

Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM¹⁾

(2)

Uściślenie metod obliczeń niepewności typu B

Mykhaylo Dorozhovets
Zygmunt L. Warsza

W części 2, jako propozycje rozszerzenia metody obliczania niepewności typu B, rozważono łączne uwzględnienie rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wpływających i ich współczynników wpływu, wirtualną randomizację wartości wielkości wpływającej, model „najgorszego” rozkładu oraz wpływ korelacji pomiędzy składowymi niepewnościami. Zamieszczono wnioski dotyczące tej części pracy oraz jako ciekawostkę – historię omyłki Laplace’a w ocenie wiarygodności wyniku pomiarów stosunku mas Słońca i Jowisza.

W części 1 tej publikacji (PAR 1/2007) omówiono podstawowe definicje i wzory do wyznaczania parametrów niepewności wg przewodnika GUM [1, 2] oraz zakres i ograniczenia w ich stosowaniu. Zaproponowano rozszerzenie metody obliczania niepewności typu A na pomiary wymagające uwzględniania korelacji pomiędzy wartościami obserwacji oraz analizowano wpływ przyjęcia nieadekwatnego ich rozkładu prawdopodobieństwa. Zamieszczono też podstawową bibliografię.

Uwzględnienie rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wpływających oraz ich współczynników wpływu

Podstawowe równanie pomiaru zapisuje się następująco:

$$Y = f(X, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

gdzie: X – wielkość mierzona,
 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – wielkości wpływające.

Przy stałej wartości wielkości mierzonej X , na podstawie różniczek zupełnej otrzymuje się dla przyrostów chwilowych:

$$\Delta Y \approx \frac{\partial f}{\partial Q_1} q_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_n} q_n$$

gdzie: $q_1, q_2, \dots, q_n$ – chwilowe odchylenia od wartości odniesienia wielkości Q_i .

W dalszej części tekstu wykorzysta się wzory stosowane do oceny składowej niepewności wyniku pomiarów $u_B(x)$, tj. wyznaczanej metodą typu B. Otrzymuje się je z przekształcenia powyższej podstawowej zależności. Ich argumentami są odchylenia wartości średnich standardowych czynników wpływających na wynik pomiarów, nazywane tu niepewnościami tych czynników. Niepewności te wynikają z niekontrolowanych zmian zewnętrznych wielkości wpływających, zmian parametrów wewnętrznych systemu pomiarowego oraz zakłóceń zewnętrznych i wewnętrznych. Oddziaływania wyraża się przez zależności funkcyjne i ich współczynniki w ujęciu probabilistycznym. Spodziewane skutki oddziaływania poszczególnych czynników wpływających ocenia się jako składowe niepewności B, którą następnie uwzględnia się w procedurze odtwarzania do opisu zbioru możliwych wartości wielkości mierzonej odpowiadających danemu wynikowi pomiaru – patrz rys. 1 w części 1.

Do obliczenia składowej niepewności standardowej $u_B[x(Q)]$ pochodzącej od określonego czynnika Q ²⁾ niezbędna jest znajomość rozkładu prawdopodobieństwa $p(q)$ wartości q tego czynnika, gdyż:

$$u_B[x(Q)] = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (q - m_q)^2 p(q) dq}$$

gdzie: m_q – wartość oczekiwana q

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo Dorozhovets
– Politechnika Rzeszowska
Doc. dr inż. Zygmunt L. Warsza

¹⁾ Publikacja ISO *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, w literaturze nazywana w skrócie – Guide, a ostatnio – akronimem GUM [1, 2].

²⁾ W części 2 tej publikacji literą q oznacza się wartość wielkości Q wpływającej na niepewność B liczoną jako przyrost od wartości odniesienia tej wielkości, np. dla temperatury od 20 °C (w części 1 oznaczenia q_i używano wg GUM dla obserwacji pomiarowych wartości x wielkości mierzonej X).

Tabela 1. Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa składowych niepewności i do metody typu B

Rozkład $p(q)$	2-delta Diraca	Arcus sinus	Równomierny	Trójkątny	Normalny $q_{gr} = 3\sigma$
Odchylenie standardowe $u_B(q)$	$\frac{q_{gr}}{1}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{2}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{3}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{6}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{9}}$
w % od q_{gr}	100	71	58	41	33

Przy obliczaniu standardowej niepewności typu B niezwykle istotne jest przyjęcie właściwych rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wpływających i dla wartości ich współczynników wpływu. Rozkłady te, a także ich parametry mogą być znane z:

- poprzednio przeprowadzanych doświadczeń
- literatury naukowo-technicznej
- podręczników
- dokumentacji dostarczonej przez producenta itp.

Na ogół dysponuje się pewną cząstkową wiedzą o wielkości wpływającej Q , np. znane są jej niektóre parametry, zwykle - jej wartości graniczne $\pm q_{gr}$. Natomiast często brakuje w pełni wiarygodnej informacji o rozkładzie zmian tej wielkości i jej współczynnika wpływu. Wówczas do rozważań najbezpieczniej jest przyjąć rozkład, który można uznać w danych warunkach pomiaru jako najbardziej niekorzystny z możliwych. Przy zadanych wartościach granicznych wielkości wpływającej, lecz nieznanym a priori jej rozkładzie, niepewność standardowa może się zmieniać w szerokim zakresie (tabela 1), tj. od q_{gr} dla rozkładu w postaci dwu rozsuniętych funkcji delta Diraca, do $q_{gr}/\sqrt{6}$ dla rozkładu trójkątnego i $\approx q_{gr}/3$ dla rozkładu normalnego.

Rekomendacje do przyjęcia a priori modelu rozkładu prawdopodobieństwa:

- histereza – funkcja o postaci dwu delt Diraca
- zakłócenia regularne typu meandr (*bang-bang*) – funkcja: dwie delty
- regularne zakłócenia sinusoidalne – arcus sinus
- kwantowanie (jednostronne) – jednostajny
- kwantowanie dwustronne niezależne – trójkątny
- dobowe zmiany wartości napięcia sieciowego – w przybliżeniu trójkątny
- odchylenia temperatury od wartości normalnej w pomieszczeniu – w przybliżeniu trójkątny
- zakłócenia szumowe – normalny
- stałe fizyczne oraz chemiczne – poradniki (tablice).

Zależność niepewności standardowej od przyjętego modelu rozkładu

Zakładany model rozkładu jest zwykle tylko pewnym przybliżeniem rozkładu rzeczywistego. Dotyczy to też

parametrów tego rozkładu. Wskutek tego, przy wyznaczaniu parametrów rozkładu powstaje tzw. *niepewność wyznaczenia niepewności* [2] wartości q

$$\frac{\Delta u_B(q)}{u_B(q)}$$

Jest to wartość względna i może wynosić od kilku do 50 %, a nawet i więcej.

Przy obliczaniu złożonej niepewności standardowej i następnie na jej podstawie niepewności rozszerzonej, wpływ tej dodatkowej niepewności uwzględnia się przy obliczaniu wg Przewodnika [1, 2] wypadkowej tzw. *efektywnej liczby stopni swobody* $v_{eff,B}$, jako równej:

$$v_{eff,B} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u_B(q)}{u_B(q)} \right]^{-2}$$

Na przykład, jeżeli niepewność zadanego a priori rozkładu wynosi ok. 30 %, to efektywna liczba stopni swobody składowej niepewności typu B

$$v_{eff,B} \approx \frac{1}{2} [0,3]^{-2} = 5,56 \approx 5$$

Przy obliczeniu niepewności rozszerzonej

$$U_p(x) = k_p(v_{eff,B}) \cdot u_c(x)$$

wartość współczynnika rozszerzenia przyjmuje się w oparciu o aproksymację rozkładu prawdopodobieństwa wyniku pomiaru odpowiednim rozkładem Studenta [2]

$$k_p(v_{eff,B}) = t_p(v_{eff,B})$$

Przy dużej wartości niepewności parametrów rozkładu, liczba stopni swobody będzie mała. Wzrasta wówczas wynikająca stąd składowa niepewności rozszerzonej, ponieważ zmniejsza się liczba stopni swobody obliczana wg wzoru Welch-Satterthwaite'a [1, 2]

$$v_{eff,B} = \frac{(u_c(x))^2}{\sum_i \frac{u_B^4(x(q_i))}{v_{eff,i}}} = \frac{\left(\sum_i u_B^2[x(q_i)] \right)^2}{\sum_i \frac{u_B^4[x(q_i)]}{v_{eff,i}}}$$

Wpływ niepewności wielkości wpływającej na niepewność wyniku pomiaru

Odchylenie $\vartheta [x(Q)]$ wyniku pomiaru spowodowane zmianą q wielkości wpływającej Q opisuje się zależnością

$$\vartheta[x(Q)] = a \cdot q$$

gdzie: q – wartość wielkości Q równa $q \rightarrow q_0$ z niepewnością $u(q)$, a – współczynnik wpływu o wartości równej $a \rightarrow a_0$ z niepewnością $u(a)$.

Składową standardowej niepewności wyniku pomiaru (zależną od wpływu wielkości Q) opisuje wzór:

$$u_B[x(Q)] = \sqrt{[a_0^2 + u^2(a)] \cdot [q_0^2 + u^2(q)]}$$

Ponieważ wartości a_0 oraz q_0 są znane, wynik można skorygować, wprowadzając $p = a_0 q_0$. Wtedy nieskorygowana część wyniku ma niepewność:

$$u_B[x(Q)]_{popr.} = \sqrt{a_0^2 u^2(q) + q_0^2 u^2(a) + u^2(a) u^2(q)}$$

Możliwe przypadki:

1) $a_0 = 0$ ($a \rightarrow \pm a_{gr}$), wtedy:

$$u_B[x(Q)] = u(a) \sqrt{q_0^2 + u^2(q)}$$

2) $q_0 = 0$ ($q \rightarrow \pm q_{gr}$), wtedy:

$$u_B[x(Q)] = \sqrt{a_0^2 + u^2(a)} \cdot u(q)$$

3) $a_0 = 0$ ($a \rightarrow \pm a_{gr}$) oraz $q_0 = 0$ ($q \rightarrow \pm q_{gr}$), wtedy:

$$u_B[x(Q)] = u(a) \cdot u(q)$$

Przykład 4³⁾

Wiadomo jest, że temperaturowy współczynnik dzielnika napięciowego charakteryzuje się wartościami granicznymi $\varepsilon_{\theta,gr} = \pm 50$ ppm/°C, a graniczne odchylenie temperatury w pomieszczeniu od normalnej wynosi $q_{\theta,gr} = 8$ °C. Zakładając trójkątne rozkłady prawdopodobieństwa dla wartości współczynnika temperaturowego oraz odchylen temperatury należy oszacować składową standardowej niepewności wyniku pomiaru z zastosowaniem tego dzielnika, zależną od wpływu temperatury.

Rozwiązanie:

Przy założeniu trójkątnych rozkładów prawdopodobieństwa wartości współczynnika temperaturowego oraz odchylen temperatury, ich standardowe niepewności wynoszą

$$u(\vartheta_{\theta}) = \frac{8 \text{ °C}}{\sqrt{6}} \quad u(\varepsilon_{\theta}) = \frac{50 \text{ ppm/°C}}{\sqrt{6}}$$

Po skorzystaniu z ostatniego wzoru, otrzymuje się względną standardową niepewność wyniku od wpływu temperatury:

$$\begin{aligned} \frac{u_B[x(\vartheta_{\theta})]}{|x|} &= u(\varepsilon_{\theta}) \cdot u(\vartheta_{\theta}) = \\ &= \frac{50 \text{ ppm/°C}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{8 \text{ °C}}{\sqrt{6}} \approx 67 \text{ ppm} \end{aligned}$$

Przykład 5

W celu zmniejszenia niepewności pomiaru wyznaczonej w przykładzie 4 zmierzono temperaturę w pomieszczeniu. Z wyniku tego pomiaru wyznaczono jej odchylenie od wartości normalnej, które wynosi $\theta_{\theta 0} = 7$ °C ze standardową niepewnością $u(\theta_{\theta}) = 0,5$ °C. Oznacza to, że odchylenie temperatury od normalnej mieści się w zadanych a priori granicach ± 8 °C. Przy tych samych jak poprzednio założeniach należy oszacować standardową niepewność wyniku wywołaną wpływem temperatury.

Rozwiązanie:

Względną standardową niepewność wyniku od wpływu temperatury wyznacza się w tym przypadku z innego wzoru, tj.:

$$\begin{aligned} \frac{u_B[x(\vartheta_{\theta})]}{|x|} &= u(\varepsilon_{\theta}) \cdot \sqrt{\vartheta_{\theta 0}^2 + u^2(\vartheta_{\theta})} = \\ &= \frac{50 \text{ ppm/°C}}{\sqrt{6}} \cdot \left(\sqrt{7^2 + 0,25^2} \right) \text{ °C} \approx 143 \text{ ppm} \end{aligned}$$

Z porównania wyników wynika, że po uwzględnieniu dodatkowej informacji o temperaturze niepewność wyniku pomiaru zwiększyła się ponad dwukrotnie!

Wirtualna randomizacja wartości wielkości wpływających oraz ich współczynników

Pojawia się pytanie, dlaczego po wyznaczeniu bieżącej wartości jednego z parametrów procesu pomiarowego, oszacowana niepewność pomiaru nieoczekiwanie zwiększyła się? Wygląda to na paradoks i wymaga bliższego wyjaśnienia. Przyczyną jest zalecane powszechnie przyjęcie niepoprawnego założenia o *wirtualnej randomizacji* wartości wielkości wpływającej i jej współczynników wpływu w całym zakresie ich zmian. Przy takiej randomizacji zakłada się określony (nawet „najgorszy” z możliwych) rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich wartości tej wielkości, zdarzających się w praktyce. W większości przypadków jest to jednak nieuprawnione, gdyż taka randomizacja w rzeczywistości nie zachodzi. W każdym cyklu zadania pomiarowego wartość jednej, lub nawet kilku wielkości wpływających, może być nieznaną, lecz jest stałą.

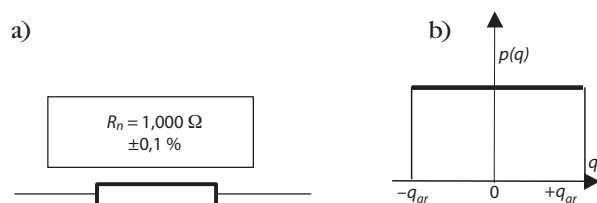
Przy niekontrolowanej temperaturze eksperymentów pomiarowych, w części z nich rzeczywista wartość skła-

³⁾ Przykłady numerowane są kolejno w całej treści części 1 i 2.

dowej temperaturowej w niepewności standardowej wyniku pomiaru będzie większa niż średnia, a w innych będzie od niej mniejsza. Zależy to od tego, czy odchylenie temperatury jest odpowiednio większe lub mniejsze od jej wartości nominalnej. Do nieznanych wahań wartości wielkości wpływających można zastosować randomizację wówczas, gdy realizuje się nie tylko pojedynczy krótki cykl pomiarowy, ale prowadzi się pomiary ciągłe w środowisku zewnętrznym lub w laboratorium bez klimatyzacji. Dotyczy to np. dodatkowego wzrostu niepewności pomiarów wykonanych przyrządami pomiarowymi, używanymi w takich warunkach do badania w sposób ciągły parametrów różnych obiektów, produktów, materiałów itp.

Występują też takie wielkości wpływające oraz współczynniki, które przy powtarzanych seriach pomiarów zachowują zawsze stałą (ale nieznaną) wartość w całym cyklu zbierania obserwacji pomiarowych, nawet w bardzo długim czasie. Na przykład w układzie do pomiaru prądu wykorzystuje się bocznik – rezystor o podanej przez producenta wartości nominalnej rezystancji $R_n = 1,000 \Omega$ oraz tolerancji $\delta R_{gr} = \pm 0,1 \%$. Z informacji od producenta wiadomo, że podczas produkcji rezystory klasyfikowano (sortowano do różnych przedziałów wartości i klas dokładności) w taki sposób, że można przyjąć jednostajny rozkład prawdopodobieństwa wartości nominalnej rezystancji między wartościami granicznymi przedziału $\pm q_{gr}$, jak na rys. 1b. Występuje tu rzeczywista randomizacja wartości rezystancji, ponieważ producent przy wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa tych wartości bazował nie na jednym rezystorze, a na dużej ich grupie z produkcji. Z takiej randomizacji wynika, że wartość oczekiwana względnej standardowej niepewności rezystancji rezystora wynosi

$$\frac{u_B(R)}{R} = \frac{\delta R_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{0,1\%}{\sqrt{3}} \approx 0,0577 \%$$



Rys. 1. Symbol rezystora (a) i rozkład rozrzutu jego wartości (b)

W układzie pomiarowym stosuje się egzemplarz rezystora przypadkowo wybierany z danego przedziału wartości rezystancji, o nieznannej wartości rzeczywistej R , stałej w czasie trwania danego cyklu pomiarów. W kolejnych eksperymentach pomiarowych wartość ta pozostaje bez zmian! (Przy krótkim czasie zbierania obserwacji pomiarowych można w rozważaniach nie brać pod uwagę długoczasowej oraz temperaturowej niestabilności rezystancji i jej wpływ pominać). Wskutek tego, odchylenie wartości rezystancji od jej wartości znamionowej R_n i składowa niepewności wyniku pomiaru tym odchyleniem spowodowana, nie zmienia się. Z dużym prawdopodobieństwem będzie się ona różnić od war-

tości oczekiwanej o 0,0577 %. Może być zarówno mniejsza od tej wartości, co na ogół nie szkodzi, jak i większa od niej, co powoduje pewne skutki negatywne. Powstaje pytanie: czy uzasadnione jest uznanie wartości oczekiwanej niepewności standardowej dotyczącej całej partii rezystorów za reprezentatywną dla pojedynczego egzemplarza?

Przyjęcie takiego założenia należy traktować jako wirtualną randomizację odchylen rezystancji od jej wartości nominalnej. Poglądy producenta partii rezystorów oraz użytkownika pojedynczego rezystora z tej partii na skutki wpływu rozkładu prawdopodobieństwa odchylen nominalnej wartości rezystancji różnią się zdecydowanie. Jest to ilustracja ogólniejszego problemu:

- czy próbka zawierająca tylko pojedynczy element odzwierciedla reprezentatywnie właściwości całej populacji, lub
- jak jest uzasadnione przenoszenie a priori zadanych właściwości populacji na właściwości pojedynczego elementu. Innymi słowy: jak dalece uzasadniona jest wirtualna randomizacja.

Podobna sytuacja istnieje też w innych dziedzinach:

- pogląd ministra zdrowia o zdrowiu pacjentów jest w pełni uzasadniony jako randomizowany – statystyczny, oparty na istniejącym rozkładzie prawdopodobieństwa występowania określonej choroby u danej kategorii ludzi
- pogląd określonego pacjenta – nie może być randomizowany – bo on albo choruje na daną chorobę, albo nie.

Randomizacja przestaje być całkowicie wirtualna, gdy podczas analizy mamy nie jeden element, a kilka, niekoniecznie z tej samej populacji, przy tym im większa liczba elementów wpływa na wynik pomiaru, tym w większym stopniu przyjęcie zasady randomizacji ma sens zarówno teoretyczny, jak i praktyczny.

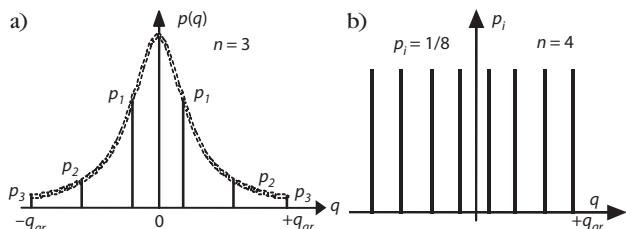
Model „najgorszego rozkładu”

Eksperymentator będzie mógł podczas analizy niepewności uwzględnić randomizację dowolnej liczby składowych, jeśli najpierw przyjmie dla każdej z nich odpowiedni (tj. poprawny) model tzw. „najgorszego” rozkładu prawdopodobieństwa. Rozkład ten powinien spełniać następujące ogólne warunki:

- 1) Jego parametry będą oparte na znanych a priori parametrach (np. od producenta).
- 2) Kształt będzie zależny od liczby elementów wykorzystywanych w danym eksperymencie pomiarowym. Przy nieograniczonym zwiększeniu liczby elementów składowych rozkład powinien dążyć do rozkładu całej populacji.
- 3) Każda dodatkowa wiedza, uzyskana na przykład z pomiaru rzeczywistej wartości parametru elementu, nie może powodować zwiększenia niepewności wyniku pomiaru, a odwrotnie – ją poprawiać.

Przykład dwu modeli najgorszego rozkładu

Jednym z modeli odpowiadających warunkom eksperymentalnym jest równomiernie dyskretyzowany rozkład prawdopodobieństwa populacji. Liczba dyskretnych wartości q_n równa się podwójnej liczbie elementów wykorzystywanych w danym zadaniu pomiarowym (rys. 2).

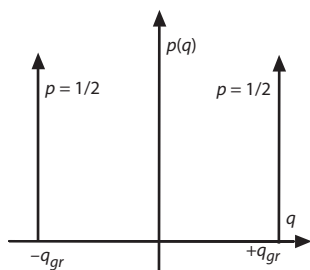


Rys. 2. Dyskretyzowane rozkłady prawdopodobieństwa: a) dowolny ($n = 3$), b) jednostajny ($n = 4$)

W przypadku rozkładu jednostajnego z n elementów (rys. 2b) standardowa niepewność wartości q wynosi [16]

$$u[Q(n)] = \frac{q_{gr}}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}}$$

Dla dowolnego przyjętego a priori rozkładu prawdopodobieństwa i przy wykorzystywaniu tylko jednego elementu, model najgorszego rozkładu prawdopodobieństwa $p(Q|_{n=1})$ ma postać dwóch rozsuniętych funkcji delta Diraca (2δ), znajdujących się w punktach o wartościach granicznych parametru (rys. 3).



Rys. 3. Model „najgorszego” rozkładu prawdopodobieństwa w postaci dwóch funkcji delta Diraca dla przypadku pojedynczego elementu lub jednej wielkości ($n = 1$)

Przy takim modelu standardowa niepewność wartości wielkości zawsze równa się jej wartości granicznej q_{gr}

$$u(Q|_{n=1}) = q_{gr}$$

Przy założeniu takiego modelu rozkładu wielkości wpływającej, dodatkowy pomiar tej wielkości (przy wyniku pomiaru $q_0 < q_{gr}$ oraz jego niepewności $u(q_0)$, takiej, że

$$\sqrt{q_0^2 + u^2(q_0)} \leq q_{gr}$$

praktycznie zawsze będzie powodować zmniejszenie niepewności wyniku pomiaru (co najwyżej zmiana nie wystąpi)

$$u_B[x(Q)] = u(a) \sqrt{q_0^2 + u^2(q)} \leq u(a) q_{gr}$$

Do czujników i elementów wykonawczych proponujemy szeroką gamę pasywnych koncentratorów sygnałów. Używane są one zarówno do zbierania i przesyłania sygnałów z obszaru instalacji do sterowania, jak również do przekazywania sygnałów sterujących do elementów wykonawczych.

Odlewane, metalowe obudowy koncentratorów sygnałów zapewniają maksymalną ochronę i bezpieczeństwo w ekstremalnych warunkach.

Koncentratory w lekkiej, kompaktowej obudowie z tworzywa, z gniazdami M8 lub M12 są stosowane w miejscach gdzie przestrzeń montażowa jest ograniczona lub przeważają ruchome części maszyny.

BALLUFF

sensors worldwide



BSB

Pasywne koncentratory sygnałów



www.balluff.pl

Balluff Sp. z o.o., ul. Muchoborska 18, 54-424 Wrocław
Tel. +48 071 338 49 29, Fax +48 071 338 49 30
balluff@balluff.pl

Przykład 6

Jeżeli dla odchylenia temperatury w pomieszczeniu (takiego, jak w przykładzie 4) założyć model rozkładu z rys. 3, to jej standardowa niepewność na podstawie zadanych a priori wartości granicznych $\pm 8^\circ\text{C}$ wynosi $u(\theta_\theta) = 8^\circ\text{C}$, a względna standardowa niepewność wyniku spowodowana przez wpływ temperatury równa się:

$$\frac{u_B[x(\vartheta_\theta)]}{|x|} = u(\varepsilon_\theta) \cdot u(\vartheta_\theta) = \frac{50 \text{ ppm}/^\circ\text{C}}{\sqrt{6}} \cdot 8^\circ\text{C} \approx 163 \text{ ppm}$$

Po pomiarze temperatury (przykład 5) względna standardowa niepewność wyniku spowodowana wpływem temperatury wynosi:

$$\frac{u_B[x(\vartheta_\theta)]}{|x|} = u(\varepsilon_\theta) \cdot \sqrt{\vartheta_{\theta 0}^2 + u^2(\vartheta_\theta)} = \frac{50 \text{ ppm}/^\circ\text{C}}{\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{7^2 + 0,25^2})^\circ\text{C} \approx 143 \text{ ppm}$$

Tak więc, przy założeniu takiego modelu rozkładu wartości temperatury, względna standardowa niepewność wynikająca z jej wpływu po zmierzeniu temperatury jest mniejsza od standardowej niepewności wyznaczonej na podstawie tylko a priori zadanych wartości. To samo, nawet w większym jeszcze stopniu, stosuje się do przyjęcia najgorszego rozkładu prawdopodobieństwa dla współczynnika wpływu wielkości oddziałującej na wynik pomiarów, na przykład temperaturowego współczynnika rezystora, o którym już pisano powyżej.

Przy kilku składowych, sumaryczny rozkład niepewności otrzymuje się jako spłot rozkładów dyskretnych.

Uwzględnienie korelacji pomiędzy składowymi niepewnościami

W praktyce pomiarowej, gdy niepewność wyniku pomiaru wielkości x ma kilka składowych, charakteryzowanych przez ich standardowe niepewności, to złożoną niepewność standardową oblicza się według wzoru:

$$u_c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_B^2[x(Q_i)] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m r_{ij} u_B[x(Q_i)] u_B[x(Q_j)]}$$

gdzie: r_{ij} – współczynniki korelacji pomiędzy składowymi niepewnościami pochodzącymi od wielkości wpływających.

Na podstawie posiadanej wiedzy często zakłada się, że składowe nie są ze sobą skorelowane ($r_{ij} = 0$) i wówczas wzór do obliczenia złożonej niepewności standardowej upraszcza się.

$$u_c(x) = \sqrt{u_B^2[x(Q_1)] + u_B^2[x(Q_2)] + \dots + u_B^2[x(Q_m)]}$$

Natomiast, jeśli przyjmie się najgorsze przypadki wszystkich współczynników korelacji ± 1 , to:

$$u_c(x) = u_B[x(Q_1)] + u_B[x(Q_2)] + \dots + u_B[x(Q_m)]$$

Należy odpowiedzieć na dwa pytania:

- 1) czy przyjmowanie braku korelacji wzajemnej jest zawsze prawidłowe?
- 2) w jakich przypadkach takie założenie może powodować nieprawidłowe obliczenie wartości złożonej niepewności standardowej?

Z definicji korelacji wynika, że jeśli dwie wielkości x oraz y są rzeczywiście ze sobą nieskorelowane, to przy nieskończonej liczbie n par (x_i, y_i) wyników pomiaru obliczona wartość współczynnika korelacji zdąży do zera [M1, M2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \bar{y}_n) (x_i - \bar{x}_n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \bar{y}_n)^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{x}_n)^2}} \rightarrow 0.$$

Jednak z teorii statystyki matematycznej wiadomo, że w razie skończonej liczby $n < \infty$ par wyników pomiaru istnieje różne od zera prawdopodobieństwo, że obliczona na podstawie tych par wartość współczynnika korelacji jest nie mniejsza od dowolnej wartości $|r_0| < 1$ lub w innej formie

$$P(|r_n| \geq |r_0|) \geq 0$$

Prawdopodobieństwo to można obliczyć ze wzoru [M1]

$$P(|r_n| \geq |r_0|) = \frac{2\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma((n-2)/2)} \int_{|r_0|}^1 (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dr$$

Jego wartości podaje tabela 2 zaczerpnięta z [M1, Dodatek C].

Obliczając złożoną niepewność standardową trzeba zakładać, że należy uwzględnić możliwość korelacji

Tabela 2. Wartość (%) prawdopodobieństwa, że wyniki n par pomiarów dwóch wielkości są nieskorelowane $P(|r_n| \geq |r_0|) \geq 0$ [M1]

n	r_0										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
3	100	93,6	87,2	80,6	73,8	66,7	59	50,6	41	28,7	0
4	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
5	100	87,3	74,7	62,4	50,5	39,1	28,5	18,8	10,4	3,7	0
6	100	85,1	70,4	56,4	43,2	31,3	20,8	12,1	5,6	1,4	0
7	100	83,1	66,7	51,3	37,4	25,3	15,4	8	3,1	0,6	0
8	100	81,4	63,5	47	32,6	20,7	11,6	5,3	1,7	0,2	0
9	100	79,8	60,6	43,3	28,6	17	8,8	3,6	1	0,1	0
10	100	78,3	58	40	25,2	14,1	6,7	2,4	0,5	0,0	0

między określonymi realizacjami składowych, nawet jeżeli zakłada się a priori, że nie są one ze sobą skorelowane, tj.:

$$u_c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_B^2[x(Q_i)] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m r_{ij}(n) u_B[x(Q_i)] u_B[x(Q_j)]}$$

Wartości współczynników korelacji będą zależne od liczby m sumowanych składowych niepewności

$$r_{ij} = r_{ij}(n)$$

Przy zwiększeniu liczby składników niepewności, wartości poszczególnych współczynników korelacji (jeżeli składowe nie są a priori nieskorelowane) będą się zmniejszać. W tym celu należy przeprowadzić dodatkowe badania statystyczne dla uzasadnienia zależności $r_{ij} = r_{ij}(n)$ oraz wyjaśnienia, jaka wartość współczynnika korelacji jest istotna.

Splot rozkładów prawdopodobieństwa

Warto jest rozważyć jeszcze sposób obliczania współczynnika rozszerzenia przy obliczaniu niepewności rozszerzonej, gdy złożona niepewność standardowa ma kilka składników. Teoretyczne rozwiązanie tego problemu polega na wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa $p[x(\Sigma Q_i)]$ dla łącznego wpływu składników pochodzących od wszystkich wielkości wpływających. Często w tym celu zakłada się statystyczną niezależność składników i poszukiwany rozkład prawdopodobieństwa $p[x(\Sigma Q_i)]$ oblicza się jako splot rozkładów tych składników [7], tj.:

$$p[x(\Sigma Q_i)] = p[x(Q_1)] * p[x(Q_2)] * p[x(Q_3)] \dots$$

Następnie na podstawie obliczonego splotu dla danego poziomu ufności p oblicza się współczynnik rozszerzenia k_p . Metodę tę zaleca się do stosowania w przypadku, kiedy liczba składowych jest stosunkowo mała, np. tylko 2 – 4 i gdy brakuje uzasadnienia dla przyjęcia rozkładu normalnego na podstawie twierdzenia granicznego [7]. Przy dowolnych rodzajach rozkładów prawdopodobieństwa dla poszczególnych wielkości lub parametrów wpływających na wynik, do obliczenia splotu rozkładów oraz wartości współczynnika rozszerzenia niezbędne są żmudne obliczenia. Ponieważ rzeczywiste rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wpływających (oraz ich parametry) są znane w dużym przybliżeniu (często z niepewnością nawet do 30–50 %, jak podawano to już powyżej), to sposób ten jest mało użyteczny w praktyce. Znaczenie tej metody jest raczej teoretyczne. Uwzględnienie niepewności rzeczywistych rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wpływających uzyskuje się przez obliczenie efektywnej liczby stopni swobody oraz uwzględnienie korelacji pomiędzy składowymi niepewnościami i można wyznaczać współczynnik rozszerzenia traktując rozkład wypadkowy jako normalny.

REKLAMA

Znajdziemy najlepszą ofertę Zapytania ofertowe w automatyka.pl*



Spytaj o dowolny produkt lub usługę.

W oparciu o zgromadzoną wiedzę i nabyte doświadczenie wyszukamy właściwą grupę firm, do których prześlemy Twoje zapytanie. Firmy prześlą odpowiedzi bezpośrednio do Ciebie. Spośród otrzymanych ofert wybierzesz najlepsze rozwiązanie.

Zaoszczędzisz czas i pieniądze.

Poznasz nowych dostawców.

Poznasz nowe rozwiązania

* Usługa bezpłatna
dla pytających

automatyka.pl
serwis branżowy xtech.pl

Wnioski do części 2

1. Podstawowym zadaniem w oszacowaniu niepewności metodą typu B jest założenie a priori rozkładów prawdopodobieństwa wartości wielkości wpływających oraz współczynników ich wpływu. Z pomiarowego punktu widzenia, jeżeli brakuje przekonujących danych o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa, a są znane tylko wartości graniczne wielkości wpływającej, to tzw. „najgorszy” z możliwych model tego rozkładu ma postać dwu funkcji delta Diraca usytuowanych w punktach o tych wartościach granicznych. Przy założeniu takiego modelu, we wszystkich przypadkach, gdy zmierzy się wartość wielkości wpływającej, niepewność wyniku będzie mniejsza od wartości niepewności bez przeprowadzenia takiego pomiaru.
2. Wirtualna randomizacja wartości wielkości wpływającej jest uzasadniona wtedy, gdy realizuje się nie jeden, a wiele eksperymentów pomiarowych i wielkość wpływająca w tych eksperymentach zmienia swoje wartości. Przy pojedynczym eksperymentcie przyjęcie modelu wirtualnej randomizacji wartości wielkości wpływającej prowadzi do zbyt optymistycznej oceny niepewności wyniku pomiaru.
3. Rzeczywista randomizacja w pojedynczym eksperymentcie pomiarowym występuje pomiędzy wartościami wielkości wpływających, jeśli jednocześnie oddziałują one na wynik pomiaru. Przy małej liczbie oddziaływań (składowych niepewności) konieczne należy uwzględnić możliwość statystycznej korelacji pomiędzy tymi oddziaływaniami, nawet wtedy, gdy uzasadnione jest przekonanie o niezależności wielkości wpływających.
4. Rzeczywiste rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wpływających (oraz ich parametry) są na ogół znane z dużym przybliżeniem, nawet często z niepewnością do 30 – 50 % i nie jest celowe, aby do wyznaczania wartości współczynnika rozszerzenia niepewności obliczać model sumarycznego rozkładu prawdopodobieństwa np. poprzez splot. Uwzględnienie niepewności rzeczywistych rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wpływających uzyskuje się przez obliczenie efektywnej liczby stopni swobody oraz uwzględnienie korelacji pomiędzy składowymi niepewnościami.

Historyczny przykład omyłki w ocenie wiarygodności wyniku pomiaru

Jeden z najwybitniejszych twórców teorii probabilistyki Laplace, po dokładnej analizie wyników obserwacji dotyczących parametrów ruchu Jowisza (Jupitera), wyznaczył, że stosunek masy Jowisza do masy Słońca równa się $1:1071$ ($<|\pm 1,0\%|$), z błędem względnym, który nie przekroczy wartości granicznej $\pm 1,0\%$. Proponował on zakład bukmacherski w stosunku **1000000:1**, że błąd względny nie przekroczy $\pm 1,0\%$.

Jak się później okazało, na podstawie obserwacji o większej dokładności, oraz uwzględnieniu innych czynników (które wcześniej nie zostały zauważone), stosunek tych mas różni się od wyznaczonego przez Laplace'a o ponad 2 %!

Niewątpliwie Laplace przegrałby zakład, jednak sprezygowano nowy wynik po jego śmierci.

Bibliografia

(numeracja wspólna do części 1 i 2)

1. Publikacja ISO, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, 1993–95.
2. *Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Tłumaczenie i komentarz*: J. Jaworski, Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar, Warszawa 1999, 2002.
7. Turzeniecka D.: *Analiza dokładności wybranych przybliżonych metod oceny niepewności*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1999.
16. Dorozhovets M.: Wybrane problemy praktycznej oceny błędów oraz niepewności wyników pomiaru. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Elektrotechnika 29, Nr 233, s. 9–44.

Bibliografia uzupełniająca

- [M1] Talor J.R.: *Wstęp do analizy błędów pomiarowego*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995 (tłumaczenie oryginału ang.: *An Introduction to error analysis. To study of uncertainty in measurements*. Mill Valley, California, 1982).
- [M2] Bendat J.S., Piersol A.G.: *Random Data. Analysis and measurement procedure*. John Wiley & Sonns. N.Y., Chichester..., 1986. (dostępne jest tłumaczenie na język polski wcześniejszego wydania: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, WNT Warszawa, 1976).

Errata części 1

PAR 1/2007 str. 23 kolumna lewa, „3. Ocena wartości standardowego...” podano niewłaściwy wzór wartości średniej, zamiast:

$$\bar{q} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} q_i = 1,240075$$

powinno być

$$\bar{q} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} q_i = 7,53113 \approx 7,531$$

REKLAMA ▼

