrażania niepewności pomiaru, opracowany przez Wspólny Komitet ds. Przewodników Metrologicznych działający pod kierownictwem dyrektora Międzynarodowego Biura Miar. Projekt formułuje zasadę propagacji rozkładów prawdopodobieństwa realizowaną poprzez matematyczny model pomiaru przy zastosowaniu metody Monte Carlo. Dokument proponuje również, aby symulacja Monte Carlo była walidującą dla innych metod obliczeniowych niepewności pomiaru, przede wszystkim związanych z prawem propagacji niepewności.

Wspólny Komitet ds. Przewodników Metrologicznych (JCGM), działający pod kierownictwem dyrektora Międzynarodowego Biura Miar, przygotował nowe opracowanie „Przewodnika” [1] wyrażania niepewności pomiaru. Zadanie to zrealizowała Grupa Robocza nr 1 (WG 1) w postaci „Uzupełnienia nr 1” (Supplement 1) pt. „Metody numeryczne propagacji rozkładów” (Numerical Methods for the Propagation of Distributions) [2], wydanego w 2004 roku.

Istotą opracowania jest sformułowanie zasady propagacji rozkładów prawdopodobieństwa, jako podstawy obliczania niepewności, realizowanej poprzez matematyczny model pomiaru przy zastosowaniu metody Monte Carlo. Dokument przedstawia zalecenia dotyczące obliczania niepewności w sytuacji, gdy nie są spełnione warunki dla zastosowania „prawa propagacji niepewności”, szczególnie ze względu na złożoność modelu pomiaru. Materiał zawiera procedurę obliczeniową związaną z zastosowaniem technik komputerowych. Procedura dotyczy wyznaczania przedziału ufności dla wartości wielkości wyjściowej odpowiadającej określonej poziomowi ufności. Jej celem jest określenie takiego przedziału ufności przy narzuconym stopniu przybliżenia, który odnosi się do realistycznej oceny modelu pomiaru i wiarygodności informacji o funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Procedurę można zastosować w odniesieniu do dowolnego modelu pomiaru w postaci pojedynczej wielkości wyjściowej, gdy wielkościom wejściowym przypisano określone funkcje gęstości prawdopodobieństwa, również asymetryczne. Podejście to pokazuje, jak za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa przypisanych wartościom wielkości wejściowych można wyznaczyć funkcję gęstości prawdopodobieństwa wartości wielkości wyjściowej. Postępowanie polega na wyznaczeniu najlepszych estymat wielkości wejściowych i ich niepewności standardowych w celu

określenia estymaty wielkości wyjściowej, i związanej z nią niepewności standardowej oraz przedziału ufności. Funkcja gęstości rozkładu wielkości wyjściowej umożliwi obliczenie wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego, które są traktowane jako estymata wielkości wyjściowej i niepewność standardowa, a przedział ufności określa się dla poziomu ufności 95 %. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być niesymetryczna. W takim wypadku przedział ufności nie jest centrowany estymatą wielkości wyjściowej. Istnieje w związku z tym wiele przedziałów ufności odpowiadających założonemu poziomowi ufności. Zaleca się przyjęcie najmniejszego z nich.

Dokument obejmuje typowe problemy obliczeniowe niepewności w sytuacjach gdy:

- udziały niepewności mogą być dowolnie duże, nawet porównywalne z niepewnością wielkości wyjściowej
- poszczególne udziały niepewności są nieporównywalne co do wartości
- rozkład wielkości wyjściowej nie jest gaussowski
- wielkość wyjściowa jest nieliniową funkcją wielkości wejściowych
- rozkłady wielkości wejściowych są niesymetryczne
- pochodne cząstkowe są niepoliczalne.

Dokument ma zastosowanie zarówno gdy mamy do czynienia z przypadkiem wzajemnie niezależnych wielkości wejściowych, którym są przypisane odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa oraz w sytuacji wzajemnie zależnych wielkości wejściowych, dla których jest określana wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa.

Oznaczenia

Grupa Robocza JCGM-WG1 zdecydowała, że indeks „c” przy oznaczeniu złożonej niepewności standardowej jest zbędny. Niepewność standardowa związana z estymatą y wielkości wyjściowej Y może być zapisywana jako $u(y)$. Użycie oznaczenia $u_c(y)$ pozostaje do przyjęcia, jeżeli jest przydatne do podkreślenia, że symbolizuje złożoną niepewność standardową. Ponadto

* Paweł Fotowicz
Główny Urząd Miar

przymiotnik „złożona” w nazwie „złożona niepewność standardowa” uważa się za zbyt techniczny i może być pominięty. Jedną z przyczyn tej decyzji jest to, że y wskazuje estymatę wielkości wyjściowej, z którą jest związana niepewność standardowa. Inną przyczyną jest to, że często wyniki obliczeń jednych niepewności stają się punktem wyjścia do obliczenia następných.

Dokument odstępnie od powszechnie stosowanych symboli używanych do oznaczania funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty. W „Przewodniku” [1] jest używane ogólne oznaczenie f odnoszące się zarówno do modelu matematycznego wielkości mierzonej, jak i funkcji gęstości prawdopodobieństwa. W dokumencie w miejsce symboli f i F oznaczających funkcje gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuantę wprowadza się oznaczenia g i G , a symbol f rezerwuje się tylko do oznaczania funkcji modelu pomiaru.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla możliwych wartości ξ_i i -tej wielkości wejściowej X_i jest oznaczana symbolem $g_i(\xi_i)$, a dla możliwych wartości wielkości wyjściowej Y oznaczana symbolem $g(\eta)$. Dystrybuanta wielkości wejściowej jest oznaczana $G_i(\xi_i)$, a wielkości wyjściowej: $G(\eta)$. Pomiędzy tymi funkcjami są następujące zależności:

$$g_i(\xi_i) = G_i'(\xi_i) \quad (1)$$

$$g(\eta) = G'(\eta) \quad (2)$$

Gdy wielkości wejściowe są wzajemnie zależne, w miejsce osobnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa $g_i(\xi_i)$ należy zastosować wspólną funkcję gęstości prawdopodobieństwa $g(\xi)$.

Procedura postępowania

Brany jest pod uwagę model pomiaru charakteryzujący się pojedynczą wielkością wyjściową i dowolną liczbą wielkości wejściowych. W tym wypadku podstawowymi krokami postępowania są:

- a) zdefiniowanie wielkości wyjściowej jako wielkości mierzonej
- b) określenie wielkości wejściowych, od których zależy wielkość wyjściowa
- c) stworzenie modelu matematycznego określającego relacje pomiędzy wielkościami wejściowymi a wielkością wyjściową
- d) przyjęcie rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych
- e) wyznaczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej poprzez jej model matematyczny na podstawie rozkładów wielkości wejściowych
- f) wyznaczenie z rozkładu wielkości wyjściowej: wartości oczekiwanej jako estymaty wielkości wyjściowej, odchylenia standardowego jako niepewności standardowej związanej z tą estymatą oraz przedziału ufności dla określonego poziomu prawdopodobieństwa.

Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo umożliwia numeryczne przybliżenie dystrybuanty $G(\eta)$ dla wartości wielkości wyjściowej $Y = f(\mathbf{X})$, gdzie Y jest pojedynczą (skalarną) wielkością wyjściową, a \mathbf{X} reprezentuje N wielkości wejściowych $(X_1, \dots, X_N)^T$. Estymata wielkości mierzonej Y , oznaczona y , jest obliczana z równania (3), będącego matematycznym modelem wielkości mierzonej, na podstawie estymat x_1, \dots, x_N dla N wartości wielkości wejściowych X_1, \dots, X_N

$$y = f(x_1, \dots, x_N) \quad (3)$$

Metoda Monte Carlo opiera się na przesłance, że każda wartość losowana jest przypadkowo z rozkładu możliwych (prawdopodobnych) wartości wielkości wejściowych, uzasadnionych tak jak każda inna taka wartość. W ten sposób, poprzez losowanie dla każdej wielkości wejściowej wartości zgodnie z ich określoną funkcją gęstości prawdopodobieństwa, wynikowy zbiór wartości legitymuje zbiór wartości tych wielkości. Wartość funkcji modelu odpowiadająca temu zbiorowi wartości tworzy zbiór możliwych wartości wielkości wyjściowej. Wartości są próbkowane dla każdej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowej, dając wartość wielkości wyjściowej. W ten sposób otrzymany duży zbiór wartości funkcji modelu może przybliżyć rozkład możliwych wartości wielkości wyjściowej. Symulacja Monte Carlo może bardziej dotyczyć otrzymania rozkładu wielkości wyjściowej niż jej wartości oczekiwanej. W szczególności powyższe losowanie wartości z funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla każdej wielkości wejściowej odpowiada pełnemu zbiorowi zaobserwowanych wartości tych wielkości, otrzymanych w tym samym czasie.

Działanie symulacji Monte Carlo polega na wygenerowaniu próbki o rozmiarze N (liczba wielkości wejściowych) poprzez niezależne próbkowanie losowe funkcji gęstości prawdopodobieństwa każdej wielkości wejściowej lub poprzez próbkowanie wspólnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla wzajemnie zależnych wielkości wejściowych. Powtarzanie tej czynności następuje w dużej liczbie, próbując wielokrotnie (M razy) zbiór wielkości wejściowych. Dla każdej niezależnej próby zawierającej N wielkości wejściowych obliczana jest wartość wielkości wyjściowej Y , uzyskując M wartości zbioru Y . Użycie wszystkich M wartości wielkości wyjściowej Y daje dystrybuantę $\hat{G}(\eta)$ będącą przybliżeniem dystrybuanty $G(\eta)$ wielkości wyjściowej. Z dystrybuanty $\hat{G}(\eta)$ wyznacza się: wartość oczekiwaną jako estymatę wielkości wyjściowej, odchylenie standardowe jako niepewność standardową oraz dwa kwantyle jako granice przedziału ufności $I_p(Y)$ dla wymaganego poziomu ufności. Skuteczność określania przedziału ufności wielkości wyjściowej powyższą metodą zależy od zastosowania odpowiednio dużej liczby M .

Podstawowym krokiem obliczeniowym procedury jest numeryczna aproksymacja dystrybuanty $G(\eta)$ dla

wartości wielkości wyjściowej. Procedura jest realizowana w kolejnych etapach:

- a) wybór liczby próbkowania (symulacji) M
- b) wygenerowanie M prób N -elementowego zbioru wielkości wejściowych
- c) dla każdej próby obliczenie z funkcji modelu pomiaru odpowiadającej mu wartości wielkości wyjściowej
- d) posortowanie wartości wielkości wyjściowych w niemalejącym porządku, używając posortowanych wartości do przybliżenia dystrybuanty wielkości wyjściowej
- e) wyznaczenie estymaty wielkości wyjściowej i związanej z nią niepewności standardowej z dystrybuanty lub bezpośrednio ze zbioru wartości wielkości wyjściowej
- f) wyznaczenie najkrótszego przedziału ufności odpowiadającego poziomowi ufności 95 % dla wielkości wyjściowej z jej dystrybuanty.

Wartość M , liczba losowań Monte Carlo, powinna być określona a priori. Wpływa na nią zalecany stopień przybliżenia zależny od kształtu funkcji gęstości wielkości wyjściowej oraz wymaganego poziomu ufności. Liczba losowań $M = 10^6$ często wystarcza do wyznaczenia przedziału ufności dla poziomu ufności 95 %, którego długość jest zgodna z jedną lub dwoma znaczącymi cyframi dziesiętnymi.

Funkcja modelu pomiaru jest obliczana dla każdej z M prób, na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa każdej z N wielkości wejściowych. Poszczególne próby oznaczane są: $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, gdzie r -ta próba \mathbf{x}_r zawiera wartości $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$ z wartością $x_{i,r}$ wylosowaną z funkcji gęstości wielkości wejściowej X_i . Funkcja modelu wartości ma postać

$$y_r = f(\mathbf{x}_r) \text{ dla } r = 1, \dots, M \quad (4)$$

Przybliżenie $\hat{G}(\eta)$ dystrybuanty $G(\eta)$ wielkości wyjściowej Y może być otrzymane następująco. Sortujemy uzyskane w symulacji Monte Carlo wartości wielkości wyjściowej y_r , $r = 1, \dots, M$, zgodnie z niemalejącym porządkiem. Oznaczamy posortowane wartości $y_{(r)}$ i każdej z nich przypisujemy skumulowane prawdopodobieństwo

$$p_r = \frac{r-1/2}{M} \quad (5)$$

Następnie tworzymy funkcję $\hat{G}(\eta)$ jako fragmentami liniową, łącząc M punktów o współrzędnych $(y_{(r)}, p_r)$

$$\hat{G}(\eta) = \frac{r-1/2}{M} + \frac{\eta - y_{(r)}}{M(y_{(r+1)} - y_{(r)})} \quad \text{dla } y_{(r)} \leq \eta \leq y_{(r+1)} \quad (6)$$

Wartość oczekiwana funkcji $\hat{G}(\eta)$ przybliża wartość oczekiwaną funkcji gęstości prawdopodobieństwa $g(\eta)$ dla wartości wielkości Y i jest traktowana jak estymata y wielkości wyjściowej. Odchylenie standardowe funkcji $\hat{G}(\eta)$ przybliża odchylenie standardowe funkcji $g(\eta)$ i jest traktowane jako niepewność standardowa $u(y)$ związana z estymatą y . Wartość oczekiwana jest definiowana jako średnia arytmetyczna z M wartości y_r

$$\hat{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad (7)$$

a niepewność standardowa wywodzi się z zależności

$$u^2(\hat{y}) = \frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \hat{y})^2 \quad (8)$$

Niech α oznacza każdą wartość pomiędzy zero i $1-p$, gdzie p jest wymaganym poziomem ufności. Punkty końcowe przedziału ufności $I_p(Y)$ dla wielkości wyjściowej są wartościami funkcji $G^{-1}(\alpha)$ i $G^{-1}(\alpha+p)$, tzn. są kwantylami rzędu α oraz $\alpha+p$ rozkładu opisanego dystrybuantą $G(\eta)$. Kwantyl rzędu β jest wartością zmiennej losowej, dla której $G(\eta) = \beta$. Przyjęcie $\alpha = 0,025$ daje przedział ufności $I_{0,95}(Y)$ określony przez kwantyle: 0,025 i 0,975, który jest probabilistycznie symetryczny. Oznacza to 2,5 % prawdopodobieństwo, że wartości wielkości wyjściowej będą mniejsze niż dolna granica przedziału i większe niż górna granica przedziału. Gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa $g(\eta)$ jest symetryczna wokół jej wartości oczekiwanej, wtedy przedział ufności $I_p(Y)$ jest symetryczny wokół estymaty wielkości wyjściowej, a jego granice równoodległe od estymaty. Wartość inna niż $\alpha = 0,025$ może być przyjęta, gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest asymetryczna. Wtedy przyjmuje się najkrótszy przedział ufności, ponieważ odpowiada on najlepszemu usytuowaniu wartości wielkości wyjściowej w granicach przyjętego prawdopodobieństwa. Jest on dany przez wartość α spełniającą równanie

$$g(G^{-1}(\alpha)) = g(G^{-1}(\alpha+p)) \quad (9)$$

lub kryterium minimum różnicy

$$G^{-1}(\alpha+p) - G^{-1}(\alpha) = \min \quad (10)$$

Jeżeli $g(\eta)$ jest symetryczna, to najkrótszym przedziałem $I_p(Y)$ jest przedział ufności, dla którego

$$\alpha = \frac{1-p}{2} \quad (11)$$

Przedział ufności $I_p(Y) = [y_{\text{low}}, y_{\text{high}}]$ odpowiadający poziomowi ufności p dla wielkości wyjściowej powinien być zapisywany z taką liczbą dziesiętnych, aby ostatnia znacząca cyfra odpowiadała pozycji cyfry znaczącej przy wyrażaniu niepewności standardowej. Przykładem może być zapis

$$I_{0,95}(Y) = [0,98, 1,09] \text{ V}$$

dla asymetrycznego rozkładu wielkości wyjściowej o parametrach: $y = 1.02 \text{ V}$, $u(y) = 0,03 \text{ V}$ i jednej cyfry znaczącej przy wyrażaniu niepewności standardowej, oraz przy dwóch cyfrach znaczących niepewności standardowej

$$I_{0,95}(Y) = [0,983, 1,088] \text{ V}$$

$$y = 1.024 \text{ V}, u(y) = 0,028 \text{ V}$$

Walidacja metod obliczeniowych przy użyciu symulacji Monte Carlo

Dokument podaje również praktyczny sposób walidacji metod obliczania niepewności rozszerzonej przy użyciu symulacji Monte Carlo. Zalecany sposób postępowania polega na dwóch działaniach

- zastosowanie sprawdzanej metody obliczeniowej w celu uzyskania przedziału ufności odpowiadającego poziomowi ufności 95 %: $y \pm U_{0,95}$
- zastosowanie symulacji Monte Carlo w celu otrzymania wartości niepewności standardowej $u(y)$ oraz granic y_{low} i y_{high} przedziału ufności odpowiadającego poziomowi ufności 95 %.

Następnie sprawdzamy, czy otrzymane przedziały ufności zgadzają się co do ustalonego stopnia przybliżenia. Stopień zgodności jest oceniany w odniesieniu do granic przedziału i odpowiadającej mu niepewności standardowej co do cyfr znaczących. Wyrażamy wartość $u(y)$ w formie zapisu $a \times 10^r$, gdzie a jest mantysą, a r wykładnikiem. Błąd walidacji wyraża zależność

$$\delta = \frac{1}{2} 10^r \quad (12)$$

Porównujemy przedziały ufności otrzymane obiema metodami, określając wartości

$$|y - U_{0,95} - y_{low}| \quad (13) \quad |y + U_{0,95} - y_{high}| \quad (14)$$

Jeżeli wartości te nie są większe niż δ , to można uznać metodę obliczeniową za zwalidowaną.

Podsumowanie

Przedstawiony projekt dokumentu [2] jest ważnym wydarzeniem dla metrologii w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Rozstrzyga bowiem kwestię sposobu przyjmowania rozkładu dla wartości wielkości mierzonej. Projekt formułuje zasadę propagacji rozkładów jako podstawę obliczania niepewności pomiaru, a wraz z nią koncepcję wyznaczania przedziału ufności, jako miary niepewności, odpowiadającego poziomowi ufności 95 %. Jest to nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru, gdyż „Przewodnik” [1] nie zalecał ścisłego powiązania niepewności rozszerzonej z określonym poziomem ufności i nie postulował wyznaczania rozkładu dla wielkości mierzonej na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Dokument proponuje również, aby symulacja Monte Carlo była walidującą dla innych metod obliczeniowych niepewności pomiaru, przede wszystkim związanych z prawem propagacji niepewności.

Bibliografia

- Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Wydawnictwo GUM, 1999.
- Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions – dokument opracowany przez Joint Committee for Guides in Metrology (Working Group 1). ■

TURCK

Industrial
Automation



Zapraszamy
na naszą
stronę
internetową:
www.turck.pl

Inteligentne czujniki temperaturowe firmy TURCK

Najwyższa dokładność

Dokładność rzędu 0,2 K umożliwia szerokie spektrum zastosowań, przy wykorzystaniu niewielkiej liczby wariantów zakresowych

Najwyższy komfort obsługi

Dwa przyciski do szybkiego poruszania się po menu oraz dodatkowy przycisk do pewnego zapamiętania nastawionych wartości

Najwyższa elastyczność montażowa

- Górna część czujnika obrotowa w zakresie 320°
- Wskazanie na wyświetlaczu obracane o 180°
- Wyświetlacz umieszczony na ukośniku 45°
- Szeroki wybór sond pomiarowych

Najwyższe bezpieczeństwo instalacji

Mocny design z obudową ze stali nierdzewnej, wysoka kompatybilność elektromagnetyczna EMV oraz stopień ochrony IP67

TURCK

Wasza satysfakcja to nasz sukces !

TURCK sp. z o. o.
ul. Żeromskiego 1, 45-053 Opole
tel. 77 443 48 00, fax 77 443 48 01
e-mail: turck@turck.pl, internet: www.turck.pl

