

Ocena dokładności metod obliczania wartości skutecznych prądu ruszającego silnika klatkowego

Bogusław Karolewski
Piotr Uracz

Artykuł stanowi kontynuację rozważań przedstawionych w [4]. Do analizy wybrano dwie spośród metod tam przedstawionych. Sygnały testujące odwzorowywały poszczególne rodzaje odkształceń występujących w prądzie rozruchowym silnika. Metody oceniano pod kątem możliwości dołączenia odpowiednich algorytmów do obwodowego modelu silnika.

Metody wyznaczania wartości skutecznych prądu

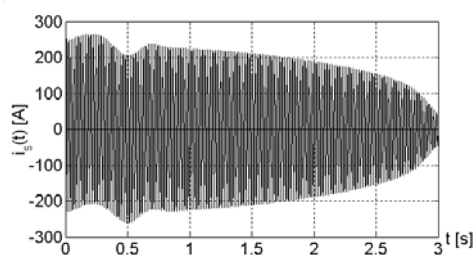
Badano metody wyznaczania wartości skutecznych (r.m.s.) prądów stojana silnika indukcyjnego, których wartości chwilowe uzyskuje się obliczeniowo z wykorzystaniem modelu obwodowego maszyny [2, 6]. Do analizy wybrano dwie spośród metod przedstawionych w [4]:

- I oznacza metodę opartą na definicji wartości skutecznej – jako pierwiastka z ilorazu sumy kwadratów próbek prądu przez liczbę próbek – z założeniem, że wartość częstotliwości prądu jest stała (w [4] nazywaną metodą 2),
- II oznacza metodę opartą na tej samej definicji, ale z uwzględnieniem wahań chwilowej częstotliwości prądu związanych m.in. ze zmianami współczynnika mocy w końcowej fazie rozruchu silnika, przy przyjęciu pełnookresowego okna pomiarowego (w [4] nazywaną metodą 3 w wariacie z oknem o szerokości okresu).

Przebieg chwilowych wartości prądu

Przykładowy przebieg wartości chwilowych prądu obliczony z zastosowaniem modelu obwodowego przedstawia rys. 1. Symulację wykonano dla silnika klatkowego głębokożłobkowego o mocy 320 kW i napięciu znamionowym 6 kV w środowisku MATLAB.

Przebieg prądu jest odkształcony od sinusoidalnego. Odkształcenia podzielono w [4] na trzy kategorie: zmiany amplitudy harmonicznej podstawowej, składową zmienną o niskiej częstotliwości oraz zmiany częstotliwości chwilowej.



Rys. 1. Symulowany przebieg prądu rozruchowego jednej z faz stojana silnika

Funkcje testujące

Do oceny wpływu zniekształceń na właściwości badanych metod obliczania wartości skutecznych, utworzono funkcje wzorcowe o znanych przebiegach wartości skutecznych, odwzorowujące poszczególne kategorie odkształceń.

Funkcja 1

Zmiany amplitudy harmonicznej podstawowej odwzorowano, wykorzystując funkcję o następującej postaci:

$$f_1(t) = A_1(t) \cdot g_1(t) \quad (1)$$

$$A_1(t) = a_1 \cdot \exp\left(\frac{\alpha_1}{|\beta_1 - t|}\right) + b_1$$

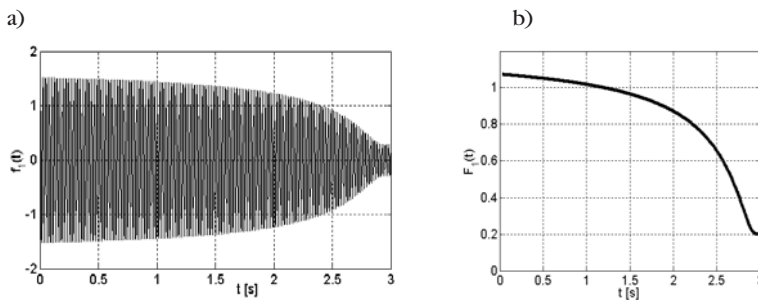
$$g_1(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$$

gdzie:

- α_1 – stała czasowa zmniejszania się prądu,
- β_1 – planowany czas rozruchu,
- a_1 – wartość początkowa amplitudy składowej zmiennej,
- b_1 – wartość ustalona amplitudy składowej zmiennej,
- ω – pulsacja przebiegu.

Stosunek amplitudy przebiegu sinusoidalnego do jego wartości skutecznej (czyli współczynnik szczytu) wynosi $\sqrt{2}$. Wartość skuteczna funkcji $g_1(t)$ jest równa 1. Wobec tego wartość skuteczna funkcji $f_1(t)$ w chwili t jest równa wartości funkcji $A_1(t)$ w tej

dr hab. inż. Bogusław Karolewski – Politechnika Wrocławska, Instytut Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych
mgr inż. Piotr Uracz, doktorant w ww. Instytucie



Rys. 2. Przebieg: a) funkcji testującej $f_1(t)$; b) wartości skutecznych tej funkcji

samej chwili. Wartości współczynników dobrano tak, aby przebieg przypominał odwzorowywane składowe prądu z rys. 1: $\alpha_1 = -0,4$; $\beta_1 = 3$; $a_1 = 1$; $b_1 = 0,2$; $\omega = 100\pi$. Tę samą zasadę stosowano przy doborze wartości współczynników następných funkcji testujących.

Ponieważ wartość skuteczna jest wyznaczana z opóźnieniem (tzn. na końcu okresu, a nie w jego połowie), przebieg funkcji wzorcowej opóźniono względem $A_1(t)$ o pół okresu funkcji $g_1(t)$, czyli o 0,01 s dla podanych współczynników. Uwaga ta dotyczy także kolejnych funkcji.

Jak widać na rys. 2a, sygnał testujący ma kształt zbliżony do przebiegu prądu silnika. Jednak przebieg f_1 nie zawiera składowej przejściowej, a jego okres jest stały. Wartości skuteczne funkcji f_1 , oznaczone F_1 , przedstawiono na rys. 2b.

Funkcja 2

Drugi sygnał próbny służy do określenia wpływu składowej przejściowej na dokładność wyznaczania wartości skutecznych. Funkcja testująca ma postać:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= A_2(t) \cdot g_{21}(t) + g_{22}(t) \\ A_2(t) &= a_2 \cdot \exp(\alpha_2 t) \\ g_{21}(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(\omega(t + \beta_2)) \\ g_{22}(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

Wartości skuteczne pierwszego składnika sumy wchodzącej w skład funkcji $f_2(t)$ można obliczać identycznie jak dla funkcji 1. Natomiast cała funkcja f_2 jest przebiegiem odkształconym. Wartość skuteczna prądu odkształconego jest równa pierwiastkowi kwadrato-

wemu z sumy kwadratów składowej stałej i wartości skutecznych poszczególnych harmonicznych, bez względu na ich fazy początkowe [1, 5]:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + \dots} \quad (3)$$

Zatem wartości skuteczne funkcji $f_2(t)$ można obliczyć ze wzoru:

$$F_2(t) = \sqrt{A_2(t)^2 + 1} \quad (4)$$

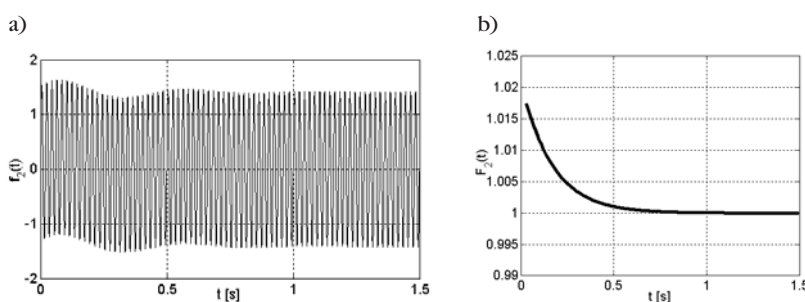
Przebieg funkcji f_2 przedstawia rys. 3a, zaś jej wartości skutecznych – rys. 3b. Założono następujące wartości współczynników liczbowych: $\alpha_2 = -3$; $\beta_2 = 0,03$; $a_2 = 0,2$; $\omega = 4\pi$; $k = 25$.

Funkcja 3

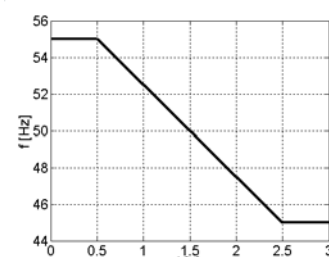
Kolejnym zadaniem jest zbadanie wpływu niewielkich zmian częstotliwości przebiegu na dokładność wyznaczenia wartości skutecznych obu rozpatrywanymi metodami. Częstotliwość chwilowa prądu stojana w silniku indukcyjnym jest zmienna [3]. Występują chwilowe wahania okresu związane m.in. ze zmianą kąta fazowego. Zmiany częstotliwości w rozpatrywanym przebiegu wahają się w przedziale ± 3 Hz. Do odwzorowania tych zmian utworzono funkcję o postaci:

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi_3(t)) \\ \psi_3(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 0,5 \\ a_3 \pi (t - 0,5)^2 & t \in (0,5; 2,5] \\ 4a_3 \pi (t - 2,5) + 4a_3 \pi & t > 2,5 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Częstotliwość funkcji f_3 zmienia się liniowo w przedziale czasu od 0,5 s do 2,5 s z prędkością a Hz/s. Po upływie 2,5 s częstotliwość ustala się na osiągniętym poziomie (rys. 4). Przebieg zmian częstotliwości funkcji f_3 przedstawiono na rys. 4. Wartość skuteczna tej funkcji w każdej chwili równa się 1, dlatego wykres przebiegu F_3 nie zamieszczono. Badania wykonano dla wartości współczynników funkcji: $a_3 = -5$; $\omega = 110\pi$.



Rys. 3. Przebieg: a) funkcji testującej $f_2(t)$; b) wartości skutecznych tej funkcji



Rys. 4. Zmiany częstotliwości funkcji testującej $f_3(t)$

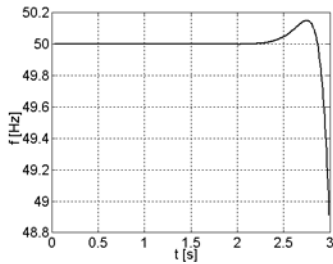
Funkcja 4, sumaryczna

Ostatnia z funkcji zawiera wszystkie rodzaje odkształceń charakterystyczne dla przebiegu prądu stojana. Funkcja ta ma postać:

$$\begin{aligned}
 f_4(t) &= A_{41}(t) \cdot g_{41}(t) + A_{42}(t) \cdot g_{42}(t) + A_{43}(t) \cdot g_{43}(t) \\
 A_{41}(t) &= a_1 \cdot \exp\left(\frac{\alpha_1}{|\beta_1 - t|}\right) + b_1 \\
 g_{41}(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(k_1 \omega t + \psi_4(t)) \\
 \psi_4(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ a_4 \exp(\alpha_4 t) [b_4 \cos(\beta_4 t) + c_4 \sin(\beta_4 t)] & t > 2 \end{cases} \\
 A_{42}(t) &= a_2 \cdot \exp(\alpha_2 t) \\
 g_{42}(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(k_2 \omega (t - \beta_2)) \\
 A_{43}(t) &= a_3 \cdot \exp(\alpha_3 t) \\
 g_{43}(t) &= \sqrt{2} \cdot \sin(\omega (t - \beta_3)) \quad (6)
 \end{aligned}$$

Funkcja jest złożona z trzech harmonicznnych, których przebiegi wartości skutecznych są opisane za pomocą odpowiednich członów $A_{4i}(t)$. Zatem wartości skuteczne funkcji testującej można obliczyć z zależności:

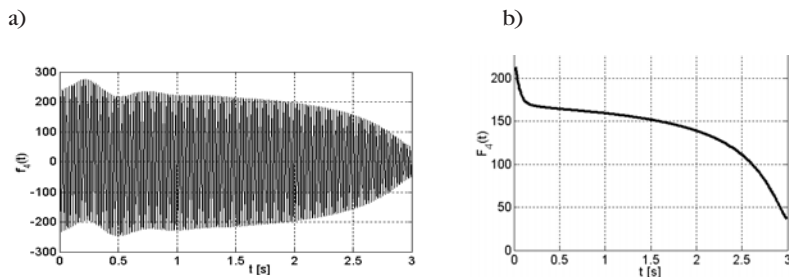
$$F_4(t) = \sqrt{A_{41}(t)^2 + A_{42}(t)^2 + A_{43}(t)^2} \quad (7)$$



Rys. 5. Przebieg zmian częstotliwości funkcji $g_{41}(t)$

Dodatkowo faza funkcji $g_{41}(t)$ jest zmieniana przez $\psi_4(t)$ (rys. 5), co symuluje zmiany kąta przesunięcia fazowego w czasie rozruchu silnika. Badania wykonano, przyjmując współczynniki: $a_1 = 155$; $\alpha_1 = -0,4$; $\beta_1 = 3,1$; $b_1 = 0,2a_1$; $k_1 = 50$; $a_4 = 2\pi \times 10^{-3}$; $\alpha_4 = 8$; $b_4 = -1,20 \times 10^{-8}$; $\beta_4 = \pi/0,88$; $c_4 = 4,78 \times 10^{-9}$; $a_2 = 0,3a_1$; $\alpha_2 = -3$; $k_2 = 2$; $\beta_2 = 0,15$; $a_3 = 3a_2$; $\alpha_3 = -12$; $\beta_3 = -0,05$; $\omega = 2\pi$.

Kształt funkcji f_4 (rys. 6a) dość ściśle odwzorowuje przebieg prądu z rys. 1. Zastosowanie tej funkcji pozwala zatem ocenić jaki będzie poziom dokładności



Rys. 6. Przebieg: a) funkcji testującej $f_4(t)$; b) wartości skutecznych tej funkcji

wyznaczania wartości skutecznych badanymi metodami w odniesieniu do przebiegu prądu otrzymanego z symulacji. Przebieg wartości skutecznych sygnału f_4 przedstawiono na rys. 6b.

Wyniki testów

We wszystkich testach zastosowano krok obliczeń $T_p = 4 \times 10^{-4}$ s. Błąd względny wyznaczania wartości skutecznych obliczono z zależności:

$$\delta(t) = \frac{F(t) - F_{rz}(t)}{F_{rz}(t)} \cdot 100\% \quad (8)$$

gdzie: $F(t)$ - wartości skuteczne wyznaczone metodą I lub II, $F_{rz}(t)$ - wartości skuteczne obliczone dla funkcji uznanej za wzorcową.

Na kolejnych rysunkach przedstawiono wyniki badań.

Rys. 7 przedstawia błąd względny obliczeń wartości skutecznych funkcji $f_1(t)$ metodą I i II.

Rys. 8 dotyczy funkcji f_2 , rys. 9 - funkcji f_3 , a rys. 10 - funkcji f_4 .

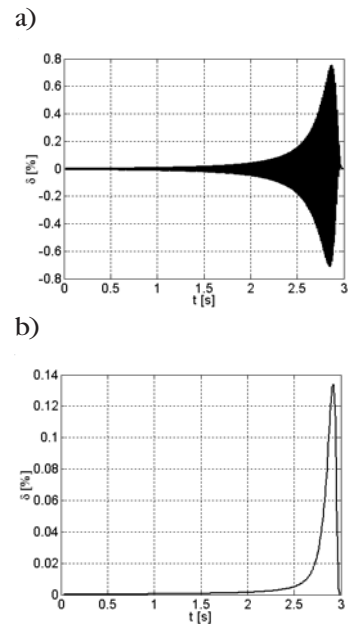
Przy zmianach amplitudy funkcji metoda I generuje błąd oscylujący wokół wartości rzeczywistej, o amplitudzie proporcjonalnej do szybkości zmian przebiegu. Wartość tego błędu osiąga prawie 0,8 % (rys. 7a). W przypadku metody II (z wykrywaniem długości okresu) błąd ma stały znak (rys. 7b).

Widoczny jest wzrost wartości błędu wraz ze zwiększaniem się szybkości zmian funkcji badanej, ale jego wartość maksymalna nie przekroczyła 0,14 %.

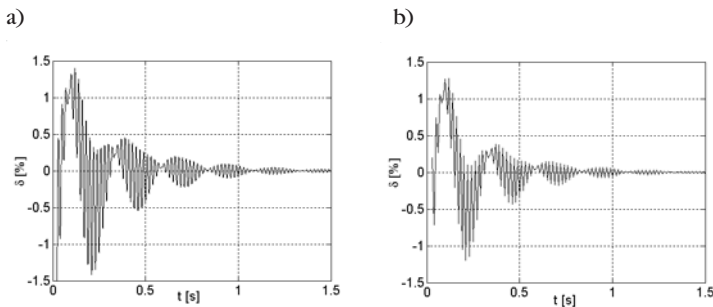
Kolejne testy obrazują wpływ składowej przejściowej na dokładność obliczeń (rys. 8). Błędy są podobnego rzędu, choć dla metody II minimalnie mniejsze.

Wartość błędu jest proporcjonalna do stosunku amplitud składowej przejściowej do ustalonej, a jego przebieg odpowiada w przybliżeniu przebiegowi funkcji symulującej składową przejściową.

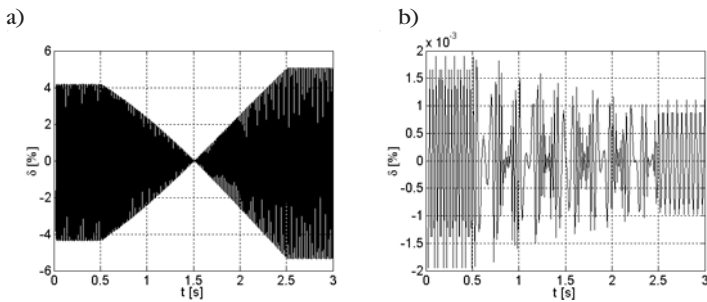
Wyniki uzyskane w teście trzecim (rys. 9) wyraźnie wskazują metodę II jako bardziej dokładną. Na rys. 9a widoczny jest duży wpływ założenia o stałości częstotliwości przebiegu



Rys. 7. Przebiegi błędu względnego obliczania wartości skutecznych wyznaczone dla funkcji $f_1(t)$: a) metodą I, b) metodą II



Rys. 8. Przebiegi błędów względnego obliczania wartości skutecznych wyznaczone dla funkcji $f_2(t)$: a) metodą I, b) metodą II



Rys. 9. Przebiegi błędów względnego obliczania wartości skutecznych wyznaczone dla funkcji $f_3(t)$: a) metodą I, b) metodą II

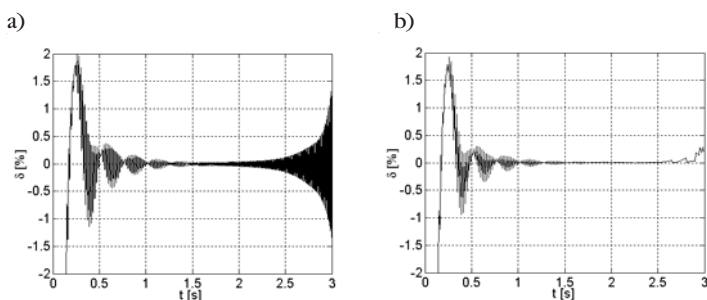
na wyniki uzyskiwane metodą I. Zmiany częstotliwości powodują generowanie znaczącego błędów, który osiąga 5 % i oscyluje wokół wartości poprawnej. Błąd dla metody II jest o trzy rzędy mniejszy (rys. 9b).

Przy okazji przeprowadzono wstępne testy sprawdzające możliwość wykorzystania metody II do wyznaczania wartości skutecznych przebiegu prądu wirnika, którego częstotliwość zmienia się w dużym zakresie. Metoda zachowuje zadowalającą dokładność w zakresie częstotliwości od 50 do 10 Hz.

Ostatnia porcja testów pozwala na określenie błędów obu metod w odniesieniu do przykładowego przebiegu symulującego zmiany prądu rozruchowego silnika. Uzyskane błędy przedstawiono na rys. 10. W początkowej fazie przebiegu f_4 oba algorytmy dają podobne wyniki, błędy krótkotrwale przekraczają 2 %. Kiedy amplituda przebiegu zaczyna się szybciej zmieniać błąd metody I rośnie pod wpływem występujących wtedy wahań częstotliwości. Jednak wbrew oczekiwaniom jego wartość nadal nie przekracza 2 %.

Podsumowanie

Przeprowadzone testy pozwalają ocenić wpływ założeń upraszczających na dokładność badanych metod wyznaczania wartości



Rys. 10. Przebiegi błędów względnego obliczania wartości skutecznych wyznaczone dla funkcji $f_4(t)$: a) metodą I, b) metodą II

skutecznych prądów. Z badań wynika, że obie metody nadają się do współpracy z obwodowym modelem silnika indukcyjnego. Zaletą metody I jest prostsza postać algorytmu obliczeniowego. Jednak przy występowaniu szybkich i dużych zmian prądu – np. przy analizowaniu rozruchu nieobciążonego silnika na biegu jałowym – uzasadnione wydaje się stosowanie metody II, która powinna zapewnić większą dokładność wyznaczania wartości skutecznych prądu.

Błędy występujące w chwili rozpoczynania obliczeń można ograniczyć, przyjmując odpowiednie wartości wstępne przewidywanego prądu. A zatem błędy wyznaczania wartości skutecznych przebiegu prądu z rys. 1 dla obu metod nie powinny przekroczyć 2 %. Bliższe określenie wartości spodziewanych błędów wymaga kontynuowania badań dla różnych przypadków pracy i mocy silników.

Do wyznaczania wartości skutecznych napięcia zasilającego silnik można z powodzeniem zastosować obie metody, ponieważ przebieg napięcia charakteryzuje się o wiele mniejszą zmiennością amplitudy i praktycznie stałą częstotliwością.

Przy stosowaniu metody I ważne jest, aby na okres przebiegu przypadła całkowita liczba próbek. Należy zatem pamiętać o dobraniu odpowiedniego kroku obliczeń. Na przykład, obliczenia wartości skutecznych przebiegu o stałej częstotliwości i amplitudzie metodą I przy kroku $T_p = 6 \times 10^{-4}$ s są obciążone błędem o przebiegu oscylującym wokół wartości poprawnej z amplitudą około 0,5 %. Powodem tak dużego błędów jest niecałkowita liczba próbek przypadająca na okres przebiegu. II metoda wykazuje pod tym względem o wiele większą odporność (błąd nie przekroczył 0,01 %).

Bibliografia

1. J. Bolikowski, L. Czarnecki, M. Miłek, *Pomiary wartości skutecznej i mocy w obwodach o przebiegach niesinusoidalnych*, PWN, Warszawa 1990.
2. B. Karolewski, *Rozwiązywanie modeli obwodowych symetrycznych silników indukcyjnych*. Przegląd Elektrotechniczny 11/2002.
3. B. Karolewski, *Wyznaczanie częstotliwości prądu wirnika silnika klatkowego*. PAR 10/2003, s. 17–23.
4. B. Karolewski, P. Urać, *Obliczanie wartości skutecznych prądu ruszającego silnika indukcyjnego*, PAR 12/2005, s. 20–23.
5. R. Kurdziel, *Podstawy elektrotechniki*, WNT, Warszawa 1972.
6. W. Paszek, *Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego*, Wyd. Helion, Warszawa 1998. ■