Uproszczony regulator liniowo-kwadratowy w sterowaniu ramową suwnicą 3D

Mariusz Pauluk

Przedstawiono dwa sposoby sterowania suwnicą. Wyniki eksperymentalne potwierdzają możliwość praktycznego zastosowania uproszczonej wersji regulatora liniowo-kwadratowego LQ (Linear Quadratic).

Istotnym czynnikiem spowalniającym transportowanie dźwigiem ładunku są jego oscylacje. Naturalnym źródłem tych oscylacji są zmiany prędkości przenoszonego ładunku, ale mogą to być także czynniki zewnętrzne: np. silny wiatr, czy też niestabilne podłoże gdy dźwig stanowi wyposażenie jednostki pływającej. W związku z tym bardzo pożądane jest opracowanie algorytmu wspomagającego operatora w minimalizowaniu wahań ładunku [4]. Szczególnie istotne jest tu zagadnienie odpowiedniego reagowania na zakłócenia spowodowane przez czynniki zewnętrzne, które w odróżnieniu od naturalnych przyczyn, są nieprzewidywalne i zminimalizowanie ich wpływu jest dużo bardziej kłopotliwe.

Przedstawiony regulator rozwiązuje problemu optymalnego nadążania za zadaną trajektorią. Wszelkie odstępstwa od trajektorii pożądanej powinny być niwelowane w sposób optymalny, określony wskaźnikiem jakości *S*. Mechanizm nadążania za zadaną trajektorią zapewnia odporność algorytmu nie tylko na zakłócenia, ale również na niedokładności modelowania układu sterowania [2].

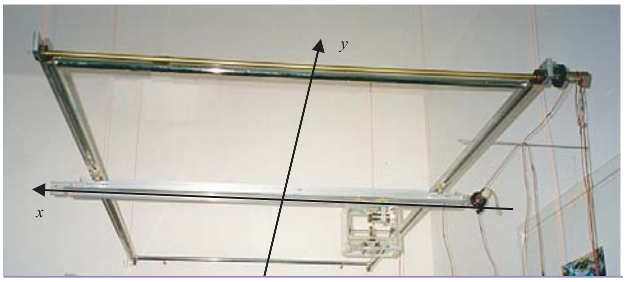
Regulator liniowo-kwadratowy rozwiązuje problem optymalnego sterowania dla układów liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości [1, 6, 8]. Nie można go zaprojektować bezpośrednio na podstawie równań nieliniowych. W konstrukcji zastosowano więc model zlinearyzowany wokół trajektorii $\bar{x}(t)$ i sterowania $\bar{u}(t)$, który opisuje obiekt sterowany liniowymi równaniami różniczkowymi. Równania zlinearyzowane są słuszne w dostatecznie bliskim otoczeniu punktu linearyzacji. Dlatego regulator zaprojektowany na podstawie tych równań funkcjonuje zgodnie z założeniami dla dostatecznie małych wartości uchybu trajektorii stanu i sterowania [2]. W artykule zostaną przedstawione dwie propozycje algorytmów sterujących modelem laboratoryjnym suwnicy. Pierwszy algorytm jest dokładną realizacją regulatora liniowo-kwadratowego zaprojektowanego na podstawie rozwiązania równań Riccatiego dla skończonego czasu sterowania. Drugi, uproszczony regulator skonstruowano na podstawie rozwiązania problemu liniowo-kwadratowego dla nieskończonego czasu sterowania.

dr inż. Mariusz Pauluk – Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Model laboratoryjny

W badaniach wykorzystano model laboratoryjny ramowej suwnicy, zbudowany w Katedrze Automatyki AGH (rys. 1). Suwnica ma szerokość 1,5 m i długość 2,5 m.

Wózek z podwieszonym ładunkiem może przemieszczać się w płaszczyźnie poziomej, wzdłuż kierunków x i y, a także może podnosić lub opuszczać ładunek wzdłuż kierunku z.



Rys. 1. Suwnica laboratoryjna

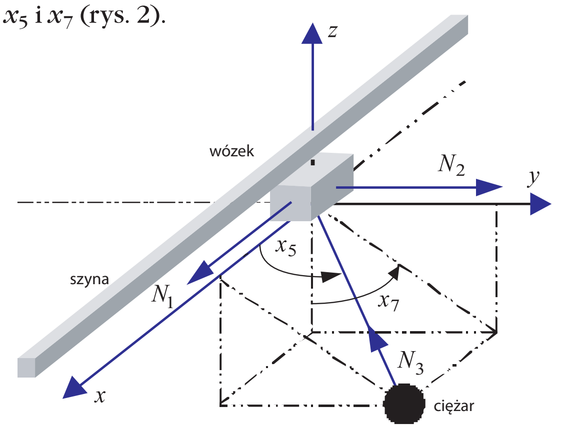
Sterowanie suwnicą odbywa się w czasie rzeczywistym w środowisku MATLAB-Simulink. Komputer ma kartę pomiarowo-sterującą RT-DAC, która pośredniczy w wymianie danych pomiędzy obiektem sterowanym a regulatorem. Napęd suwnicy realizują trzy silniki prądu stałego wyposażone w przekładnie. Podłączone do silników wały z przekładniami zamieniają ruch obrotowy na posuwisty. Na wałach są zamieszczone czujniki mierzące kąt obrotu wału. Dwa dodatkowe czujniki kąta obrotu są umieszczone w mechanizmie wózka. Mierzą one kąty odchylenia liny od pionu w dwóch płaszczyznach.

Zbudowany model laboratoryjny nie jest kopią istniejącego obiektu przemysłowego. Intencją autora nie było skonstruowanie urządzenia do analizy zachowania konkretnej suwnicy, tylko stworzenie narzędzia do badania zjawisk zachodzących w instalacjach przenoszących ładunki podwieszone na linie. Charakter tych zjawisk jest podobny zarówno w dźwigach portowych, suwnicach ramowych, jak i obrotowych. Zaprezentowany model laboratoryjny pozwala ocenić ilościowo i jakościowo mechanizmy zachodzące w dźwigach, a także ułatwia ocenę algorytmów sterujących, w szczególności pod kątem ich ewentualnego wykorzystania w praktyce.

Pełny model matematyczny suwnicy ramowej

Zaprezentowane w skróconej formie modele matematyczne suwnicy ramowej są w pełni wystarczające, aby porównać i ocenić stopień złożoności przedstawionych algorytmów. Szczegółowa analiza dynamiki suwnicy znajduje się np. w [11].

Założono, że suwnica przemieszcza ładunek w płaszczyźnie kartezjańskiej xy, oraz podnosi lub opuszcza podwieszony ładunek wzdłuż kierunku z, prostopadłego do xy. Sterowanie suwnicą odbywa się oddzielnie wzdłuż kierunków osi: x, y i z. Są to sterowania oznaczone: u_1, u_2 i u_3. Położenie wózka w płaszczyźnie xy określają odpowiednio zmienne: x_1 i x_3, a odchylenia kątowe zawieszonego ładunku – zmienne stanu: x_5 i x_7 (rys. 2).



Rys. 2. Przyjęte oznaczenia

$$N_1 = u_1 - k_1 x_2 \tag{1}$$

$$N_2 = u_2 - k_2 x_4 \tag{2}$$

$$N_3 = u_3 + k_3 x_{10} \tag{3}$$

Następujący układ dziesięciu nieliniowych równań różniczkowych opisuje zachowanie suwnicy:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_2 = N_1 + \mu_1 c_5 N_3 && \dot{x}_1 = x_2\\
&\dot{x}_4 = N_2 + \mu_2 s_5 s_7 N_3 && \dot{x}_3 = x_4\\
&\dot{x}_6 = (s_5 N_1 - c_5 s_7 N_2 + (\mu_1 - \mu_2 s_7^2) c_5 s_5 N_3 + V_5)/x_9 && \dot{x}_5 = x_6\\
&\dot{x}_8 = -(c_7 N_2 + \mu_2 s_5 c_7 s_7 N_3 + V_6)/(s_5 x_9) && \dot{x}_7 = x_8\\
&\dot{x}_{10} = -c_5 N_1 - s_5 s_7 N_2 - (1 + \mu_1 c_5^2 + \mu_2 s_5^2 s_7^2) N_3 + V_7 && \dot{x}_9 = x_{10}
\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $s_n \equiv \sin(x_n)$, $c_n \equiv \cos(x_n)$,
μ_1 i μ_2 są współczynnikami skalującymi, określonymi przez masy: szyny, wózka i ładunku, a V_5, V_6 i V_7 określają nieliniowe funkcje trygonometryczne

$$V_5 = c_5 s_5 X_8^2 X_9 - 2 X_{10} X_6 + g c_5 c_7$$

$$V_6 = 2 X_8 (c_5 X_6 X_9 + s_5 X_{10}) + g s_7$$

$$V_7 = s_5^2 X_8^2 X_9 + g s_5 c_7 + X_6^2 X_9$$

W artykule autor posługuje się przemiennie pojęciami: sterowanie u lub siły sterujące F. Pod względem jakościowym oba pojęcia określają tę samą wielkość. Dla osiągnięcia większej prostoty równań przeskalowano je. Współczynnikami skalującymi i tym samym określającymi zależność pomiędzy u i F są μ_1 i μ_2.

Trajektoria i sterowanie odniesienia

Zadaniem regulatora LQ jest korygowanie w sposób optymalny odchyleń od zadanej trajektorii. Zatem, w pierwszym etapie konstruowania algorytmu sterującego suwnicą należy dysponować parą odniesienia $\{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$. Gdzie $\bar{x}(t) \in \mathrm{IR}^{10}$ jest trajektorią odniesienia, a $\bar{u}(t) \in \mathrm{IR}^3$ odpowiadającym jej sterowaniem.

Układ równań (4) pozwala w naturalny sposób wyliczyć trajektorię systemu $x(t)$ dla znanego sterowania $u(t)$. Jednakże w praktycznych aplikacjach projektant musi zmierzyć się z odwrotnym problemem, tzn. zadana jest trajektoria systemu (lub kilka jej składowych), a nieznane jest sterowanie.

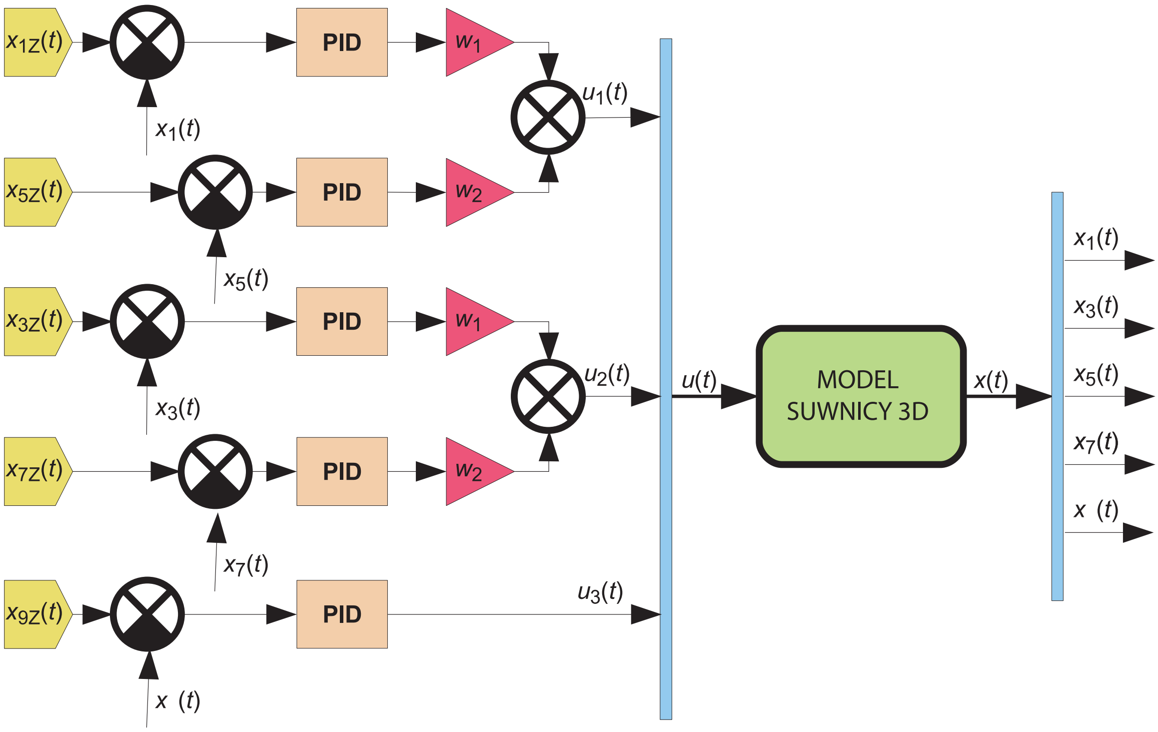
Załóżmy, że należy znaleźć sterowanie, które realizuje następujące zadanie: suwnica powinna przenieść ładunek z punktu A o współrzędnych (x_A, y_A, z_A) do punktu B (x_B, y_B, z_B) w czasie T, ładunek powinien się przemieszczać, wisząc pionowo, bez wahnięć. Na podstawie informacji z pierwszej części zadania można w prosty sposób określić zmienne stanu: x_1, x_2, x_3, x_4, x_9 i x_{10}, a warunek prostopadłego transportu ładunku (zgodnie z rys. 2) odpowiada następującym wartościom pozostałych zmiennych stanu: $x_5 = \pi/2$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ i $x_8 = 0$. Pozostaje więc określenie sterowania.

W automatyce często stosowanym sposobem rozwiązania tego typu problemu jest przekształcenie odwrotne równań opisujących dynamikę systemu i wyliczenie wektora sterowania dla zadanego wektora stanu. Łatwo jednakże zauważyć, że dla tak zadanego wektora $\bar{x}(t)$ jak powyżej, nie istnieje sterowanie $\bar{u}(t)$ spełniające układ równań (4). Z powodu więzów fizycznych łączących model wózka i podwieszonego do niego ładunku, każda zmiana prędkości wózka spowoduje odchylenie ładunku od pionu. Co więcej, zadawanie poszczególnych składowych wektora stanu bez uwzględnienia powiązań zgodnie z (4), zawsze będzie prowadziło do braku rozwiązania. Dodatkowym utrudnieniem przy określaniu realizowalnej trajektorii jest fakt, że liczba stopni swobody suwnicy 3D jest większa od rzędu wektora $u(t)$. Tak więc, intuicyjne określenie takiej trajektorii, dla której istnieje sterowanie (trajektorii realizowalnej) jest praktycznie niemożliwe.

Na rys. 3 przedstawiono schemat blokowy regulatora wyliczającego sterowanie $u(t)$ dla trajektorii $x(t)$ zbliżonej do trajektorii zadanej $x_Z(t)$.

Idea algorytmu polega na objęciu oddzielnym układem regulacji (np. typu PID) każdej składowej trajektorii zadanej $x_Z(t)$ [7]. W wyniku działania układów regulacji otrzymuje się trajektorię zbliżoną do zadanej oraz odpowiadające jej sterowanie, które jest wyliczane przez regulatory. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi wyżej, otrzymana w ten sposób para ($\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$) nigdy nie będzie całkowicie zgodna z trajektorią pożądaną $x_Z(t)$, ale (w zależności od nastaw regulatorów) w dużym stopniu zbliżona do niej.

Składowa wektora sterowania: $u_1(t)$ ma bezpośredni wpływ na dwie składowe wektora stanu: położenie wózka wzdłuż kierunku osi x – $x_1(t)$ oraz odchylenie ładunku – kąt $x_5(t)$, analogicznie $u_2(t)$ ma bezpośredni



Rys. 3. Schemat blokowy algorytmu wyliczającego numerycznie parę (x(t), u(t))

wpływ na położenie x_3(t) oraz kąt $x_7(t)$. Zadania: sterowanie położeniem wózka i tłumienie odchyleń ładunku są sprzeczne. Dlatego w algorytmie uwzględniono wagi (rys. 3) w_1 i w_2, które służą do określenia, za którą zmienną: odchyleniem ładunku czy położeniem wózka układ regulacji ma „silniej" nadążać.

Optymalny regulator LQ

Zapiszmy równania stanu suwnicy w postaci:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t\in[0, T],\ \ x(t)\in IR^{10},\ u(t)\in IR^3$ (5)

Stan początkowy określony jest przez $x(0)=x_0$.

Określone są również trajektoria i sterowanie odniesienia, np. za pomocą algorytmu przedstawionego wyżej:

$\bar{x}$: $[0, T] \rightarrow IR^{10}$, $\bar{u}$:$[0, T] \rightarrow IR^3$,

tak że obydwa wektory odniesienia spełniają równania (4). Przez odchyłki stanu i sterowania będziemy rozumieć

$\Delta x = x - \bar{x},\ \ \Delta u = u - \bar{u}$

System zlinearyzowany w punkcie odniesienia przedstawia się następująco

$\Delta\dot{x}(t) = A(t)\,\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t),\ t\in[0, T],$

gdzie

$$A(t)=\frac{\partial f(\bar{x}(t),\bar{u}(t))}{\partial x(t)}$$

$$B(t)=\frac{\partial f(\bar{x}(t),\bar{u}(t))}{\partial u(t)}$$

Neutralizacje niepożądanych właściwości trajektorii odniesienia $\bar{x}(t)$ (np. nadmiernych oscylacji ładunku) można osiągnąć dzięki odpowiedniej modyfikacji kwadratowego wskaźnika jakości [8]. Będziemy rozważać wskaźnik jakości następującej postaci:

$$S(\Delta u) = y(T)^T P y(T) + \int_0^T \left(y(t)^T Q y(t) + \Delta u(t)^T V \Delta u(t)\right) dt \qquad (6)$$

$$y(t) = \Delta x(t) - z(t) \qquad (7)$$

gdzie $z(t)$ jest zadaną taką funkcją, że $\bar{x}(t)+z(t)$ jest pożądanym przebiegiem trajektorii stanu. Dla tak zdefiniowanego wskaźnika jakości istnieje możliwość skorygowania trajektorii odniesienia poprzez poprawkę $z(t)$. Zakładamy $P=P^T\geq 0,\ Q=Q^T\geq 0,\ \ V=V^T\geq 0$.

W [8] udowodniono dwa poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1. Istnieje dokładnie jedno sterowanie optymalne $\Delta u^* \in L^2(0, T; IR^3)$, minimalizujące wskaźnik jakości (6) na trajektoriach systemu.

Twierdzenie 2. Sterowanie optymalne $\Delta u^*(t)$ i odpowiednia trajektoria optymalna stanu $\Delta x^*(t)$ spełniają związek

$$\Delta u^*(t) = -V^{-1}\,B(t)^T(K(t)\,\Delta x^*(t) + k(t)),\ t\in[0, T] \qquad (8)$$

$K(t)$ jest symetryczną, dodatnio półokreśloną macierzą 10×10 będącą rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$\dot{K} = KBV^{-1}B^TK - KA - A^TK - Q,\ \ t\in[0, T] \qquad (9)$$

z warunkiem końcowym $K(T) = P$.

Funkcja wektorowa $k(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

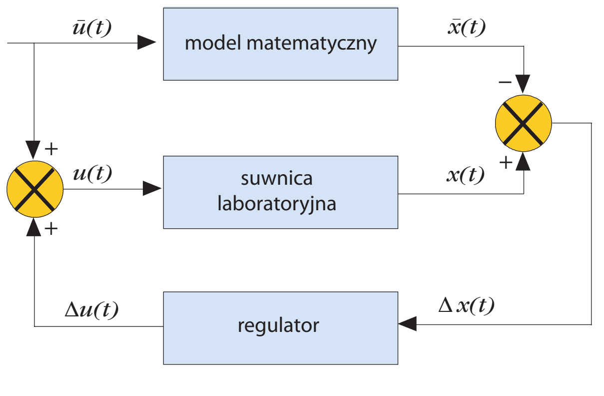
$$\dot{k} = (KBV^{-1}B^T - A^T)k + Qz,\ \ \ t\in[0, T] \qquad (10)$$

z warunkiem końcowym $k(T) = -Pz(T)$.

Wskaźnik jakości (6) jest tak sformułowany, że osiąga wartość minimalną równą zeru wówczas, gdy w chwili końcowej T trajektoria systemu osiągnie stan pożądany, a w czasie trwania transportu ruch ładunku i wózka przebiega dokładnie po trajektorii pożądanej. Należy tutaj podkreślić, że formuła wskaźnika jakości pozwala na wprowadzenie tzw. trajektorii pożądanej. Aby rozjaśnić różnice w pojęciach: trajektoria zadana i pożądana załóżmy, że wyliczono za pomocą algorytmu z rys. 3 parę odniesienia $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$. Załóżmy także, że przy numerycznym wyznaczaniu pary odniesienia, waga algorytmu położona była głównie na nadążanie za położeniem wózka i w związku z tym, w wyliczonej trajektorii występują oscylacje. Wskaźnik jakości pozwala na wprowadzenie poprawki (7) do otrzymanej pary odniesienia, np. w taki sposób, aby wskaźnik swoje minimum osiągał przy zerowych oscylacjach. Tę poprawioną we wskaźniku jakości trajektorię nazwano pożądaną.

Twierdzenie 2. podaje przepis na regulator, który wylicza optymalne poprawki sterowania odniesienia. Optymalne, tzn. takie, dla których wskaźnik jakości (6) osiągnie najmniejszą z możliwych wartości. Inaczej mówiąc, każde inne sterowanie zniweluje odchylenie od trajektorii pożądanej w gorszy sposób, np. zajmie to więcej czasu lub ładunek będzie oscylował z większą amplitudą. Łatwo zauważyć, że gdy ładunek przemieszcza się dokładnie po trajektorii pożądanej, poprawka sterowania wyliczana przez regulator jest równa zeru. Ważną właściwością tego twierdzenia jest to, że gwarantuje ono obliczenie optymalnej poprawki sterowania niezależnie od czynnika powodującego rozbieżności z trajektorią pożądaną . W szczególności, regulator zareaguje w sposób optymalny także na podmuchy wiatru.

Rys. 4 przedstawia ideę sterowania. Wektory stanu $\bar{x}(t)$, $x(t)$, $\Delta x(t) \in \mathrm{IR}^{10}$, a wektory sterowania $\bar{u}(t)$, $u(t)$, $\Delta u(t) \in \mathrm{IR}^3$.



Rys. 4. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem LQ

Odpowiedź modelu matematycznego $\bar{x}(t)$ (wartość odniesienia) porównywana jest z zachowaniem suwnicy laboratoryjnej $x(t)$. Różnica $\Delta x(t)$ obu wektorów jest miarą odchylenia ruchu obiektu rzeczywistego od trajektorii pożądanej. Przed rozpoczęciem eksperymentu rozwiązuje się problem liniowo-kwadratowy, tzn. wylicza się macierz współczynników sprzężenia zwrotnego $\Gamma(t) = V^{-1} B(t)^T K(t)$ i wektor $\gamma(t) = V^{-1} B(t)^T k(t)$ z równań (9) i (10). Regulator wylicza poprawkę sterowania $\Delta u(t)$ zgodnie z równaniem (8). Każde zakłócenie, które przesunie suwnicę niezgodnie z zadaną trajektorią, wywoła poprawkę sterowania, która dodana do sterowania odniesienia w optymalny sposób poprawia sterowanie, czyli skompensuje zakłócenie. „W optymalny sposób" oznacza, że poprawka sterowania minimalizuje wskaźnik jakości (6) w problemie liniowo-kwadratowym [10].

Uproszczony model matematyczny suwnicy

Przy założeniu, że odchylenie ładunku od osi z jest małe, można przyjąć

$$\cos x_5 = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \Delta x_5\right) \simeq -\Delta x_5$$

$$\sin x_5 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \Delta x_5\right) \simeq -1$$

$$\cos x_7 \simeq 1, \quad \sin x_7 \simeq x_7$$

gdzie $\Delta x_7 = x_7$

Uwzględniając powyższe przybliżenia, układ równań (4) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_2 = N_1 - \mu_1 x_5 N_3 && \dot{x}_1 = x_2 \\
&\dot{x}_4 = N_2 + \mu_2 x_7 N_3 && \dot{x}_3 = x_4 \\
&\dot{x}_6 = (N_1 - \mu_1 x_5 N_3 - g x_5 - 2 x_6 x_{10})/x_9 && \dot{x}_5 = x_6 \\
&\dot{x}_8 = -(N_2 - \mu_2 x_7 N_3 + g x_7 + 2 x_8 x_{10})/x_9 && \dot{x}_7 = x_8 \\
&\dot{x}_{10} = -N_3 + g && \dot{x}_9 = x_{10}
\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a pozostałe symbole zgodnie z opisem dla równań (4).

Wprowadzone uproszczenia eliminują z równań suwnicy nieliniowe funkcje trygonometryczne. Uproszczenia te powodują również częściowe rozseparowanie równań suwnicy. Równania opisujące ruch suwnicy wzdłuż osi x, tzn. pierwsze, drugie, piąte i szóste nie zależą od zmiennych x_3, x_4, x_7 i x_8 opisujących ruch wzdłuż osi y. Podobnie równania trzecie, czwarte, siódme i ósme nie zależą od x_1, x_2, x_5 i x_6. W układzie równań (11) można więc wyróżnić dwa niezależne podukłady. Jest to częściowe rozseparowanie, ponieważ na oba podukłady równań ma wpływ ta sama zmienna x_9 – długość linki.

Suwnicą steruje się zwykle w taki sposób, aby jak najmniej rozhuśtać ładunek. Odchylenia od osi z są wówczas niewielkie i model uproszczony dobrze opisuje zachowanie suwnicy. Dlatego często w literaturze rozpatruje się ruch płaski suwnicy.

Przeprowadzone eksperymenty na modelu laboratoryjnym pokazały, że wpływ funkcji trygonometrycznych na ruch suwnicy zaczyna być znaczący dla odchyleń ładunku od pionu większych niż 7°.

Uproszczony regulator LQ

Algorytm omówiony wyżej stanowi w pełni samodzielny regulator, który pozwala sterować modelem suwnicy praktycznie po dowolnych trajektoriach osiągalnych. Pozwala również wpływać na nie poprzez poprawkę (7) wprowadzoną we wskaźniku jakości. Uzyskane możliwości zostały jednak okupione dużą komplikacją obliczeń (należy numerycznie rozwiązać kilka razy układ nieliniowych równań różniczkowych [3, 5]) jak również stopniem zaawansowania aparatu matematycznego. Wyliczenie macierzy Γ jest pracochłonną operacją i wymaga bardzo szybkiego komputera [10].

Powyższych utrudnień w praktycznej realizacji regulatora liniowo-kwadratowego nie ma jego uproszczona wersja. W pakiecie MATLAB-Simulink znajduje się gotowa procedura numeryczna, rozwiązująca problem liniowo-kwadratowy dla liniowego systemu stacjonarnego z nieskończonym czasem sterowania [9]. Wykorzystano ją do konstrukcji regulatora uproszczonego. Minimalizowany wskaźnik jakości jest określony następująco:

$$S(\Delta u) = \int_0^\infty (\Delta x(t)^T Q \Delta x(t) + \Delta u(t)^T V \Delta u(t)) dt \tag{12}$$

Zastosowano zlinearyzowane na trajektorii i sterowaniu odniesienia równania modelu uproszczonego suwnicy (11) z liniowym modelem tarcia (1–3). Rozwiązanie problemu dla nieskończonego czasu sterowania otrzymuje się w wyniku rozwiązania (poprzednio układu równań różniczkowych) algebraicznego równania Riccatiego postaci:

$$A^T K + KA - KBV^{-1}B^T K + Q = 0, \text{ gdzie } K^T = K \geq 0$$

Wstawienie macierzy K do wzoru

$$\Gamma = V^{-1}B^T K \tag{13}$$

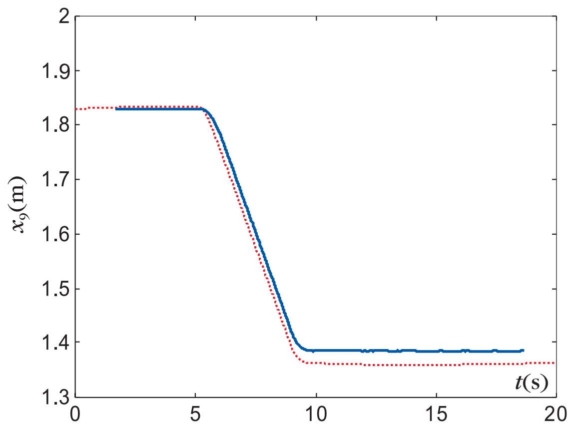
pozwala otrzymać optymalne sprzężenie zwrotne, na podstawie którego jest generowana poprawka sterowania:

$$\Delta u = -\Gamma \Delta x$$

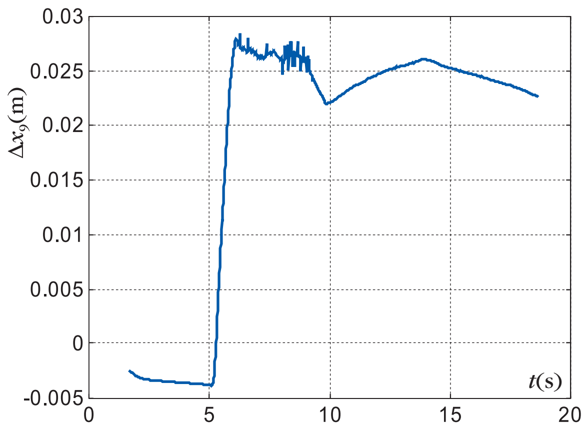
Do wyliczenia macierzy Γ (13) wykorzystano funkcję *lqr* oprogramowania MATLAB.

W zaprezentowanym, uproszczonym algorytmie sterowania warto zwrócić uwagę na podstawowe uproszczenia w nim przyjęte i konsekwencje z nich wynikające:

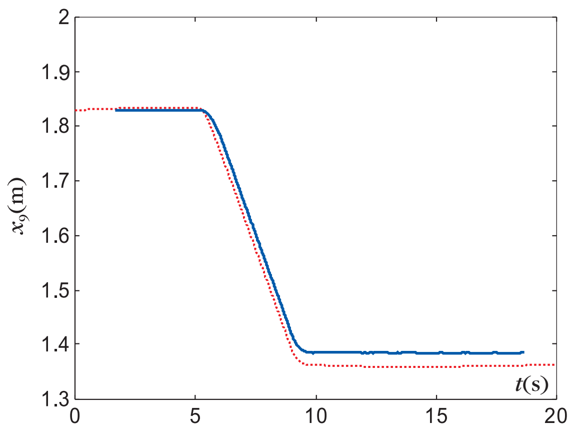
- macierz jest wyliczana przez rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego dla systemów liniowych stacjonarnych o nieskończonym czasie sterowania



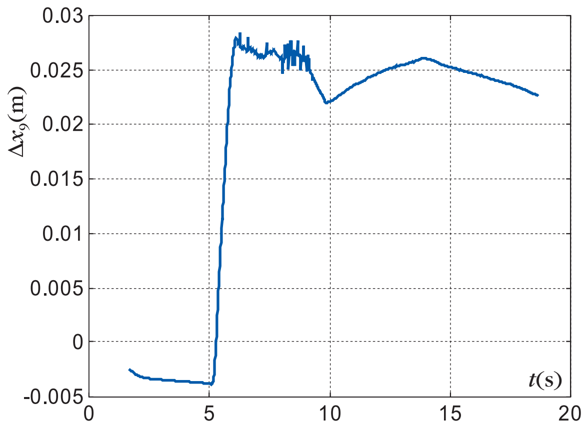
Rys. 5. Przebieg położenia wózka wzdłuż osi x: linia ciągła – obiekt rzeczywisty, linia przerywana – wartość zadana



Rys. 6. Przebieg położenia wózka wzdłuż osi y: linia ciągła – obiekt rzeczywisty, linia przerywana – wartość zadana



Rys. 7. Przebieg zmian długości linki x_9: linia ciągła – obiekt rzeczywisty, linia przerywana – wartość zadana



Rys. 8. Błąd długości linki $\Delta x_9 = x_9^{eksp} - x_9^{symul}$

- system zlinearyzowany określono na podstawie nieliniowych równań uproszczonych z liniowym modelem tarcia (bez uwzględnienia tarcia statycznego)
- brak możliwości wnoszenia korekty do trajektorii odniesienia – uproszczony wskaźnik jakości
- kompensacja odchyłek od trajektorii odniesienia nie jest optymalna, ponieważ regulator nie dysponuje nieskończenie długim czasem na dokonanie korekty w każdym punkcie trajektorii.

Wyniki eksperymentów

W przedstawionym poniżej eksperymencie wybrano trajektorię odniesienia, w której wózek suwnicy przesuwa się w czasie 4 s wzdłuż osi x i y o 0,5 m, a linka ulega w tym czasie skróceniu z 1,83 m do 1,33 m. Następnie po 2 s postoju wózek powraca w czasie kolejnych 4 s do początkowego położenia. Przemieszczanie wózka odbywa się ze stałą prędkością.

Dla tak zadanych zmian położenia wózka i długości linki wyliczono w programie Simulink sterowanie i odpowiedź suwnicy według algorytmu z rys. 3. W tym przypadku posłużono się modelem matematycznym, który uwzględniał także tarcie statyczne. Dzięki temu wyliczone poprawki sterowania można wprost dodać do sterowania, bez konieczności kompensacji tarcia statycznego w regulatorze.

Następnie rozwiązano numerycznie w programie MATLAB problem liniowo-kwadratowy dla równań suwnicy zlinearyzowanych wokół trajektorii $\bar{x}(t)$. Wskaźnik jakości przedstawia wzór (12). Macierz Q jest macierzą diagonalną o wymiarach 10×10, a V jest macierzą jednostkową o wymiarach 3×3.

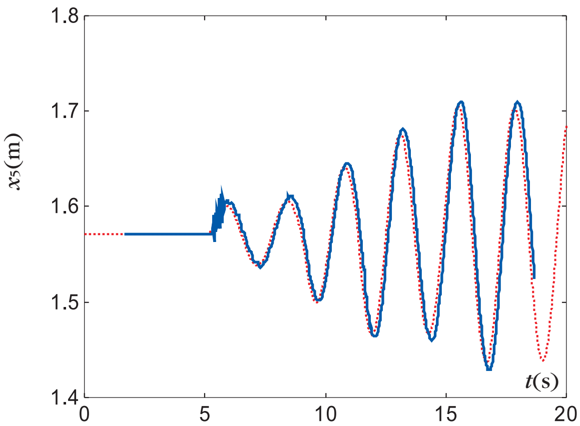
Przyjęto: $Q = 10^3$ diag (10,1,10,1,1,1,1,1,15,5)

Takie ustawienie elementów w macierzy Q powoduje, że regulator generuje większe poprawki sterowania dla uchybów położenia wózka i długości linki, a mniejsze w przypadku uchybu pozostałych zmiennych stanu. Małe wartości wyrazów macierzy V powodują, że wartości poprawek sterowania są duże.

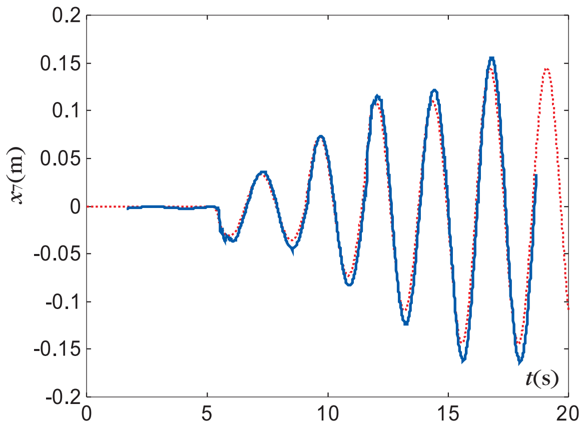
Rys. 5 i 6 przedstawiają zmiany położenia wózka wokół trajektorii zadanej. Wystąpiły niewielkie odchyłki od zadanej trajektorii.

Błędy położenia wózka, obliczone jako różnica wyników eksperymentalnych i symulacyjnych, wynosiły maksymalnie 2 cm.

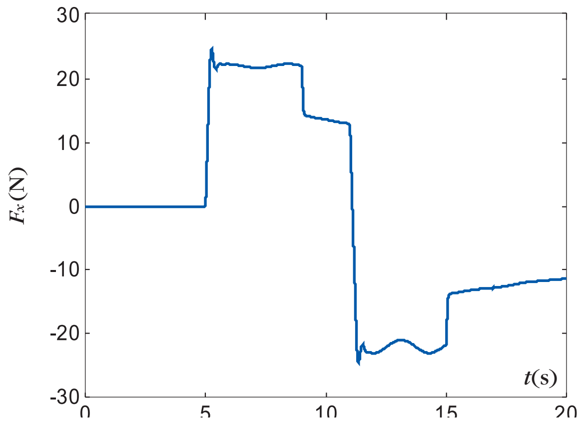
W 6. sekundzie eksperymentu pojawił się uchyb długości linki ok. 2,5 cm (rys. 7), który utrzymał się na tym poziomie aż do końca eksperymentu. Dokładne zmiany uchybu długości linki prezentuje rys. 8.



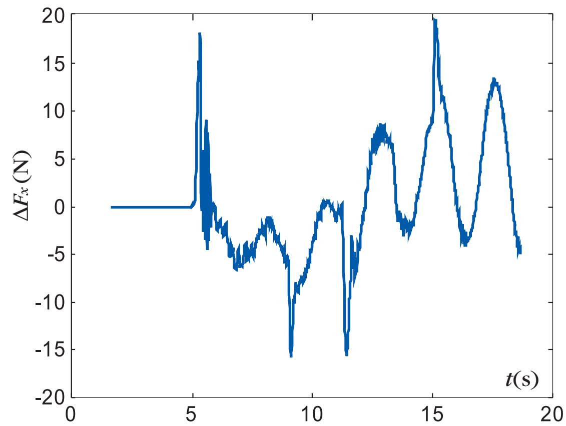
Rys. 9. Przebieg zmian kąta x_5: linia ciągła – obiekt rzeczywisty, linia przerywana – wartość zadana



Rys. 10. Przebieg zmian kąta x_7 : linia ciągła – obiekt rzeczywisty, linia przerywana – wartość zadana



Rys. 11. Siła odniesienia, sterująca wózkiem w kierunku osi x



Rys. 12. Poprawka siły sterującej ΔF_x dana

Wystąpiły niewielkie błędy w amplitudach wahań ładunku (rys. 9 i 10), pomimo że zgodnie z parametrami macierzy Q, regulator w mniejszym stopniu reagował na błędy tych zmiennych stanu.

Błędy wychylenia kątowego osiągnęły maksymalnie 0,025 rad w końcowej fazie eksperymentu.

Rys. 11 –16 przedstawiają siły odniesienia sterujące suwnicą i poprawki sił sterujących wygenerowane przez regulator w trakcie eksperymentu.

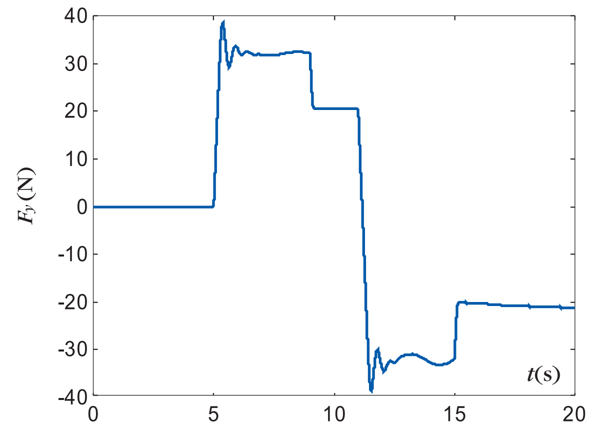
Poprawka dla sił sterujących wózkiem (rys. 12 i 14) wynosi średnio ok. 50 %.

W krótkich przedziałach czasu maksymalna poprawka dochodzi do 100 % poziomu sygnału odniesienia. Regulator w niewielkim stopniu korygował siłę sterującą długością linki. Poprawka tej siły jest mniejsza niż 10 %.

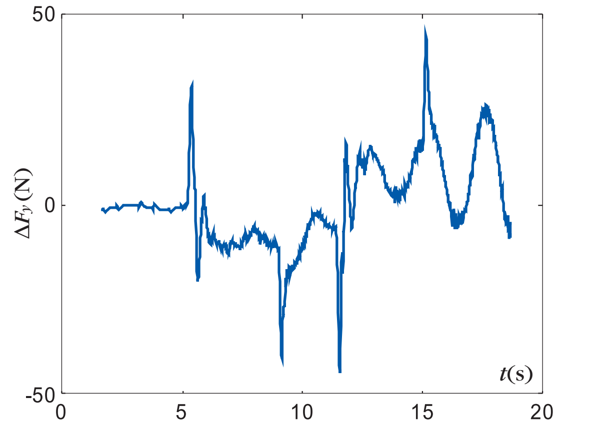
Podsumowanie

Przedstawiono dwa sposoby rozwiązania problemu sterowania suwnicą. Pierwszy algorytm opiera się na pełnym modelu nieliniowym i jego linearyzacji wokół trajektorii odniesienia. W modelu przyjęto tarcie liniowe. Nie zawęża to obszaru działania regulatora ani nie jest uproszczeniem, ponieważ skonstruowany regulator jest poprawny również dla obiektu z tarciem statycznym. Wystarczy w tym celu przeskalować otrzymane poprawki i uwzględnić w regulatorze wartość tarcia statycznego. Co więcej, omija się w ten sposób kłopoty z modelowaniem tarcia statycznego w symulacjach układu regulacji, co jest kłopotliwe ze względu na konieczność zastosowania funkcji signum. Ten algorytm stanowi w pełni samodzielny regulator, który pozwala sterować modelem suwnicy praktycznie po dowolnych trajektoriach osiągalnych. Pozwala również wpływać na nie poprzez poprawki wprowadzone do wskaźnika jakości. Uzyskane możliwości zostały jednak okupione dużą komplikacją obliczeń numerycznych jak również stopniem zaawansowania aparatu matematycznego. Wyliczenie macierzy Γ jest pracochłonną operacją i wymaga zastosowania szybkiego komputera.

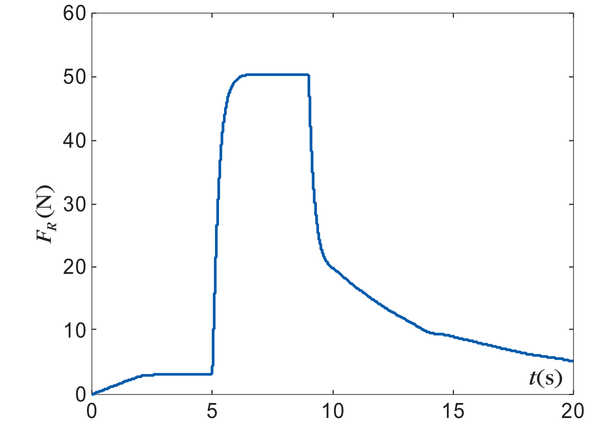
Złożoność powyższego algorytmu jest jego istotną wadą, dlatego podjęto próbę jego uproszczenia. W tym celu do opisu modelu laboratoryjnego wybrano równania uproszczone, a problem liniowo-kwadratowy rozwiązywano w każdym kroku, tak jak dla nieskończonego czasu sterowania na podstawie równań zlinearyzowanych. Trajektorię odniesienia wyliczono na podstawie pełnych równań nieliniowych z uwzględnieniem tarcia statycznego. Wybór uproszczonych równań przyspieszył znacznie proces wyliczania macierzy Γ. Otrzymane poprawki sterowania można dodawać do sterowania odniesienia bez kompensacji tarcia statycznego. Imple-



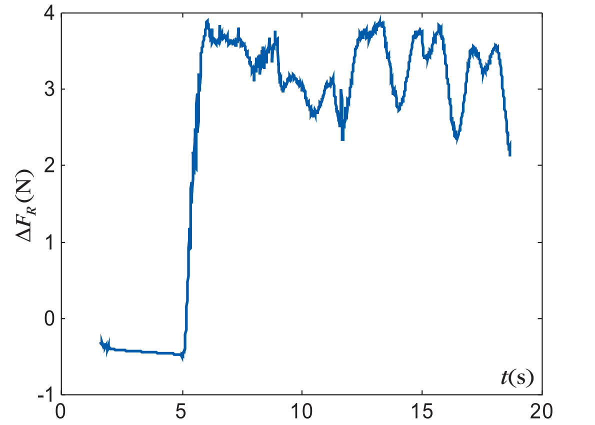
Rys. 13. Siła odniesienia, sterująca wózkiem w kierunku osi y



Rys. 14. Poprawka siły sterującej ΔF_y



Rys. 15. Siła odniesienia, sterująca długością linki x_9



Rys. 16. Poprawka siły sterującej ΔF_R

mentacja regulatora w układzie regulacji z modelem laboratoryjnym potwierdziła jego poprawne działanie, jak również odporność na zakłócenia. Algorytm syntezy uproszczonego regulatora liniowo-kwadratowego nie daje możliwości korekcji zadanej trajektorii. Jest tylko narzędziem do nadążania za z góry zadaną trajektorią. Pod tym względem nie jest tak autonomiczny jak pierwszy algorytm. Dlatego może współpracować tylko z innym systemem, który rozwiązywałby problem wyliczenia pary odniesienia. Porównując charakter przedstawionych dla obu regulatorów przykładowych macierzy Γ, można zauważyć, że dla regulatora uproszczonego każdy krok numeryczny jest niezależnym i oddzielnym problemem sterowania niepowiązanym z pozostałymi chwilami sterowania. Przyspiesza to obliczenia, ale jednocześnie uniemożliwia działania predykcyjne regulatora, jak to ma miejsce w algorytmie pełnego regulatora liniowo-kwadratowego.

Praca była finansowana z grantu KBN 8 T11A01818

Bibliografia

1. M. Athans, P.L. Falb, *Sterowanie optymalne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1966.
2. A.E. Bryson i Y Ho, Applied Optimal Control, Hemisphere, Washington DC 1987.
3. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1996.
4. L. Derek, G.G. Parker, B. Driessen, R.D. Robinett, *Command Shaping Control of an Operator in the Loop Boom Crane*, Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania 1998.
5. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1982.
6. H. Górecki, *Optymalizacja systemów dynamicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
7. W. Grega, *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizowanych i rozproszonych*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004.
8. A. Korytowski, *Analityczne rozwiązania liniowo-kwadratowego problemu sterowania optymalnego z opóźnieniami*, Wydawnictwa AGH, Kraków 1995.
9. W. Mitkowski, *Stabilizacja systemów dynamicznych*, WNT, Warszawa 1991.
10. M. Pauluk, *Robust Control of 3D Crane*, Methods and Models in Automation and Robotics, Proceedings of the 8th IEEE International Conference – MMAR, pp. 355–360, Międzyzdroje, Poland 2002.
11. M. Pauluk, Model matematyczny trójwymiarowej suwnicy, Automatyka, półrocznik, t. 6, z. 1, Akademia Górniczo-Hutnicza, s. 69–102, Kraków 2002.

REKLAMA

Przeskocz konkurencję

Punkty pozycjonujące

w Serwisie automatyka.pl

Punkty pozycjonujące wpływają na kolejność emitowania informacji w Katalogach branżowych Serwisu automatyka.pl. Narzędzie to pozwala wyróżniać istotne dla firmy treści i dotrzeć do świadomości większej liczby potencjalnych odbiorców.

Zasada jest prosta: kto przeznaczy więcej punktów na daną informację - umieści ją wyżej w zestawieniach.

Więcej informacji:
012 432 52 00,
pomoc@xtech.pl

automatyka.pl
serwis branżowy xtech.pl

xtech.pl Serwisy branżowe Sp. z o.o   ul. Garncarska 5   31-115 Kraków
tel.012 432-52-00   fax 012 429-57-08