

# Synteza dynamicznie stabilnego chodu dwupodporowego czteronożnego robota kroczącego

## Rozważania teoretyczne (1)

Teresa Zielińska  
Maciej Trojnecki

Przedstawiono metodę wyznaczania sił reakcji podłoża działających na nogi robota. Dla dwupodporowego chodu diagonalnego robota czteronożnego rozwiązano zagadnienie równowagi sił i momentów, sprawdziliśmy warunek unikania poślizgu. Podano warunek utrzymania stabilnej postury z uwzględnieniem pracy elementów sprężystych zamocowanych w stopach.

**W**yznaczanie sił reakcji podłoża występujących w czasie chodu robotów kroczących jest zagadnieniem istotnym, o ile mamy na celu precyzyjną syntezę (opracowywanie) wzorca chodu, gdzie zadawane są nie tylko trajektorie ruchu końców nóg, ale też weryfikowana jest prawidłowość postury nóg, zakresy i prędkości ruchu. Wszystkie te czynniki wpływają nie tylko na wartości momentów napędowych, jakie muszą być rozwijane, ale też determinują stabilność postury całego robota. Naturalnym oczekiwaniem jest, że nogi nie powinny się ślizgać, czyli siły styczne do podłoża powinny być odpowiednio ograniczone.

Zagadnienie wyznaczania sił reakcji podłoża (czy też sił wywieranych przez nogi, co jest równoważne) od wielu lat skupia uwagę badaczy [2, 3, 4, 6, 9, 11, 12]. Niestety, nie istnieje jedyna i jednoznaczna metoda rozwiązania tego zagadnienia. Zamknięte łańcuchy kinematyczne, jakie tworzą nogi oraz podłoże skutkują tym, że zagadnienie sterowania siłą wywieraną przez nogi znajduje wiele możliwych rozwiązań (co ma odzwierciedlenie w momentach napędowych). Niektórzy badacze rozwiązując ten problem, przekładają zagadnienie obliczania siły na zadanie optymalizacji momentów napędowych [5]. Przy takim podejściu uwzględnia się warunki równowagi sił i momentów działających na maszynę, ale niestety zapomina się często o badaniu warunku unikania poślizgu. Warunek ten oznacza uwzględnienie ograniczonego stosunku wartości sił stycznych rozwijanych przez nogę do siły normalnej. W przeciwstawnym postawieniu zagadnienia uwzględniane są warunki ograniczenia poślizgu, ale nie ma optymalizacji momentów napędowych [4, 9, 10]. Jeszcze inni badacze modelują zjawisko kontaktu nogi i podłoża, przyjmując np. cechy sprężyste gruntu [6]. Rozwiązania uzyskane tymi różnymi metodami są formalnie poprawne i akceptowane w pracach naukowych. Rozpatrując aspekt aplikacyjny, należy podać ich wady. Po pierwsze rozwiązania minimalizujące momenty napędowe mogą skutkować uderzeniami nogi o podłoże oraz skokowymi wartościami sił, bowiem nie nakłada się tu ograniczeń na charak-

terystryki sił. Po drugie, rozwiązania uwzględniające jedynie warunek unikania poślizgu pozwalają skupić się na kształcie wykresów sił w funkcji czasu, ale często prowadzą do otrzymania zerowych wartości sił stycznych do podłoża, co nie jest obserwowane np. w czasie chodu człowieka czy owadów. Taki wynik jest rezultatem uproszczenia modelu dynamiki i nie wydaje się realistyczny. Po trzecie, rozwiązania wykorzystujące model podłoża, pomimo pozornej precyzyjności modelu, nie mają jednak znaczenia uniwersalności, bowiem podłoże jest niejednorodne i nawet na jednej nieutwardzonej ścieżce każda noga może napotkać istotnie różne warunki podparcia. Najwięcej prac z zakresu analizy sił dotyczy stabilnego statycznie chodu trójpodporowego w maszynach cztero- lub sześcionożnych [1, 4, 5, 9, 10]. Diagonalny chód dwupodporowy (pary nóg leżące po przekątnej korpusu poruszają się jednocześnie), gdzie istotna jest stabilizacja postury z uwzględnieniem sił bezwładności nie był badany. Taki chód umożliwia osiągnięcie największych prędkości ruchu w maszynach wielonożnych, bowiem zmniejszenie liczby podpierających nóg przy takich samych ograniczeniach prędkości napędów pozwala zwiększyć prędkość ruchu robota. Występowanie faz dwupodporowych jest też typowe dla chodu człowieka.

W niniejszej pracy przedstawiamy metodę wyznaczania sił wywieranych na nogi robota, bazując m.in. na wcześniejszych publikacjach [7, 8] dotyczących syntezy ruchu robota. W odróżnieniu od większości badaczy, pomijamy uproszczenia w modelu robota, uwzględniając siły bezwładności. Rozwiązujemy zagadnienie równowagi sił i momentów, sprawdzając warunek unikania poślizgu. Przedstawione wyniki badań zostały zweryfikowane w ruchu dwupodporowym czteronożnego robota kroczącego.

## Stabilność dynamiczna chodu dwupodporowego

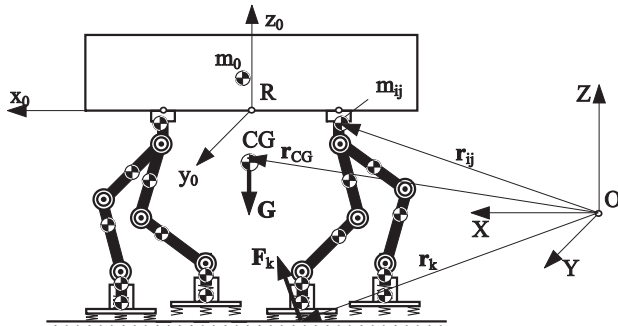
### Warunki równowagi

Zakładamy, że robot utrzymuje posturę stabilną i nie następuje jego obrót względem nieruchomego układu odniesienia OXYZ – rys. 1. Moment sił działających na robota względem tego układu odniesienia wynosi:

prof. dr inż. Teresa Zielińska, Politechnika  
Warszawska, dr inż. Maciej Trojnecki, Politechnika  
Rzeszowska

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{r}_0 \times m_0(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{g}) - \sum_i \sum_j [\mathbf{r}_{ij} \times m_{ij}(\ddot{\mathbf{r}}_{ij} + \mathbf{g})] + \mathbf{M}_E = \\
 & = -\mathbf{r}_{CG} \times m(\ddot{\mathbf{r}}_{CG} + \mathbf{g}) + \mathbf{M}_E = \mathbf{T}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

gdzie:  $i$  - numer członu robota w ramach danej nogi ( $i = 1 \dots 5$ ),  $j$  - numer nogi ( $j = 1 \dots 4$ ),  $m_0$  - masa korpusu,  $m_{ij}$  - masa punktowa członu  $i$  należącego do nogi  $j$ ,  $\mathbf{r}_0$  - wektor wskazujący środek masy korpusu,  $\mathbf{r}_{ij}$  - wektor wskazujący punkt o masie  $m_{ij}$  (środek masy członu  $ij$ ),  $\mathbf{g}$  - wektor grawitacji  $\mathbf{g} = [0, 0, g]^T$ ,  $m$  - masa całkowita robota,  $\mathbf{M}_E$  - moment zewnętrzny działający na układ maszyny.



Rys. 1. Rozkład mas robota i działające siły, OXYZ - nieruchomy układ odniesienia,  $Rx_0y_0z_0$  - układ związany z korpusem robota

Przy braku obrotów robota względem osi układu OXYZ, powinien działać moment pochodzący od sił reakcji stóp robota o wartości równoważącej moment  $\mathbf{T}$ :

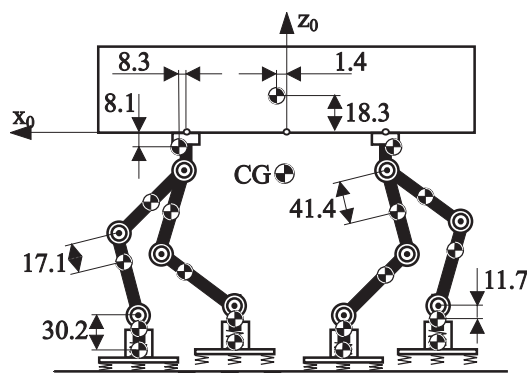
$$\sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = -\mathbf{T}
 \tag{2}$$

gdzie:  $k$  - numer podpierającej nogi,  $\mathbf{F}_k$  - siła reakcji działająca na tę nogę,  $\mathbf{r}_k$  wektor wskazujący punkt przyłożenia siły  $\mathbf{F}_k$ .

Siły reakcji podłoża muszą równoważyć wszystkie działające siły, o ile robot ma się nie przewracać:

$$\begin{aligned}
 \sum_k \mathbf{F}_k &= m_0(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{g}) + \sum_i \sum_j m_{ij}(\ddot{\mathbf{r}}_{ij} + \mathbf{g}) - \mathbf{F}_E = \\
 &= m(\ddot{\mathbf{r}}_{CG} + \mathbf{g}) - \mathbf{F}_E
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

gdzie:  $\mathbf{F}_E$  - siły zewnętrzne działające na robota.



Rys. 2. Rozkład mas robota

Wstawiając równanie (2) do równania (1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) &= \mathbf{r}_0 \times m_0(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{g}) + \\
 &+ \sum_i \sum_j [\mathbf{r}_{ij} \times m_{ij}(\ddot{\mathbf{r}}_{ij} + \mathbf{g})] - \mathbf{M}_E = \\
 &= \mathbf{r}_{CG} \times m(\ddot{\mathbf{r}}_{CG} + \mathbf{g}) - \mathbf{M}_E
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Dla maszyny kroczącej, poruszającej się chodem dwupodporowym, nieznanne są dwa wektory sił reakcji podłoża dla dwóch podpierających nóg. Siły te wyznaczamy wykorzystując równania wektorowe (3) i (4). Liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych.

### Uwzględnienie powierzchni stóp

Wiele badawczych wielonożnych robotów kroczących ma niewielkie stopy - wtedy założenie o punktowym kontakcie nogi i podłoża jest dobrym przybliżeniem. Niewielka powierzchnia stóp nie jest jednak dobrym rozwiązaniem, o ile rozważamy chód w naturalnym terenie, gdzie rozłożenie siły wywieranej przez stopę na większej powierzchni zmniejsza zapadanie się stóp. Należy też dodać, że roboty dwunożne, z wyjątkiem robotów skaczących, nigdy nie mają małych stóp.

W dalszej części pracy pokażemy i przeanalizujemy wyniki obliczeń sił uzyskane dla konkretnego robota czteronożnego, którego stopy zawierają sprężyny.

## Badanie stabilności dynamicznej chodu dwupodporowego

### Środek masy robota

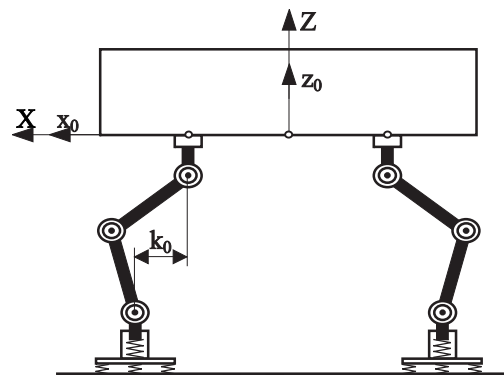
Współrzędne środka masy robota (CG) w układzie  $Rx_0y_0z_0$  wyznaczamy z zależności:

$$x_{CG} = \frac{m_0x_0 + \sum_i \sum_j m_{ij}x_{ij}}{m}
 \tag{5a}$$

$$y_{CG} = \frac{m_0y_0 + \sum_i \sum_j m_{ij}y_{ij}}{m}
 \tag{5b}$$

$$z_{CG} = \frac{m_0z_0 + \sum_i \sum_j m_{ij}z_{ij}}{m}
 \tag{5c}$$

gdzie:  $i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 4$ .



Rys. 3. Pozycja startowa robota

W tym celu masy rozłożone członów robota przybliżamy masami skupionymi w punktach. Rozkład tych mas pokazaliśmy na rys. 2, podając wymiary w milimetrach.

W przypadku 5. członu stopy robota do obliczeń przyjmujemy położenie jego środka masy odpowiadające maksymalnemu ugięciu sprężyny.

Zakładamy, że osie nieruchomego układu odniesienia OXYZ, związanego z podłożem, pokrywają się w pozycji startowej z osiami układu  $Rx_0y_0z_0$  układu związanego z korpusem – rys. 3.

Przez pozycję startową rozumiemy tutaj pozycję, w której korpus jest podniesiony do nominalnej wysokości  $H = 0,22$  m, a osie obrotu stóp są przesunięte do przodu lub tyłu względem osi obrotu nóg o  $k_0 = 0,015$  m. Przyjmujemy, że na robota nie działają dodatkowe siły i momenty zewnętrzne ( $\mathbf{M}_E = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}_E = \mathbf{0}$ ), co jest sytuacją typową.

### Warunki równowagi postury

Równania równowagi kinetostaticznej robota będziemy opisywać w układzie  $Rx_0y_0z_0$  związanym z korpusem robota. Możemy przedstawić je w postaci:

$$\sum_k \mathbf{F}_k = m(\ddot{\mathbf{r}}_{CG} + \mathbf{g}) = [-G_X, -G_Y, -G_Z]^T \quad (6a)$$

$$\sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{r}_{CG} \times m(\ddot{\mathbf{r}}_{CG} + \mathbf{g}) = [-M_X, -M_Y, -M_Z]^T \quad (6b)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:  $s1, s2$  to indeksy podpierających nóg, czyli  $k = \{s1, s2\}$ . W rozważanym chodzie dwupodporowym:  $s1 = 1, s2 = 4$  (w przypadku podparcia nogami 1 i 4), albo  $s1 = 2, s2 = 3$  (dla podparcia nogami 2 i 3).

Na podstawie równań (6) otrzymujemy równanie macierzowe

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z_{s1} & y_{s1} & 0 & -z_{s2} & y_{s2} \\ z_{s1} & 0 & -x_{s1} & z_{s2} & 0 & -x_{s2} \\ -y_{s1} & x_{s1} & 0 & -y_{s2} & x_{s2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} R_{Xs1} \\ R_{Ys1} \\ R_{Zs1} \\ R_{Xs2} \\ R_{Ys2} \\ R_{Zs2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -G_X \\ -G_Y \\ -G_Z \\ -M_X \\ -M_Y \\ -M_Z \end{bmatrix}$$

$R_{Xs1}, R_{Ys1}, R_{Zs1}, R_{Xs2}, R_{Ys2}, R_{Zs2}$  są szukanymi składowymi sił reakcji podłoża,  $I_{z0}$  jest masowym momentem bezwładności korpusu określonym względem osi  $z_0$ , a  $\ddot{y}$  – przyspieszeniem kątowym związanym z obrotem korpusu.

Jednak przy takim ujęciu problematyki rozkładu sił reakcji w przypadku ogólnym macierz  $\mathbf{A}$  jest osobliwa ( $\det(\mathbf{A}) = 0$ ,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 5$ ). Wynika to z faktu, że nie jest możliwe spełnienie równań równowagi kinetostaticznej przy pominięciu stóp, które kompensują pojawiające się momenty przechylające/pochylające robota, a w przypadku pojawienia się sił bezwładności  $G_X$  i  $G_Y$ , punkty przyłożenia sił reakcji podłoża są przesunięte względem osi obrotu stóp.

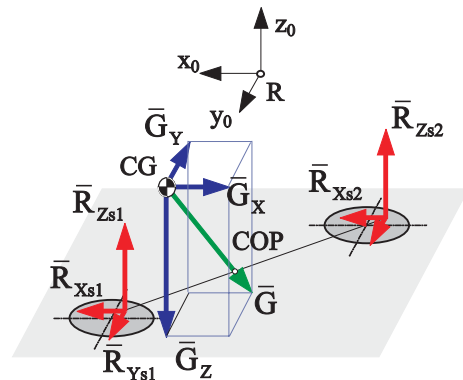
### Punkt środkowy nacisku (COP)

Składowe normalne sił reakcji podłoża możemy wyznaczyć, korzystając m.in. ze znajomości położenia punktu środkowego nacisku COP (*centre of pressure*).

Punkt COP powinien znajdować się we wnętrzu figury obrysowującej punkty podparcia (rys. 4).

Położenie tego punktu możemy wyznaczyć na podstawie znanych sił: ciężkości i bezwładności działających na środek masy robota, pomijając dodatkowe momenty pochodzące od sił zewnętrznych.

Mianowicie, w stanie równowagi kinetostaticznej suma sił ciężkości, bezwładności i sił reakcji będzie równa zeru, a linia działania wypadkowej siły  $\mathbf{G}$  pochodzącej od sił: ciężkości i bezwładności, działających na środek masy robota, powinna przecinać punkt COP.



Rys. 4. Ilustracja punktu środkowego nacisku (COP) i sił działających na robota

Z kolei siły reakcji stóp robota możemy zastąpić jedną siłą wypadkową, którą możemy zaczepić również w punkcie COP – będzie ona miała wartość równą sile wypadkowej  $\mathbf{G}$ , ale zwrot (znak) przeciwny.

Zakładamy, że  $z_{COP} = z_{s1} = z_{s2} = -H$ , gdyż przyjęliśmy, że robot porusza się po poziomej płaszczyźnie, nie ulegając przy tym przechyleniu i pochyleniu. Pomiędzy składowymi sił  $G_X$  i  $G_Y$ , a składową  $G_Z$  oraz pomiędzy odległościami punktów COP i CG na kierunkach osi  $x$  i  $y$ , a na kierunku osi  $z$  zachodzą następujące proporcje (rys. 4):

$$\frac{x_{COP} - x_{CG}}{H + z_{CG}} = \frac{G_X}{G_Z} \quad \frac{y_{COP} - y_{CG}}{H + z_{CG}} = \frac{G_Y}{G_Z} \quad (8)$$

stąd, współrzędne punktu COP określamy z równań:

$$x_{COP} = x_{CG} + \frac{G_X}{G_Z}(H + z_{CG}) \quad y_{COP} = y_{CG} + \frac{G_Y}{G_Z}(H + z_{CG}) \quad (9)$$

Dodatkowo możemy zauważyć, że z równowagi momentów pochodzących od wszystkich sił względem osi  $x'$  i  $y'$  równoległych do osi  $x_0$  i  $y_0$  oraz przechodzących przez punkt COP wynikają następujące równania:

$$R_{Zs1}(x_{s1} - x_{COP}) + R_{Zs2}(x_{s2} - x_{COP}) = 0 \quad (10a)$$

$$R_{Zs1}(y_{s1} - y_{COP}) + R_{Zs2}(y_{s2} - y_{COP}) = 0 \quad (10b)$$

stąd, współrzędne punktu COP spełniają równania:

$$x_{COP} = \frac{R_{Zs1}x_{s1} + R_{Zs2}x_{s2}}{R_{Zs1} + R_{Zs2}} \quad (11a)$$

$$y_{COP} = \frac{R_{Zs1}y_{s1} + R_{Zs2}y_{s2}}{R_{Zs1} + R_{Zs2}} \quad (11b)$$

### Punkty styczności

Ponieważ punkty przyłożenia sił reakcji, w przypadku ogólnym, są oddalone od osi obrotu stóp o nieznane wielkości  $dx_{s1}$ ,  $dy_{s1}$ ,  $dx_{s2}$  i  $dy_{s2}$ , więc możemy napisać, że:

$$x_{s1} = x_{Bs1} + dx_{s1} \quad y_{s1} = y_{Bs1} + dy_{s1} \quad (12a)$$

$$x_{s2} = x_{Bs2} + dx_{s2} \quad y_{s2} = y_{Bs2} + dy_{s2} \quad (12b)$$

gdzie  $x_{Bs1}$ ,  $y_{Bs1}$ ,  $x_{Bs2}$  i  $y_{Bs2}$  są znanymi współrzędnymi punktów  $B_{s1}$  i  $B_{s2}$  nóg robota.

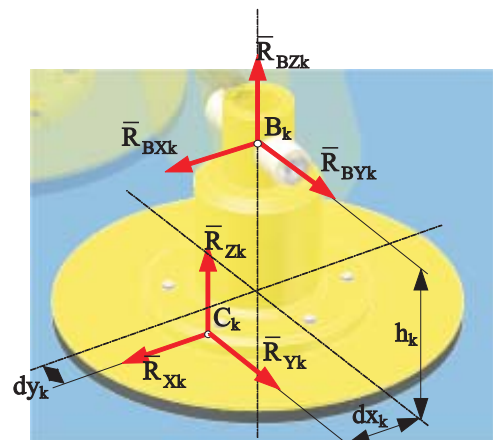
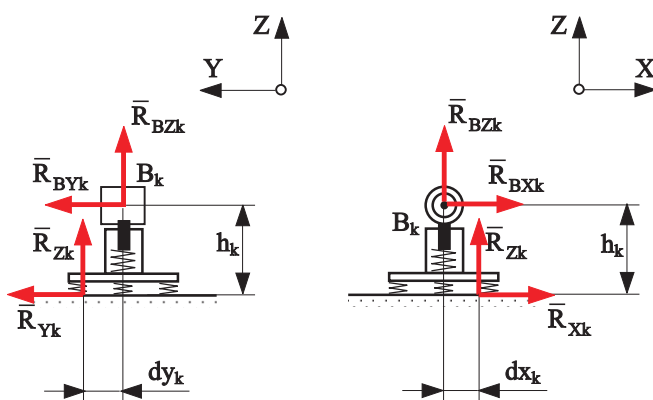
Na tej podstawie zapisujemy następujące równania:

$$\frac{y_{s1} - y_{s2}}{x_{s1} - x_{s2}} = \frac{(y_{Bs1} + dy_{s1}) - (y_{Bs2} + dy_{s2})}{(x_{Bs1} + dx_{s1}) - (x_{Bs2} + dx_{s2})} = \text{tg}\delta = a \quad (13a)$$

$$y_{COP} = a x_{COP} + b \quad y_{s1} = a x_{s1} + b \quad y_{s2} = a x_{s2} + b \quad (13b)$$

gdzie wielkości:  $a$ ,  $b$ ,  $\delta$  oznaczają odpowiednio: współczynniki kierunkowe prostej, na której znajdują się punkty styczności oraz kąt nachylenia tej prostej.

Należy zauważyć, że dla znanych wartości składowych sił reakcji  $R_{Zs1}$  i  $R_{Zs2}$  oraz współrzędnych  $z_{s1}$  i  $z_{s2}$  istnieje nieskończenie wiele rozwiązań wartości składowych sił reakcji  $R_{Xs1}$ ,  $R_{Ys1}$ ,  $R_{Xs2}$  i  $R_{Ys2}$  oraz współrzędnych  $x_{s1}$ ,  $y_{s1}$ ,  $x_{s2}$  i  $y_{s2}$ . Możemy wyznaczyć jedynie zbiór rozwiązań, np. zakładając wartości wybranych wielkości w zadanym przedziale.



Rys. 5. Ilustracja sił działających na stopę robota

### Momenty w punktach zamocowania stóp

Znając wysokość stopy  $h_k = h_{\min}$  ( $k = \{s1, s2\}$ ) i siły reakcji podłoża dla podpartych nóg robota, możemy wyznaczyć składowe momentów działające na stopy robota w punktach  $B_k$  (rys. 5).

Na rys. 5 zaznaczono składowe siły reakcji w punkcie  $B_k$  ( $k = \{s1, s2\}$ ) dla 3. członu nogi (goleni) oraz siły reakcji podłoża. Wiadomo, że pomiędzy tymi składowymi sił zachodzą związki:

$$R_{Xk} = R_{BXk}, R_{Yk} = R_{BYk}, R_{Zk} = R_{BZk} + (m_4 + m_5)g \quad (14)$$

Z kolei wartości pasywnych momentów przechylających i pochylających działających w punktach  $B_k$  zamocowania stóp możemy określić z zależności (rys. 5):

$$M_{BXk} = R_{Yk}h_k + R_{Zk}dy_k \quad (15a)$$

$$M_{BYk} = -R_{Xk}h_k - R_{Zk}dx_k = 0 \quad (15b)$$

pomijając występowanie sił tarcia w połączeniu ruchomym stopy i golenia.

### Rozkład sił reakcji podłoża

Wykorzystując układ równań:

$$R_{Xs1} + R_{Xs2} = -G_x, R_{Ys2} + R_{Ys1} = -G_y, \quad (16a)$$

$$-R_{Xs1}y_{s1} - R_{Xs2}y_{s2} + R_{Ys1}x_{s1} + R_{Ys2}x_{s2} = -M_z \quad (16b)$$

wyznaczamy zbiór rozwiązań, np. szukając składowe  $R_{Xs1}$ ,  $R_{Xs2}$  i  $R_{Ys1}$  sił reakcji podłoża i traktując składową  $R_{Ys2}$  jako parametr. W wyniku rozwiązania otrzymujemy:

$$R_{Xs1} = \frac{R_{Ys1}(x_{s1} - x_{s2}) + G_x y_{s2} - G_y x_{s2} + M_z}{y_{s1} - y_{s2}} \quad (17a)$$

$$R_{Xs2} = -\frac{R_{Ys1}(x_{s1} - x_{s2}) + G_x y_{s1} - G_y x_{s2} + M_z}{y_{s1} - y_{s2}} \quad (17b)$$

$$R_{Ys2} = -R_{Ys1} - G_y \quad (17c)$$

Natomiast korzystając z równań (11a), (15b) oraz

$$R_{Xs1} + R_{Xs2} = -G_x \quad (18a) \quad R_{Zs1} + R_{Zs2} = -G_z \quad (18b)$$

$$R_{Xs1}(z_{s1} - z_{s2}) - R_{Zs1}(x_{s1} - x_{s2}) = -M_y \quad (18c)$$

możemy wyznaczyć:

$$R_{Zs1} = -\frac{G_X h_{\min} + G_Z (x_{COP} - x_{Bs2})}{x_{Bs1} - x_{Bs2}} \quad (19a)$$

$$R_{Zs2} = \frac{G_X h_{\min} + G_Z (x_{COP} - x_{Bs1})}{x_{Bs1} - x_{Bs2}} \quad (19b)$$

$$R_{Xs1} = -\frac{G_Z (x_{COP} - x_{CG}) - G_X (z_{s2} - z_{CG})}{z_{s1} - z_{s2}} \quad (19c)$$

$$R_{Xs2} = \frac{G_Z (x_{COP} - x_{CG}) - G_X (z_{s1} - z_{CG})}{z_{s1} - z_{s2}} \quad (19d)$$

$$dx_{s1} = -\frac{[G_Z (x_{COP} - x_{CG}) - G_X (z_{s2} - z_{CG})](x_{Bs1} - x_{Bs2}) h_{\min}}{[G_Z (x_{COP} - x_{Bs2}) + G_X h_{\min}](z_{s1} - z_{s2})} \quad (19e)$$

$$dx_{s2} = -\frac{[G_Z (x_{COP} - x_{CG}) - G_X (z_{s1} - z_{CG})](x_{Bs1} - x_{Bs2}) h_{\min}}{[G_Z (x_{COP} - x_{Bs1}) + G_X h_{\min}](z_{s1} - z_{s2})} \quad (19f)$$

jednakże równania (19c-f) nie nadają się do symulacji komputerowej, gdyż w typowym przypadku  $z_{s1} = z_{s2}$  uzyskane rozwiązanie jest osobliwe. Możemy jednak wyznaczyć zbiór rozwiązań, traktując jedną z niewiadomych, np.  $dx_{s1}$  jako parametr.

### Rozkład sił reakcji podłoża w ruchu postępowym korpusu robota

W przypadku ruchu postępowego korpusu robota możemy przyjąć założenie upraszczające, że:

$$\frac{dx_{s1}}{dy_{s1}} = \frac{dx_{s2}}{dy_{s2}} \quad (20)$$

czyli że kierunki przesunięcia punktów styczności są takie same dla obu nóg.

Następnie korzystając z równań (11b), (15b), (20) oraz

$$R_{Xs1} + R_{Xs2} = -G_X \quad (21)$$

wyznaczamy:

$$dx_{s2} = \frac{G_X h_{\min} - R_{Zs1} dx_{s1}}{R_{Zs2}} \quad R_{Xs1} = -\frac{R_{Zs1} dx_{s1}}{h_{\min}} \quad (22a)$$

$$R_{Xs2} = \frac{R_{Zs1} dx_{s1} - G_X h_{\min}}{h_{\min}}$$

$$dy_{s1} = \frac{[R_{Zs1} (y_{COP} - y_{Bs1}) + R_{Zs2} (y_{COP} - y_{Bs2})] dx_{s1}}{G_X h_{\min}} \quad (22b)$$

$$dy_{s2} = -\frac{[R_{Zs1} (y_{COP} - y_{Bs1}) + R_{Zs2} (y_{COP} - y_{Bs2})] (R_{Zs1} dx_{s1} - G_X h_{\min})}{R_{Zs2} G_X h_{\min}} \quad (22c)$$

Podstawiając

$$dx_{s1} = \frac{G_X h_{\min}}{2R_{Zs1}} \quad (23)$$

do zbioru rozwiązań, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie w postaci:

$$dx_{s1} = \frac{G_X h_{\min}}{2R_{Zs1}} \quad dy_{s1} = \frac{R_{Zs1} (y_{COP} - y_{Bs1}) + R_{Zs2} (y_{COP} - y_{Bs2})}{2R_{Zs1}} \quad (24a)$$

$$R_{Xs1} = -\frac{G_X}{2}$$

$$dx_{s2} = \frac{G_X h_{\min}}{2R_{Zs2}} \quad dy_{s2} = \frac{R_{Zs1} (y_{COP} - y_{Bs1}) + R_{Zs2} (y_{COP} - y_{Bs2})}{2R_{Zs2}} \quad (24b)$$

$$R_{Xs2} = -\frac{G_X}{2}$$

Uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest jednym z możliwych. Następnie z równań:

$$R_{Ys1} + R_{Ys2} = -G_Y \quad (25a)$$

$$-R_{Xs1} y_{s1} - R_{Xs2} y_{s2} + R_{Ys1} x_{s1} + R_{Ys2} x_{s2} = -M_Z \quad (25b)$$

wyznaczamy brakujące składowe  $R_{Ys1}$  i  $R_{Ys2}$  sił reakcji podłoża w postaci:

$$R_{Ys1} = \frac{R_{Xs1} y_{s1} + R_{Xs2} y_{s2} + G_Y x_{s2} - M_Z}{x_{s1} - x_{s2}} \quad (26a)$$

$$R_{Ys2} = -\frac{R_{Xs1} y_{s1} + R_{Xs2} y_{s2} + G_Y x_{s1} - M_Z}{x_{s1} - x_{s2}} \quad (26b)$$

### Rozkład sił reakcji podłoża w ruchu obrotowym korpusu robota

Dla ruchu obrotowego korpusu robota przewidujemy, że rozkład składowych stycznych sił reakcji (leżących w płaszczyźnie podparcia) będzie mieć postać pokazaną na rys. 6, a siły  $G_X$  i  $G_Y$  będą równe zero, gdyż nogi robota będą przemieszczać się symetrycznie względem środka geometrycznego korpusu. W tym przypadku, przyjmując kolejne założenie upraszczające, że  $dy_{s1} = dy_{s2}$ , co jest równoważne z przyjęciem również założenia, że  $dx_{s1} = dx_{s2}$  i korzystając z równań (11), (12) i (13), otrzymujemy rozwiązanie na  $a$ ,  $b$ ,  $dx_{s1}$ ,  $dy_{s1}$ ,  $dx_{s2}$  i  $dy_{s2}$  w postaci:

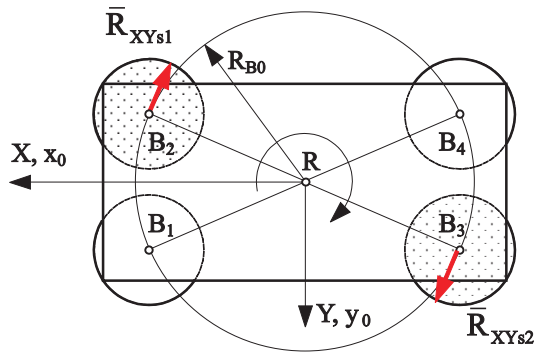
$$a = \frac{y_{Bs1} - y_{Bs2}}{x_{Bs1} - x_{Bs2}} \quad b = \frac{y_{COP} (x_{Bs1} - x_{Bs2}) - x_{COP} (y_{Bs1} - y_{Bs2})}{x_{Bs1} - x_{Bs2}} \quad (27)$$

$$dx_{s1} = dx_{s2} = \frac{R_{Zs1} (x_{COP} - x_{Bs1}) + R_{Zs2} (x_{COP} - x_{Bs2})}{R_{Zs1} + R_{Zs2}} \quad (28a)$$

$$dy_{s1} = dy_{s2} = \frac{R_{Zs1}(y_{COP} - y_{Bs1}) + R_{Zs2}(y_{COP} - y_{Bs2})}{R_{Zs1} + R_{Zs2}} \quad (28b)$$

Uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest jednym z możliwych rozwiązań, pozwalającym znaleźć szukane odległości i współczynniki kierunkowe prostej łączącej punkty podparcia.

Dla znanych już wartości  $d_{xs1}$ ,  $d_{ys1}$ ,  $d_{xs2}$  i  $d_{ys2}$  wyznaczamy współrzędne  $x_{s1}$ ,  $y_{s1}$ ,  $x_{s2}$  i  $y_{s2}$  korzystając z równań (12).



Rys. 6. Rozkład składowych stycznych sił reakcji podłoża w trakcie obrotu korpusu robota

Z rys. 6 wynika, że pomiędzy składowymi  $R_{Xk}$  oraz  $R_{Yk}$  ( $k = \{s1, s2\}$ ) zachodzą zależności:

$$\frac{R_{Xk}}{R_{Yk}} = -\frac{y_k}{x_k} \quad (29)$$

Korzystając z równań (17) i z zależności (29) oraz zakładając  $G_X = 0$ ,  $G_Y = 0$ , możemy w sposób jednoznaczny określić składowe styczne sił reakcji podłoża jako:

$$R_{Xs1} = \frac{M_Z y_{s1}}{(y_{s1} - y_{s2})y_{s1} + (x_{s1} - x_{s2})x_{s1}} \quad (30a)$$

$$R_{Xs2} = \frac{-M_Z y_{s1}}{(y_{s1} - y_{s2})y_{s1} + (x_{s1} - x_{s2})x_{s1}} \quad (30b)$$

$$R_{Ys1} = \frac{-M_Z x_{s1}}{(y_{s1} - y_{s2})y_{s1} + (x_{s1} - x_{s2})x_{s1}} \quad (30c)$$

$$R_{Ys2} = \frac{M_Z x_{s1}}{(y_{s1} - y_{s2})y_{s1} + (x_{s1} - x_{s2})x_{s1}} \quad (30d)$$

Występujący w równaniach (30) moment  $M_Z$  będzie związany m.in. z masowym momentem bezwładności określonym względem osi  $z_0$  i przyspieszeniem kątowym występującym przy obrocie korpusu. Uzyskane w wyniku rozwiązania odległości  $dx_{s1}$ , i  $dx_{s2}$  oraz składowe sił reakcji  $R_{Xs1}$  i  $R_{Xs2}$  nie spełniają równania (15b), jednakże z uwagi na małe wartości składowych stycznych sił reakcji podłoża i fakt pominięcia sił tarcia w połączeniu ruchomym stóp robota z goleniami, rozwiązanie to jest wystarczająco dokładne do celów praktycznych.

Mając wyznaczone składowe sił reakcji podłoża oraz znając położenie punktów styczności możemy na podstawie równania (15a) określić wartość momentu  $M_{BXk}$  ( $k = \{s1, s2\}$ ), który jest przenoszony przez konstrukcję stóp.

### Siły w sprężynach

W stopach robota znajdują się wyłączniki chwilowe ze sprężynami, możemy więc uwzględnić zmianę reakcji pionowej przy przejściu z fazy przenoszenia do fazy podporowej i na odwrót. Zależność pomiędzy deformacją sprężyny a działającą siłą zapisujemy jako:

$$R_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } h_j = h_{\max} \\ k_s (h_{\max} - h_j) & \text{dla } h_{\min} < h_j < h_{\max} \\ R_{Zj} - m_s g & \text{dla } h_j = h_{\min} \end{cases} \quad (31)$$

przy czym stała sprężyny  $k_s \approx 2000$  N/m,  $j$  – numer nogi robota,  $R_j$  – siła przenoszona przez sprężynę,  $h_j$  – aktualna wysokość stopy,  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$  – minimalna i maksymalna wysokość stopy.

Zakładamy, że dana stopa robota znajduje się w fazie podparcia, jeżeli deformacja sprężyny jest maksymalna (wyłącznik jest zwarty), czyli jeżeli:

$$R_j \geq R_{\min} = k_s (h_{f\max} - h_{f\min}) = 3 \text{ N} \quad (32)$$

W przypadku, gdy dana noga jest przenoszona, ale styka się z podłożem, możemy z zależności (31) obliczyć dla niej siłę reakcji w sprężynie, a następnie uwzględnić tę siłę przy określaniu sił reakcji dla nóg będących w fazie podparcia. Możemy zatem rozszerzyć wektor  $\mathbf{b}$  w równaniu (7) o siły reakcji nóg będących w fazie przenoszenia.

Wysokości stóp dla przenoszonych nóg robota obliczymy z zależności:

$$h_l = \begin{cases} h_{\max} & \text{dla } H + z_{Bl} \geq h_{\max} \\ H + z_{Bl} & \text{dla } h_{\min} < H + z_{Bl} < h_{\max} \\ h_{\min} & \text{dla } H + z_{Bl} \leq h_{\min} \end{cases} \quad (33)$$

gdzie:  $l$  – numer przenoszonej nogi. Oznaczamy indeksy nóg będących w fazie przenoszenia jako  $t1$  i  $t2$ , czyli  $l = \{t1, t2\}$ . W analizowanym przypadku chodu diagonalnego  $t1 = 1, t2 = 4$ , gdy przenoszone są nogi 1 i 4 lub  $t1 = 2, t2 = 3$ , jeżeli przenoszone są nogi 2 i 3.

Wartości sił w sprężynach wyznaczamy na podstawie zależności (31) i znanych wysokości stóp:

$$R_l = k_s (h_{\max} - h_l) \quad (34)$$

Pomijając składowe styczne, składowe normalne sił reakcji podłoża dla przenoszonych nóg, ale stykających się z podłożem, obliczymy jako:

$$R_{Zl} = R_l + m_s g \quad (35)$$

Znając wartości sił w sprężynach styczników umieszczonych w stopach, określimy także, czy w danej chwili czasu odpowiedni stycznik jest zwarty czy rozzwarty. Mianowicie, stycznik będzie zwarty, jeżeli siła w sprężynie będzie większa lub równa  $R_{\min}$ , zgodnie z zależnością (32).

*Praca była finansowana przez Uczelniany Program Badawczy Politechniki Warszawskiej „Heterogeniczna sieć współpracujących robotów mobilnych”.*

## Bibliografia

1. Albiez J.C., Luksch T., Berns K., Dillmann R.: *Reactive reflex-based control for a four-legged walking machine*, Robotics and Autonomous Systems 44 (2003), 181-189.
2. Gardner J.F.: *Efficient computation of force distribution for walking machines on rough terrain*, Robotica 10 (5) (1992) 427-433.
3. Klein C.A, Kittivatcharapong S.: *Optimal force distribution for the legs of a walking machine with friction cone constraints*, IEEE Transactions on Robotics and Automation 6 (1) (1990) 73-85.
4. Martins-Filho L.S., Prajoux R.: *Locomotion control of a four-legged robot embedding real-time reasoning in the force distribution*, Robotics and Autonomous Systems 32 (2000), 219-235.
5. Pfeiffer F., Eltze J., Weidemann H.J.: *Six-legged Walking Considering Biological Principles*, Robotics and Autonomous Systems 1995, vol. 14, 223-232.
6. Takemura H., Deguchi M., Ueda J., Matsumoto Y., Ogasawara T.: *Slip-adaptive walk of quadruped robot*, Robotics and Autonomous Systems 53 (2005), 124-141.
7. Trojnacki M.: *Opis ruchu czteronożnego robota kroczącego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Nr 222, Rzeszów 2005, 357-364.
8. Trojnacki M.: *The modeling, programming and computer simulation of motion for a four-legged robot*, Projektowanie Mechatroniczne, Praca zbior. pod red. T. Uhla, Wydawnictwo Katedry Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH, Kraków 2006, 149-160.
9. Zhou D., Low K.H., Zielińska T.: *An efficient foot-force distribution algorithm for quadruped walking robots*, Robotica (2000) vol. 18, 403-413.
10. Zielińska T.: *Maszyny kroczące*, PWN, Warszawa 2003.
11. Zielińska T., Heng J.: *Development of a walking machine: mechanical design and control problems*, Mechatronics 12 (2002), 737-754.
12. Zielińska T., Trojnacki M.: *Czteronożny robot kroczący: analiza ruchu z uwzględnieniem interakcji nóg z podłożem*, Pomiary Automatyka Robotyka 2/2007. ■