Dokładność pomiarów przemysłowymi czujnikami temperatury Pt 100 w układzie mostka niezrównoważonego

Zygmunt Lech Warsza

Po krótkim wstępie zdefiniowano błąd wartości początkowej i błąd przyrostu rezystancji czujnika zmiennej w dużych granicach oraz wyznaczono dla nich zależności jako funkcje rezystancji. Przedstawiono przebiegi wartości granicznych tych błędów dla przemysłowych czujników temperatury Pt 100 klasy A i B na podstawie ich tolerancji określonych w normie. Podano wzory dla miar dokładności rozwarciowego współczynnika przetwarzania prądu na napięcie dla czteroramiennego mostka rezystancyjnego (4R), tj. jego błędy bieżące, systematyczne graniczne i miary losowe średniokwadratowe (błędy przypadkowe i niepewności pomiarowe) w przypadku ogólnym i przy tylko dwu lub jednym ramieniu zmiennym. Wyznaczono błędy graniczne dla pomiarów temperatury czujnikami przemysłowymi Pt 100 w pełnym ich zakresie z uwzględnieniem błędów ramion mostka 4R w kilku przypadkach, tj.: bez regulacji zera, z regulacją zewnętrzną, wewnętrzną i przy pomijalnych błędach początkowych.

Na wejściu torów pomiarowych wielu inteligentnych przetworników i systemów pomiarowych stosuje się układ niezrównoważonego mostka rezystancyjnego, pasywnego lub aktywnego. Układ ten przetwarza zmiany parametrów różnych czujników immitancyjnych na stosunek jego napięcia wyjściowego do prądu lub napięcia zasilającego. Służy więc do wytworzenia sygnałów tych czujników i wstępnego analogowego ich kondycjonowania. Jest preferowany ze względu na prostotę, łatwe ustawianie początku zakresu jako stanu równowagi układu oraz dogodną regulację czułości poprzez zmianę zasilania.

W przemysłowych pomiarach temperatury wykorzystuje się dość powszechnie platynowe czujniki rezystancyjne, które również pracują w takich układach wejściowych. Rezystancje lub konduktancje (a przy prądzie przemiennym– składowe immitancji) wielu czujników, w tym i czujników Pt, zmieniają się w dużych granicach. Dokładność pomiarów zależy w sposób uwikłany od dokładności czujników i dokładności parametrów mostka. W literaturze fachowej można znaleźć analizę dokładności mostków niezrównoważonych jedynie przy różnych uproszczeniach, takich jak małe przyrosty ich rezystancji od stanu równowagi. Poniżej, bez takich ograniczeń, zostaną wyznaczone napięcie wyjściowe i miary dokładności czteroramiennego pasywnego mostka rezystancyjnego (4R), pracującego przy zasilaniu prądowym i bez obciążenia na wyjściu, dla ogólnego przypadku dowolnych wszystkich jego rezystancji początkowych i ich zmian oraz przy częściowej lub pełnej symetrii wartości początkowych tych rezystancji. Mostek z zasilaniem prądowym jest częściej stosowany niż z zasilaniem napięciowym, gdyż umożliwia uzyskanie w pełni liniowej charakterystyki dla dwu czujników o jednakowych względnych przyrostach rezystancji i bardziej liniowej dla czujnika pojedynczego. Następnie będą obliczone błędy graniczne dla kilku wariantów realizacji układu pomiarowego tego mostka z przemysłowym czujnikiem Pt 100 klasy A i B dla jednakowego zakresu dodatniej temperatury. Porównane zostaną dla układu bez korekcji zera, z korekcją zera wewnętrzną w mostku lub na zewnętrz niego oraz przy pomijalnych błędach początkowych rezystancji ramion mostka. Aby nie komplikować rozważań, rezystancje przewodów doprowadzających przyjęto jako równe zeru. Wnioski z tego porównania powinny zainteresować praktyków.

Do analizy wykorzystany będzie jednolity uogólniony opis właściwości metrologicznych układów o czterech zaciskach (4T), które autor przedstawił m.in. w [1] i [2], w monografii [3] i rozwinął dalej w publikacjach [4, 5].

Sposoby opisu dokładności

Dla parametrów o wartościach stałych miary dokładności są pojedynczymi liczbami, a dla parametrów zmiennych stają się funkcjami ich wartości. Dokładność układu pomiarowego zależy od wartości i do-

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza – Polskie Towarzystwo Metrologiczne, Warszawa

kładności jego parametrów, od warunków otoczenia oraz od danych metrologicznych przyrządów użytych lub przewidywanych do stosowania w pomiarach. Wyznaczanie zależności opisujących dokładności układów i urządzeń pomiarowych oraz wyznaczanie dokładności pomiarów nimi wykonywanych różnią się w sposób istotny. W pierwszym przypadku można posługiwać się błędami pomiarowymi określanymi względem znamionowych wartości wielkości mierzonej i wpływających parametrów. Natomiast w drugim – wartości rzeczywiste wielkości mierzonej i parametrów wpływających nie są znane i wyznacza się tzw. rozszerzoną niepewność wyniku pomiarów wg zaleceń międzynarodowego przewodnika ISO o akronimie GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*). Oba rodzaje analizy dokładności wykonuje się na podstawie pełnego równania pomiaru. W tym celu:

- z różniczki zupełnej tego równania wyznacza się związek dla małych przyrostów wielkości mierzonej i parametrów wpływających. Nadając tym przyrostom sens fizyczny błędów, otrzymuje się **równanie propagacji** błędów, czyli zależność **bieżącego błędu wielkości mierzonej** od błędów tych parametrów
- szacuje się maksymalne granice obszaru występowania błędów poprzez **błędy graniczne**
- na podstawie równania propagacji określa się wzory dla **miar losowych** i przedziały ich występowania o zadanym prawdopodobieństwie, np. przedział 3б dla błędów przypadkowych lub przedziały niepewności pomiarowych o współczynniku rozszerzenia 2 lub 3.

Propozycje rozszerzenia i udoskonalenia metod wyznaczania niepewności pomiarów przedstawiono szczegółowo w PAR 1 i 2/2007 i w PAR 7–8/2008.

Opis dokładności rezystancji zmiennych w dużych granicach

Miary dokładności opisuje się w wartościach bezwzględnych lub bardziej poglądowo – w wartościach względnych liczonych w różny sposób, w odniesieniu np. do wartości nominalnej, wartości początkowej lub zakresu zmian każdego z parametrów, a niepewności opisuje się w wartościach względnych odniesionych do wyniku pomiaru. Dla wielkości zmiennej w dużych granicach, miary te podaje się jako jej funkcję lub dwuskładnikowo, tj. dla wartości początkowej i jako zależność od przyrostu tej wielkości. Ten sposób jest powszechnie stosowany w opisach dokładności przetworników, czujników i przyrządów cyfrowych. Zastosuje się tutaj pewną jego modyfikację. Dokładność czujników zostanie opisana przez miary ich parametrów stałych i zmiennych występujących w układzie pomiarowym. Rozważania stają się uogólnione jako niezależne od charakterystyki czujnika.

Zmienną rezystancję R_i czujnika można opisać za pomocą dwu parametrów jako

$$R_i = R_{i0}(1+\varepsilon_i) \tag{1}$$

gdzie: R_{i0} – początkowa stała wartość rezystancji dla temperatury odniesienia, zwykle $T_0 = 0$ °C, ε_i – przyrost względny rezystancji czujnika ($-1 < \varepsilon_i < +\infty$).

Znamionowa charakterystyka i jej tolerancje dla wielu czujników są znormalizowane. Dla czujników Pt 100 zależy ona w przybliżeniu liniowo od różnicy mierzonej temperatury $T-T_0$.

Z różnicy rzeczywistej i znamionowej wartości rezystancji wyrażonych równaniem (1) otrzymuje się zależność między błędami bezwzględnymi parametrów rezystancji R_i.

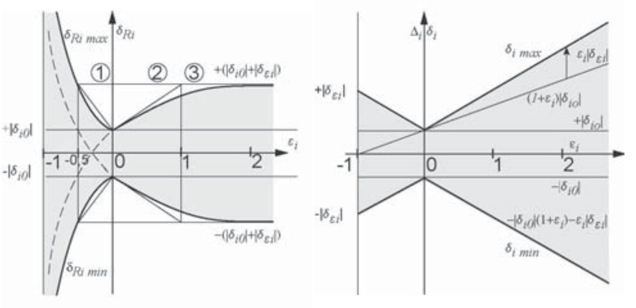
$$\Delta_i = \Delta_{i0}(1+\varepsilon_i) + R_{i0}\Delta_{\varepsilon i} + \Delta_{i0}\Delta_{\varepsilon i} \tag{2}$$

Ostatni składnik, jako iloczyn dwu małych wielkości jest pomijalny. Błąd względny można wówczas przedstawić w dwu postaciach

$$\delta_{Ri} = \delta_{i0} + \frac{\Delta_{\varepsilon i}}{1+\varepsilon_i} = \delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\delta_{\varepsilon i} \tag{2a}$$

gdzie: $\delta_{Ri} = \dfrac{\Delta_i}{R_i}$, $\delta_{i0} = \dfrac{\Delta_{i0}}{R_{i0}}$, $\delta_{\varepsilon i} = \dfrac{\Delta_{\varepsilon i}}{\varepsilon_i}$ – błędy względne rezystancji R_i, jej wartości początkowej R_{i0} i jej przyrostu względnego ε_i odniesione do wartości znamionowych tych parametrów.

Dla małych przyrostów ε_i drugi składnik w (2a) staje się pomijalny.



Rys. 1. Obszary występowania błędów względnych δ_{Ri}, δ_i rezystancji R_i przy stałych błędach granicznych $|\delta_{i0}|$ i $|\delta_{\varepsilon i}|$ jej wartości początkowej R_{i0} i przyrostu ε_i

Błędy zmiennej rezystancji R_i mogą różnie przebiegać w funkcji jej wartości. Jeśli byłyby znane bieżące wartości i znaki błędów δ_{i0} i $\delta_{\varepsilon i}$, to z (2a) można by wyznaczać w czasie rzeczywistym błąd δ_{Ri}. Nawet przy obecnych możliwościach przetwarzania sygnałów byłoby to jednak zbyt uciążliwe w realizacji. Dlatego szacuje się obustronne granice obszarów występowania błędów. Zwykle przyjmuje się, że są one rozmieszczone symetrycznie. Moduły tych granic, czyli błędy graniczne, oznacza się odpowiednio jako $|\Delta_{i0}|$ i $|\delta_{i0}|$ oraz $|\Delta_{\varepsilon i}|$ i $|\delta_{\varepsilon i}|$. Jeśli błąd δ_{i0} wartości początkowej R_{i0} i błąd $\delta_{\varepsilon i}$ przyrostu ε_i są od siebie niezależne, to z (2a) dla najgorszego przypadku otrzymuje się wypadkowe – bezwzględny i względny – **błędy graniczne rezystancji** R_i jako

$$|\Delta_i| = |\Delta_{i0}|\,(1+\varepsilon_i)+R_{i0}\,|\Delta_{\varepsilon i}| \tag{3}$$

$$|\delta_{Ri}| = |\delta_{i0}| + \frac{|\Delta_{\varepsilon i}|}{1+\varepsilon_i} = |\delta_{i0}| + \frac{|\varepsilon_i|}{1+\varepsilon_i}\,|\delta_{\varepsilon i}| \tag{3a}$$

Błąd $|\delta_{Ri}|$ jako iloraz $|\Delta_i|$ i R_i, wraz ze wzrostem $\varepsilon_i>0$ zmienia się mniej niż liczony do wartości początkowej tej rezystancji błąd

$$|\delta_i| = \frac{|\Delta_i|}{R_{i0}} = (1+\varepsilon_i)\,|\delta_{Ri}| \tag{3b}$$

Jeśli błędy $|\Delta_{\varepsilon i}|$ lub $|\delta_{\varepsilon i}|$ niewiele zmieniają się wraz z przyrostem ε_i to w uproszczeniu można przyjąć dla kilku przedziałów lub całego zakresu zmian rezystancji R_i stałe średnie lub maksymalne dopuszczalne ich wartości. Nawet wówczas granice $\pm|\delta_{Ri}|$ oraz $\pm|\Delta_i|$ obszaru występowania błędów rezystancji R_i zmieniają się z ε_i. Ilustruje to rys. 1a i 1b. Dla $\varepsilon \to \infty$ granice błędu δ_{Ri} wynoszą $\pm|\delta_{Ri}|_{max}$, gdzie:

$$|\delta_{Ri}|_{max} = |\delta_{i0}| + |\delta_{\varepsilon i}| \equiv |\delta| \tag{3c}$$

Błąd graniczny $|\Delta_i|$ zależy od błędu początkowego $|\Delta_{i0}|$. Jeśli dane są wartości obu tych błędów, np. tak, jak w normie [6] dla czujników Pt w postaci wykresu ich tolerancji, to względny błąd graniczny $|\delta_{\varepsilon i}|$ przyrostu względnego ε_i wylicza się następująco:

$$|\delta_{\varepsilon i}| = \left(\frac{|\Delta_i|}{R_i} - \frac{|\Delta_{i0}|}{R_{i0}}\right)\frac{1+\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \tag{3d}$$

Dla małych różnic pomiędzy składnikami w nawiasie (3d) dokładność wyznaczenia $|\delta_{\varepsilon i}|$ znacznie maleje.

Podstawowe miary oceny parametru o charakterze losowym – to jego wartość średnia i jej odchylenie średniokwadratowe. Jeśli parametr zależy od kilku zmiennych losowo wielkości wpływających o różnych rozkładach prawdopodobieństwa, to zwykle wyznacza się miarę losową jego dokładności jako odchylenie średniokwadratowe na podstawie standardowych odchyleń miar tych wielkości i ich współczynników wagi. Przedział miary losowej o zadanym maksymalnym prawdopodobieństwie szacuje się dla rozkładu wypadkowego, który jest splotem rozkładów poszczególnych wielkości. Z (2a) wynika postać standardowego **błędu przypadkowego** (lub **niepewności pomiarowej**) rezystancji R_i:

$$\bar{\delta}_{Ri} \equiv \frac{\bar{\Delta}_i}{R_i} = \sqrt{\bar{\delta}_{i0}^{\,2} + \left(\tfrac{1}{1+\varepsilon_i}\right)^2 \bar{\Delta}_{\varepsilon i}^{\,2} + 2k_i \tfrac{1}{1+\varepsilon_i}\bar{\delta}_{i0}\,\bar{\Delta}_{\varepsilon i}} \tag{4}$$

gdzie: $\bar{\delta}_{i0}$, $\bar{\delta}_{\varepsilon i}$ – miary standardowe wartości początkowej i przyrostu rezystancji R_i, $k_i \subset (-1...0...+1)$ – ich współczynnik korelacji.

Wartość współczynnika korelacji k_i jest bądź szacowana, bądź wyznaczana z wyników pomiaru. Rozpatruje się zazwyczaj tylko dwie sytuacje graniczne:

– silne skorelowanie, gdy $k_i=\pm1$ oraz

– jego brak, gdy $k_i=0$.

W pierwszym przypadku wzór (4) upraszcza się do sumy lub do wartości bezwzględnej z różnicy błędów składowych wraz z ich wagami (kwadrat dwumianu), a w drugim – do pierwiastka z sumy ich kwadratów.

Rozrzuty parametrów czujników platynowych w stosunku do charakterystyki znamionowej wynikają z braku powtarzalności w procesie wytwarzania. Wartość początkowa R_{i0} zależy od wymiarów i rezystywności materiału czujnika, a względne nachylenie i przebieg charakterystyki termometrycznej tylko od wahań tej rezystywności, czyli od czystości materiału. Błędy te mają wartość stałą dla poszczególnych egzemplarzy, ale wyznacza się też średnie i graniczne ich wartości dla serii produkcyjnej. Składniki miar dokładności we wzorach (2 do 4) mogą znacznie różnić się wartością. Często dominuje jeden z nich.

Wahania losowe bieżących wyników pomiaru wartości rezystancji czujnika zależą nie tylko od zmian jego temperatury, ale i od wpływu temperatury otoczenia wzdłuż całego toru pomiarowego wraz z przewodami doprowadzającymi oraz od innych źródeł zakłóceń i zmian parametrów toru. Nie są one skorelowane z rozrzutami produkcyjnymi, do ich oceny stosuje się niepewność składową typu A. Natomiast dane o dokładności czujnika wykorzystuje się przy szacowaniu niepewności typu B.

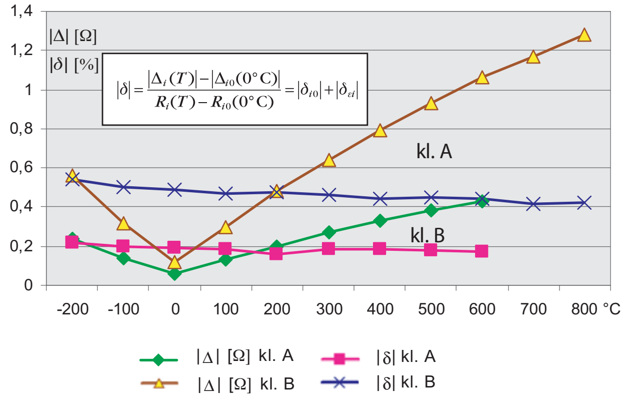
Dokładność czujników przemysłowych Pt 100

Wartość początkowa R_{i0} rezystancji czujników Pt 100 zależy od kształtu, wymiarów i rezystywności elementu platynowego, a przebieg charakterystyki tylko od czystości platyny. Charakterystyka znamionowa przemysłowych czujników Pt 100 jest znormalizowana. W przybliżeniu zależy ona liniowo od różnicy temperatury T–T_0. Dopuszczalne tolerancje znamionowej charakterystyki termometrycznej przemysłowych czujników Pt 100 klas A i B zawiera norma PN-EN 60751+A2; 1997 [6, 7]. Podano je w °C i jako bezwzględne wartości rezystancji $|\Delta_i|$ narastające z temperaturą w obie strony od wartości dla T_0 = 0 °C. Na rys. 2 przedstawiono ich przebiegi jako $|\Delta|$ kl. A i $|\Delta|$ kl. B. Są one zbliżone kształtem do błędu granicznego $|\Delta_i|$ z rys. 1b. Tolerancje czujników klasy A są określone do 650 °C, a mniej dokładnej klasy B – do 850 °C. Błędy graniczne $|\delta_{i0}|$ początkowej wartości rezystancji wynoszą dla obu klas odpowiednio 0,06 % i 0,12 %. Ze wzorów (2) i (3) oraz rys. 1 wynika, że przebieg błędu Δ_i zależy od wartości błędu początkowego $|\delta_{i0}|$ oraz przyrostu względnego ε_i i jego błędu $|\delta_{\varepsilon i}|$. Do rozważań dokładności układu z czujnikami należy stosować opis za pomocą miar od siebie niezależnych. Na podstawie wykresu tolerancji zawartego w normie dotyczącej czujników Pt [6] można wyznaczyć górną granicę błędu $|\delta_{Ri}|_{max} \equiv |\delta|$ dla $\varepsilon_i \to \infty$ zaznaczoną na rys. 1a. Jest ona równa ilorazowi przyrostu tolerancji i przyrostu rezystancji czujnika Pt wg jego charakterystyki znamionowej, tj.:

$$|\delta| = |\delta_{i0}| + |\delta_{\varepsilon i}| = \frac{|\Delta_i| - |\Delta_{i0}|}{R_i - R_{i0}} \tag{5}$$

Wartości $|\delta|$ obliczone dla kilku wartości temperatury podano na rys. 2 jako przebiegi $|\delta|$ kl. A i $|\delta|$ kl. B.

Dla czujników Pt 100 klasy A i B wartości $|\delta|$ są kilka razy większe niż $|\delta_{i0}|$, zmieniają się stosunkowo niewiele i nie przekraczają 0,2 % dla klasy A i 0,5 % dla klasy B. Błąd graniczny $|\delta_{Ri}|$ tych czujników zawiera więc drugi składnik ze wzoru (3a) zależny od przyrostu względnego ε. Błąd graniczny przyrostu oblicza się ze wzoru (5) lub z (3d). Jego wartości dla czujników Pt 100 klasy A i B w temperaturze dodatniej podano



Rys. 2. Tolerancje $|\Delta|$ przemysłowych czujników temperatury Pt 100 klasy A i B oraz obliczone z ich wartości maksymalne błędy graniczne $|\delta_{Ri}|_{max} \equiv |\delta|$ dla teoretycznej wartości przyrostu względnego $\varepsilon_i \to \infty$

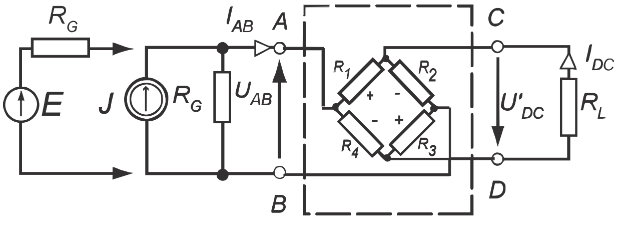
Tab. 2. Względne błędy graniczne $|\delta_{\varepsilon i}|$ przyrostu rezystancji czujników platynowych Pt 100 klasy A i B

Temperatura		100 °C	300 °C	600 °C	650 °C	850 °C
Błąd %	klasa A	0,13	0,12	0,12	0,114	–
	klasa B	0,37	0,32	0,32	0,32	0,31

w tab. 2. Wartości są niemal stałe i dla klasy A w zakresie od 100 °C do 650 °C zawierają się w przedziale od 0,12 % do 0,14 %, a dla klasy B w zakresie od 100 °C do 850 °C – pomiędzy 0,37 % i 0,31 % [1]. Rozrzuty mogą wynikać z zaokrąglenia drugiej cyfry wartości tolerancji podanych w normie [6], gdyż przebieg zawartych w niej granic obszaru tolerancji pokrywa się z podanym na rys. 1b dla $|\delta_{\varepsilon i}|$ = const. Błąd $|\delta_{\varepsilon i}|$ można aproksymować wartością maksymalną lub średnią w wybranym zakresie temperatury.

Podstawowe parametry na zaciskach mostka

Na rys. 3 podano schemat czteroramiennego mostka rezystancyjnego pracującego jako czwórnik o zasilaniu dołączonym do przekątnej AB i obciążony rezystancją R_L. Taki mostek oznaczymy symbolem 4R. Jego zasilanie przedstawiono jako połączenie równoległe idealnego źródła prądowego J z zastępczą rezystancją wewnętrzną R_G. Można je też zastąpić równoważnym schematem w postaci idealnego źródła napięciowego $E=JR_G$ i szeregowej rezystancji wewnętrznej R_G, bardziej właściwym przy małych wartościach R_G. Układ mostka jest liniowy i pasywny. Parametry robocze na jego zaciskach przy dowolnym źródle i obciążeniu zależą od sześciu rezystancji układu z rys. 3.



Rys. 3. Schemat współpracy czteroramiennego mostka rezystancyjnego ze źródłem zasilania i obciążeniem R_L

Do pełnego opisu samego mostka wystarczą tylko trzy jego zewnętrzne parametry, wyznaczane przy rozwartej przeciwnej jego stronie. Jest to jednakowy dla zasilania z każdej strony (mostek jest czwórnikiem odwracalnym) **rozwarciowy współczynnik przetwarzania prądu na napięcie** $r_{21} = r_{12}$

(transmitancja lub rezystancja skrośna $\frac{U^{\infty}_{DC}}{I_{AB}} = \frac{U^{\infty}_{AB}}{I_{DC}}$

oraz **rezystancje rozwarciowe: wejściowa** R^{∞}_{AB} **i wyjściowa** R^{∞}_{CD}. Zależności tych parametrów mostka dla przypadku ogólnego i szeregu przypadków szczególnych o skojarzonych przyrostach czterech lub dwu rezystancji jego ramion oraz zmiennej tylko jednej z nich, przy zasilaniu prądowym, dowolnym lub napięciowym, podano w [2] i [3].

Napięcie wyjściowe mostka 4R przy $r_{21}=r_{12}$ wynosi:

$$U'_{DC} = J\frac{r_{21}}{\left(1+\frac{R^{\infty}_{AB}}{R_G}\right)\left(1+\frac{R^{\infty}_{CD}}{R_L}\right)-\frac{r^2_{21}}{R_G R_L}} \qquad (6)$$

Jeśli rezystancja wewnętrzna źródła $R_G \gg R_{AB}$ oraz rezystancja obciążenia $R_L \gg R_{CD}$, to zależność (6) dla napięcia wyjściowego mostka na zaciskach upraszcza się do postaci:

$$U'_{DC} \to U^{\infty}_{DC} = Jr_{21} \qquad (6a)$$

Taki rodzaj pracy mostka realizuje się bez trudu środkami współczesnej elektroniki. Do scharakteryzowania jego dokładności przy $J = const$ wystarczy wówczas wyznaczenie miar dokładności współczynnika przetwarzania r_{21}. Współczynnik ten dla wartości rezystancji obciążenia $R_L \gg R_{CD}$ wynosi:

$$r_{21} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\sum R_i} \equiv t_0 f(\varepsilon_i) \qquad (7)$$

gdzie: $R_i \equiv R_{i0} + \Delta R_i \equiv R_{i0}(1+\varepsilon_i)$ – rezystancje ramienia mostka dla $i \in (1, ..., 4)$ o wartościach początkowych R_{i0} i przyrostach bezwzględnych ΔR_i oraz względnych ε_i, $\Sigma R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ – suma rezystancji R_i ramion.

[1] W szczególnym przypadku, gdy błąd wartości początkowej i błąd przyrostu czujnika mają znaki przeciwne, następuje ich częściowa kompensacja i wówczas granice tolerancji wg normy [6] spełniają też błędy przyrostu o dopuszczalnym większym module niż wyznaczony z (3b). Moduł ten jest powiązany z $|\delta_{i0}|$ i największy, gdy błąd początkowy $\delta_{i0} = \pm |\delta_{i0}|$.

Równowaga mostka może zachodzić dla wielu kombinacji wartości rezystancji R_i. W praktyce pomiarowej mogą wystąpić dwa rodzaje stanu początkowego mostka:

- równoczesny z równowagą $r_{210} = 0$ dla nominalnych wartości początkowych rezystancji układu pomiarowego
- różniący się od równowagi, czyli $r_{210} \neq 0$ (np. schemat zastępczy badanego układu w diagnostyce i tomografii).

Wyznaczone zostaną miary dokładności współczynnika przetwarzania r_{21} w przypadku ogólnym, a następnie szczegółowo rozpatrzone dwa mostki zrównoważone w stanie początkowym, tj. o nominalnej wartości początkowej $r_{210} = 0$, tj. gdy:

$$R_{10}R_{30} = R_{20}R_{40} \tag{7a}$$

Przy odniesieniu wartości rezystancji R_{i0} do jednej z nich, np. do rezystancji początkowej pierwszego ramienia R_{10}, otrzymuje się $R_{20} \equiv mR_{10}$, $R_{40} \equiv nR_{10}$ i z (6a) wynika $R_{30} = mnR_{10}$. Oba czynniki w r_{21} ze wzoru (7) można wówczas opisać przez względne wartości m i n oraz przez przyrosty ε_i, tj.:

$$t_0 \equiv \frac{R_{10}R_{30}}{\sum R_{i0}} = R_{10}\frac{m\,n}{(1+m)(1+n)} \tag{7b}$$

– czułość początkowa współczynnika przetwarzania r_{21}

$$f(\varepsilon_i) \equiv \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_4}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \tag{7c}$$

– względna funkcja nierównowagi mostka

$$\varepsilon_{\Sigma R}(\varepsilon_i) = \frac{\sum \varepsilon_i R_{i0}}{\sum R_{i0}} = \frac{\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + n(m\varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{(1+m)(1+n)} \tag{7d}$$

– względny przyrost sumy rezystancji ΣR_i.

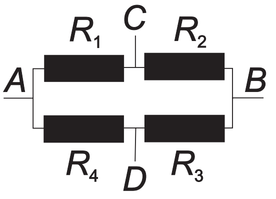
Znaki przyrostów rezystancji podane na rys. 3 wyprowadzają mostek z równowagi w kierunku dodatnim. Czułość początkowa $t_0 \to t_{0max} = R_{10}$, gdy $m \to \infty$ i $n \to \infty$. Funkcja $f(\varepsilon_i)$ w ogólnym przypadku zależy nieliniowo od przyrostów ε_i. Linearyzuje się ona w przybliżeniu dla małych przyrostów ε_i, gdyż oba iloczyny przyrostów w jej liczniku ΔL i przyrost $\varepsilon_{\Sigma R}$ mianownika są pomijalnie małe. Przy co najmniej dwu ramionach zmiennych możliwa jest całkowita linearyzacja [1–3]. Przy zasilaniu prądowym zachodzi ona dla przyrostów odpowiednio ze sobą skojarzonych poprzez oddziaływanie wielkości mierzonej, tak, aby pozostawał stały stosunek sum rezystancji gałęzi górnych oraz dolnych mostka. Przy jednakowych znakach przyrostów rezystancji dotyczy to ramion przeciwległych.

Wzór na napięcie wyjściowe mostka nieobciążonego i zasilanego z idealnego źródła napięciowego E, tj. dla $R_L \gg R_{CD}$ i $R_G = 0$ ma inną postać niż (6), tj.:

$$U_{DC}^{\infty} = E\frac{r_{21}}{R_{AB}^{\infty}} = E\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \equiv Ek_{12} \tag{8}$$

Przy zasilaniu napięciowym dla przyrostów rezystancji o jednakowych znakach w ramionach przeciwnych nie uzyskuje się linearyzacji charakterystyki mostka, zaś dla pojedynczego czujnika charakterystyka takiego samego mostka w funkcji przyrostu rezystancji ε_i jest bardziej nieliniowa niż przy zasilaniu prądowym. Przydatność tego układu dla platynowych czujników temperatury jest więc mniejsza, chociaż linearyzacji dokonuje się bez trudu po przetworzeniu sygnału na cyfrowy. Dokładność napięciowo zasilanego mostka omówiono w innych pracach [3–5].

Miary dokładności współczynnika przetwarzania r_{21} mostka w przypadku ogólnym



Błędy parametrów na zaciskach zewnętrznych mostka występują wówczas, gdy rzeczywiste wartości rezystancji R_i układu odbiegają od nominalnych. Ich miary dokładności należy wyznaczać z pełnych wyrażeń analitycznych mostka jako czwórnika. Upraszczanie się tych zależności dla określonych stosunków wartości początkowych rezystancji i relacji pomiędzy przyrostami z reguły nie obejmuje miar dokładności. Nawet rezystancje o jednakowych wartościach znamionowych i tolerancjach mają różne i na ogół niezależne od siebie błędy bieżące. Miary dokładności współczynnika przetwarzania r_{21} należy więc wyznaczyć dla ogólnego przypadku wszystkich ramion zmiennych, a następnie dla stanu początkowego mostka i kilku ważnych w praktyce jego przypadków szczególnych.

Błąd bieżący współczynnika przetwarzania r_{21}

Związek pomiędzy małymi przyrostami współczynnika przetwarzania r_{21} i rezystancji R_i mostka otrzymuje się z zależności (7) za pomocą różniczki zupełnej, a z niego **błąd bezwzględny** Δ_{r21} w postaci:

$$\Delta_{r21} = \frac{R_1R_3(\delta_{R1}+\delta_{R3}) - R_2R_4(\delta_{R2}+\delta_{R4})}{\sum R_i} - r_{21}\delta_{\Sigma R} \tag{9}$$

gdzie:

$$\delta_{Ri} \equiv \frac{\Delta_i}{R_i}$$

– błędy względne rezystancji mostka liczone względem wartości R_i,

$$\delta_{\Sigma R} = \frac{\sum \Delta_i}{\sum R_i} = \frac{\sum \delta_{Ri} R_i}{\sum R_i}$$

– błąd względny sumy rezystancji ramion mostka. Zależy on od względnych błędów δ_{Ri} rezystancji wszystkich ramion mostka i od wypadkowego błędu $\delta_{\Sigma R}$ ich sumy. Z (9) wynika, że wpływy błędów rezystancji ramion sąsiednich o jednakowym znaku odejmują się i mogą się nawet całkowicie skompensować. Pomimo prostej formy wzór (9) nie nadaje się do dalszych przekształceń, aby wyznaczyć dla r_{21} błąd graniczny i miarę losową, gdyż jego składniki są od siebie zależne. W tym celu należy przekształcić (9) do postaci uporządkowanych, w których jako składniki sumy występują błędy bezwzględne lub względne rezystancji R_i wraz z odpowiednimi współczynnikami wagi. Podano je poniżej w zapisie uogólnionym:

$$\Delta_{r21} = \frac{1}{\sum R_i} \sum_{i=1}^{4} \left[(-1)^{i+1} R_j - r_{21} \right] \Delta_i = \sum_{i=1}^{4} w_{Ri}\, \delta_{Ri} \qquad (10)$$

gdzie:

$$w_{Ri} \equiv R_i \frac{(-1)^{i+1} R_j - r_{21}}{\sum R_i}$$

– współczynniki wagi błędów δ_{Ri}

– indeksy: gdy i=1, 2, 3, 4, to j=3, 4, 1, 2

– mnożnik $(-1)^{i+1}$ = +1 dla i nieparzystych 1, 3 oraz –1 dla i parzystych tj. dla 2, 4.

Jeśli opisze się dwuskładnikowo każdą zmienną w dużych granicach rezystancję R_i wg (1), a jej błąd δ_{Ri} wg (2a), np. za pomocą błędu względnego δ_{i0} wartości początkowej R_{i0} i błędu bezwzględnego $\Delta_{i\varepsilon}$ jej przyrostu ε, to z (10) wynika:

$$\Delta_{r21} = \sum_{i=1}^{4} w_i \left[(1+\varepsilon_i)\delta_{i0} + \Delta_{\varepsilon i} \right] \qquad (10a)$$

gdzie:

$$w_i = (1+\varepsilon_i) w_{Ri} = \frac{t_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \left[(-1)^{i+1} (1+\varepsilon_j) - \frac{r_{21}}{R_{j0}} \right]$$

oraz $\varepsilon_{\Sigma R}$ – według wzoru (6d).

Jeśli któraś z rezystancji R_i mostka nie zmienia się, czyli ε_i= 0, to jej błędy względne $\delta_{Ri}=\delta_{i0}$, a ich współczynniki wagi są jednakowe, tj. $w_{Ri}=w_i$. Ich składniki w błędzie Δr_{21} zależą jednak od pozostałych przyrostów ε_j. Wzór (10) po rozwinięciu przyjmuje postać:

gdzie: $w'_{Ri}=w_{Ri}/t_0$ i $w'_i=w_i/t_0$ – wagi składników błędów względnych.

Błąd δ_{r21} można przedstawić jako sumę dwu składników

$$\delta_{r21}=\delta_0+\delta_{r21\varepsilon}(\varepsilon_i) \qquad (12a)$$

gdzie: $\delta_0=\delta_{10}-\delta_{20}+\delta_{30}-\delta_{40}$ – błąd względny początkowy (błąd zera dla r_{21}=0), tj. liczony w stosunku do czułości t_0, $\delta_{r21\varepsilon}(\varepsilon_i)$ – błąd względny δ_{r21} po korekcji zera dla $r_{21}\neq 0$.

Błąd początkowy δ_0 rozpatrywanego mostka występuje, gdy wszystkie przyrosty ε_i=0, wartość znamionowa r_{21}=0, a $U_{AB}\neq 0$. Zero koryguje się poprzez regulację rezystancji w mostku lub poza nim, np. analogowo – przez napięcie przeciwne do początkowego bądź w przetworzonym na cyfrowy sygnale wyjściowym. Z (10)–(12)

$$\delta_{r21\varepsilon} = \frac{1}{t_0}\sum_{i=1}^{4} [w_i(1+\varepsilon_i) - (-1)^{i+1}]\delta_{i0} + \frac{1}{t_0}\sum_{i=1}^{4} w_i \Delta_{\varepsilon i} \qquad (12b)$$

Z (12b) wynika, że **błąd względny** $\delta_{r21\varepsilon}$ **dla** $r_{21}\neq 0$ jest funkcją nie tylko błędów przyrostów rezystancji $\Delta_{\varepsilon i}$, ale i **błędów początkowych** δ_{i0} ramion mostka nawet wtedy, gdy błąd zera δ_0 = 0, gdyż współczynniki wagi błędów δ_{i0} zależą od przyrostów ε_i. Jedynie, gdy δ_{i0}=0, to jego składnik w (12a) zanika. Analiza częściowo upraszcza się, gdy błędy $\Delta_{\varepsilon i}$ lub $\delta_{\varepsilon i}$ przybliżyć w określonych przedziałach ε_i wartościami stałymi.

Wyznaczenie wartości błędów r_{21} jest możliwe wówczas, gdy znane są wraz ze znakiem błędy dla poszczególnych wartości rezystancji R_i. Zwykle dysponuje się jedynie miarami ich zbiorów, tj. błędami granicznymi wag oraz przedziałami miar losowych o określonym prawdopodobieństwie i współczynnikach ich korelacji. Wzory dla błędów granicznych i standardowych miar losowych r_{21} otrzymuje się przekształcając zależności (8) do (12).

$$\Delta_{r21} = \frac{t_0}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \left\{ \begin{aligned} &\left(1+\varepsilon_3 - \frac{r_{21}}{R_{30}}\right)\left[(1+\varepsilon_1)\delta_{10} + \Delta_{\varepsilon 1}\right] - \left(1+\varepsilon_4 + \frac{r_{21}}{R_{40}}\right)\left[(1+\varepsilon_2)\delta_{20} + \Delta_{\varepsilon 2}\right] + \\ &+\left(1+\varepsilon_1 - \frac{r_{21}}{R_{10}}\right)\left[(1+\varepsilon_3)\delta_{30} + \Delta_{\varepsilon 3}\right] - \left(1+\varepsilon_2 + \frac{r_{21}}{R_{20}}\right)\left[(1+\varepsilon_4)\delta_{40} + \Delta_{\varepsilon 4}\right] \end{aligned} \right\} \qquad (10b)$$

Dla stanu równowagi układu r_{21}=0

$$w_{Ri0} = w_{i0} = (-1)^{i+1} t_0 \qquad (11)$$

Blisko stanu równowagi trzeba posługiwać się bądź tylko błędem bezwzględnym Δr_{21} współczynnika r_{21}, bądź błędem względnym liczonym do czułości początkowej t_0 lub do zakresu $r_{21max} - r_{21min}$, gdyż błąd względny jako stosunek błędu Δ_{r21} i wartości $r_{210}\to 0$ dąży do $\pm\infty$. Odnosząc błąd Δ_{r21} do czułości t_0 mostka, otrzymuje się **błąd względny** δ_{r21} **współczynnika przetwarzania** r_{21}

$$\delta_{r21} \equiv \frac{\Delta_{r21}}{t_0} = \sum_{i=1}^{4} w'_{Ri}\, \delta_{Ri} = \sum_{i=1}^{4} w'_i\, \delta_i \qquad (12)$$

Błędy graniczne współczynnika przetwarzania r_{21}

Na podstawie (10) błąd graniczny $|\Delta_{r21}|$ można opisać w dwu zwartych postaciach:

$$|\Delta_{r21}| = \frac{1}{\sum R_i} \sum_{i=1}^{4} \left| (-1)^{i+1} R_j - r_{21} \right| |\Delta_i| = \sum_{i=1}^{4} |w_{Ri}| |\delta_{Ri}| \qquad (13)$$

gdzie:

$$|w_{Ri}| = R_i \frac{R_j + (-1)^i r_{21}}{\sum R_i}$$

Gdy błędy graniczne przyrostów ε_i są pomijalne, tj. $|\Delta_{\varepsilon i}| \ll |\delta_{i0}|$ (np. dla czujników temperatury z materiału o utrzymywanym określonym stopniu czystości) bądź na odwrót – błędy początkowe są pomijalne, tj. $|\delta_{i0}| \ll |\Delta_{\varepsilon i}|$, to wzory miar upraszczają się. Odniesiony do t_0 względny błąd graniczny wynosi wówczas

$$|\delta_{r21}|_m = \sum_{i=1}^{4} |w'_i||\Delta_{\varepsilon i}| \qquad (14)$$

lub

$$|\delta_{r21}|_m = \sum_{i=1}^{4} |w'_{Ri}||\delta_{i0}| \qquad (15)$$

Losowe miary dokładności r_{21}

Błędy parametrów wyjściowych dowolnego układu traktuje się jako losowe:

- dla składowej błędów pochodzącej od błędów przypadkowych elementów, np. szumów rezystancji i od zakłóceń
- przy wyznaczaniu uśrednionej oceny dokładności zbioru egzemplarzy takich samych lub podobnych układów w produkcji lub w eksploatacji.

W obu sytuacjach, ze wzorów o postaci pierwiastka wyznacza się różne miary losowe błędów przypadkowych, jak również niepewności pomiarów. Gdy błędy standardowe $\overline{\delta}_{Ri}$ wszystkich rezystancji i błędy ich składowych $\overline{\delta}_{i0}$, $\overline{\Delta}_{\varepsilon i}$ nie są ze sobą skorelowane, to z wzorów (13) oraz (10) wynika wzór standardowej losowej miary dokładności $\overline{\Delta}_{r21}$ współczynnika r_{21}

$$\overline{\Delta}_{r21} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{4} w_{Ri}^2 \left(\overline{\delta}_{Ri}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} w_i^2 \left[(1+\varepsilon_i)^2 \left(\overline{\delta}_{i0}\right)^2 + \left(\overline{\Delta}_{\varepsilon i}\right)^2\right]} \qquad (16)$$

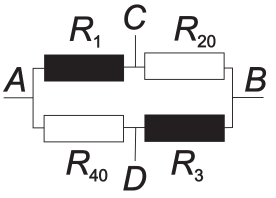
gdzie: $\overline{\Delta}_{r21}, \overline{\delta}_{Ri}, \overline{\delta}_{i0}, \overline{\Delta}_{\varepsilon i}$ – średnie kwadratowe błędy przypadkowe lub niepewności pomiarowe.

Błąd losowy $\overline{\Delta}_{r21}$ pojedynczego układu ma zwykle znacznie mniejszą wartość niż błąd systematyczny graniczny $|\Delta_{r21}|$. Dla serii przetworników w produkcji bądź pomiarach wieloma takimi samymi przetwornikami, błędy systematyczne ich elementów można randomizować, tj. założyć, że w zbiorze układów są one względem siebie przypadkowe. Średni błąd pojedynczego układu wylicza się wówczas wg (16), ale z niezbyt dużą ufnością.

Dokładność współczynnika przetwarzania r_{21} mostków 4R o dwu i jednym ramieniu zmiennym

Jeśli któraś z rezystancji R_i mostka nie zmienia się, to we wzorach opisujących miary jego parametrów $\varepsilon_i=0$ i występuje jedynie jej miara początkowa δ_{i0}. Miary różnych przypadków mostka odchyłowego 4R o zmiennych jednej lub kilku rezystancjach podano w tabelach i analizowano w [3 do 6]. Mostki używane przy pomiarach temperatury czujnikami Pt 100 omówione będą szczegółowo poniżej. Są one zrównoważone w stanie początkowym, tj. spełniają warunek $R_{10}R_{30}=R_{20}R_{40}$.

Jednakowe przyrosty ε dwu przeciwległych rezystancji R_1, R_3



Mostek ten stosuje się w praktyce, gdy $m=1$ i przyrosty względne przeciwległych rezystancji R_1, R_3 są jednakowe, tj. $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon$ oraz $\varepsilon_2=\varepsilon_4=0$. Jeśli wartości początkowe czujników są różne to $n\neq0$. Współczynnik przetwarzania r_{21} takiego mostka zależy liniowo od ε [2, 3], tj.:

$$r_{21}=R_{10}\frac{n}{1+n}\varepsilon \qquad (17)$$

oraz

$$\varepsilon_{\Sigma R}=\frac{\varepsilon}{2} \qquad (18)$$

W takim mostku dodatnie przyrosty ε mogą być większe niż 1 i są ograniczone tylko przez maksymalne dopuszczalne napięcie źródła prądu zasilającego. Jeśli stosunek rezystancji początkowych $n=1$ (np. jednakowe dwa czujniki) to czułość początkowa $t_0=0{,}25R_0$ i wzór (10) bardzo upraszcza się. Błąd bezwzględny wynosi

$$\Delta_{r21}=\tfrac{1}{4}R_0\left[(1+\varepsilon)(\delta_{10}+\delta_{30})+\Delta_{\varepsilon3}+\Delta_{\varepsilon1}-\delta_{20}-\delta_{40}\right] \qquad (19)$$

Błąd względny mostka δ_{r21} wyznaczyć można stosując wzór (12), tj. odnosząc błąd bezwzględny do czułości początkowej $t_0=0{,}25R_0$. Błąd względny mostka z wyodrębnionym błędem początkowym (zera) δ_0 równa się:

$$\delta_{r21}=\delta_0+\varepsilon(\delta_{10}+\delta_{30}+\delta_{\varepsilon3}+\delta_{\varepsilon1}) \qquad (20)$$

Jeśli błędy rezystancji ramion nie zależą od ε to błąd δ_{r21} współczynnika przetwarzania mostka wzrasta wraz z ε liniowo. Nawet, gdy błąd początkowy $\delta_0=0$, to przy $\varepsilon\neq0$ błędy początkowe δ_{10}, δ_{30} czujników wpływają na ten błąd.

Z (19) lub (20) można wyznaczyć graniczne błędy i miary losowe tego mostka. Gdy ponadto miary graniczne i losowe ramion zmiennych R_1, R_3 oraz miary ramion stałych R_{20}, R_{40} są jednakowe parami, czyli np. dla błędów granicznych $|\delta_{10}|=|\delta_{30}|$ i $|\delta_{\varepsilon1}|=|\delta_{\varepsilon3}|$ oraz $|\delta_{20}|=|\delta_{40}|$, otrzymuje się bez korekty zera

$$|\delta_{r21}|=2\left[(1+\varepsilon)|\delta_{10}|+\varepsilon|\delta_{\varepsilon1}|+|\delta_{20}|\right] \qquad (21)$$

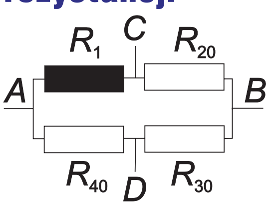
i z korektą zera

$$|\delta_{r21\varepsilon}|=2\varepsilon\left(|\delta_{10}|+|\delta_{\varepsilon1}|\right) \qquad (21a)$$

Podobnie standardowy błąd losowy

$$\overline{\delta}_{r21}=\sqrt{2}\sqrt{(1+\varepsilon)^2\,\overline{\delta}_{10}^2+\overline{\Delta}_{\varepsilon1}^2+\overline{\delta}_{20}^2} \qquad (22)$$

Mostek o zmiennej tylko jednej rezystancji



Jest to układ najprostszy o zmiennej tylko jednej rezystancji mostka, np. R_1, (tj. $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_3=0$ i $\varepsilon_4=0$). Jego rozwarciowy współczynnik przetwarzania wynosi

$$r_{21} = t_0 \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \quad ^{2)} \tag{23}$$

gdzie: $\varepsilon_{\Sigma R} = \dfrac{\varepsilon_1}{(1+m)(1+n)}$

Charakterystyka jest nieliniowa i zwykle linearyzuje się ją w dalszej części toru pomiarowego poprzez przetwarzanie sygnału wg funkcji odwrotnej do (23) po stronie analogowej lub cyfrowej.

Uwzględniając składniki błędu δ_{Ri} wg (2a), z (9) otrzymuje się błąd względny δ_{r21} w postaci:

$$\delta_{r21} = \frac{(1+\varepsilon_1)(\delta_{10}+\delta_{30})+\varepsilon_1\delta_{\varepsilon 1}-(\delta_{20}+\delta_{40})-\varepsilon_1\delta_{\Sigma R}}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} \tag{24}$$

gdzie: $\delta_{\Sigma R} = \delta_{\Sigma R0} + \delta_{\varepsilon 1}\dfrac{\varepsilon_{\Sigma R}}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}$

– błąd względny sumy rezystancji Σ_{Ri} tego mostka definiowany wg (2a) jak δ_{Ri}

$\delta_{\Sigma R0} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} R_i \delta_{i0}}{\sum_{i=1}^{4} R_i}$ – jego wartość początkowa, tj. dla ΣR_{i0}

Po wyodrębnieniu w (24) błędu początkowego mostka δ_0

$$\delta_{r21} = \frac{1}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[\delta_0 + \varepsilon_1\left(\frac{\delta_{\varepsilon 1}}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} + \delta_{10} + \delta_{30} - \delta_{\Sigma R0}\right)\right] \tag{25}$$

gdzie: $\delta_0=\delta_{10}+\delta_{30}-(\delta_{20}+\delta_{40})$ – względny początkowy błąd mostka, czyli jego niezrównoważenie dla wszystkich $R_i=R_{i0}$

Wzór (25) ujmuje wpływ błędów δ_{10}, $\delta_{\varepsilon 1}$ rezystancji czujnika ε_i i błędów δ_{i0} stałych wartości R_{i0} innych rezystancji mostka w sposób uwikłany, gdyż od błędów tych zależą też błędy $\delta_{\Sigma R0}$ i δ_0 mostka. Jest on jednak wygodny do analizy wpływu sposobu zerowania układu na jego błąd dla $\varepsilon_1 \neq 0$. Np. przy kompensacji sygnału początkowej nierównowagi (zera) na zewnątrz mostka z (25) otrzymuje się:

$$\delta_{r21\varepsilon}=\delta_{r21}-\delta_0 = \frac{1}{1+\varepsilon_{\Sigma R}}\left[-\varepsilon_{\Sigma R}\delta_0 + \varepsilon_1\left(\frac{\delta_{\varepsilon 1}}{1+\varepsilon_{\Sigma R}} + \delta_{10} + \delta_{30} - \delta_{\Sigma R0}\right)\right] \tag{25a}$$

Postacie uporządkowane wzorów dla miar dokładności tego mostka z wyodrębnionymi składowymi pochodzącymi od wszystkich niezależnych błędów uzyskuje się z zależności ogólnych po podstawieniu $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$, np. dla δ_{r21} – z (10a) i (12). Podano je w [3–5].

Dla mostka $4R_{i0}$, tj. o jednakowych rezystancjach początkowych R_{i0}, $\varepsilon_{\Sigma R}=\frac{1}{4}\varepsilon_1$ i wzory nieco się upraszczają. Z ogólnych wzorów (10b), (12) wynika

$$\delta_{r21}=\frac{1}{(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1)^2}\left[(1+\varepsilon_1)\delta_{10}+(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1)^2\delta_{30}-(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1)(\delta_{20}+\delta_{40})+\Delta_{\varepsilon 1}\right] \tag{26}$$

Błąd początkowy rozpatrywanego mostka występuje, gdy $\varepsilon_1=0$, wartość znamionowa $r_{21}=0$, a $U_{AB}\neq 0$ i wynosi

$$\delta_0=\delta_{10}+\delta_{30}-\delta_{20}-\delta_{40} \tag{27}$$

Gdy zero jest ustawiane na zewnątrz mostka według (25a) otrzyma się:

$$\delta_{r21\varepsilon} = \delta_{r21}-\delta_0 = \frac{\varepsilon_1}{(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1)^2}\Big[(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\varepsilon_1)\delta_{10} + (\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\varepsilon_1)\delta_{30} + \frac{\varepsilon_1}{16}\delta_{20} + \frac{\varepsilon_1}{16}\delta_{40} + \delta_{\varepsilon 1}\Big] \tag{28}$$

Gdy zero mostka ustawia się jego rezystancjami, to $\delta_0=0$, a stąd $\delta_{10}+\delta_{30}=\delta_{20}+\delta_{40}$ i z (25)

$$\delta_{r21} = \frac{\varepsilon_1}{(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1)^2}\left[\frac{1}{2}(\delta_{10}+\delta_{30}) + \frac{\varepsilon_1}{4}\delta_{30} + \delta_{\varepsilon 1}\right] \tag{29}$$

Błędy graniczne i miary losowe wyznacza się jako szczególne przypadki (13) i (16) lub przekształcając (26)–(29).

Kilka spotykanych w praktyce przypadków realizacji układu pomiarowego o stałych błędach czujnika i mostka rozważy się poniżej. Oto one:

1° Mierzy się innymi układami bezpośrednio samą **rezystancję czujnika**. Dotyczy to np. pomiarów dokładnym mostkiem zrównoważonym lub różnicową czteroprzewodową metodą napięciową. Miary dokładności czujnika opisane są wzorami (2)–(4), wartości jego błędów granicznych wynikają z normy [6], a rozszerzoną niepewność wyniku pomiaru wyznacza się wg Przewodnika GUM.

2° **Układ z mostkiem bez regulacji**
Tor pomiarowy kalibruje się wg charakterystyki znamionowej i wymienia się czujniki bez adjustacji układu. Miary dokładności należy wyznaczać na podstawie wzorów (24), (25) lub z przekształconego wzoru (10a).

3° **Błąd zera kompensowany jest poza mostkiem**, np. poprzez napięcie przeciwnie do napięcia początkowego, bądź po przetworzeniu sygnału wyjściowego na cyfrowy.

4° **Regulacja zera rezystancjami mostka**
Tor pomiarowy kalibruje się zmianą wybranej rezystancji mostka (np. stosując odpowiedni równoległy rezystor nastawny), tak aby uzyskać względny początkowy błąd mostka $\delta_0=0$.
W przypadkach 2° i 3°, nawet, gdy ustawiono zero mostka niezrównoważonego, błędy $\delta_{i0}\neq 0$ wpływają na błąd δ_{r21}.

---

[2] Jest to równanie hiperboli równoosiowej o asymptotach: $\varepsilon = -(1+m)(1+n)$, $r_{12}=mnR_{10}$

5° Błąd początkowy czujnika jest adiustowany lub wskalowywany, a błędy rezystancji mostka pomijalne. Jeśli wszystkie δ_{i0}=0, to r_{210}=0, δ_0=0 i $\delta_{\Sigma R}$=0, a zależność (25) staje się wówczas taka sama, jak wynikająca bezpośrednio z różniczkowania (23):

$$\delta_{r21} = \frac{\varepsilon_1}{\left(1+\varepsilon_{\Sigma R}\right)^2}\delta_{\varepsilon 1} \tag{30}$$

6° Pomijalne są tylko błędy stałych rezystancji mostka. Niektóre z tych przypadków autor analizował już częściowo w [4] i [5].

Przy jednakowych granicznych błędach początkowych $|\delta_{i0}|=|\delta_{10}|$ i rezystancjach R_{i0}=R_{10}, względny błąd graniczny współczynnika r_{21} dla układu bez regulacji zera wynosi

$$\left|\delta_{r21}\right|_m = \frac{\left[\left(4+3\varepsilon_1+\frac{1}{4}\varepsilon_1^2\right)\left|\delta_{10}\right|+\left|\varepsilon_1\right|\left|\delta_{\varepsilon 1}\right|\right]}{\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right)^2} \tag{31}$$

Przy zewnętrznej kompensacji sygnału zerowego

$$\left|\delta_{r21\varepsilon}\right|=\left|\delta_{r21}-\delta_0\right|=\frac{\left|\varepsilon_1\right|}{\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)^2}\left[\left|\delta_{\varepsilon 1}\right|+\left|\delta_{10}\right|\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)\right] \tag{32}$$

Jeśli elementem regulacyjnym zera jest rezystancja mostka np. R_3, to jego błąd graniczny $|\delta_{30}|$ może osiągnąć wartość nawet $3|\delta_{10}|$, ale $|\delta_{10}+\delta_{30}|$ nie przekroczy $2|\delta_{10}|$.

Błąd graniczny mostka o pomijalnych błędach początkowych lub o wyregulowanym zerze i skalibrowanego wg charakterystyki znamionowej czujnika wynika z (31) i wynosi

$$\left|\delta_{r21}\right|_m = \frac{\left|\varepsilon_1\right|}{\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)^2}\left|\delta_{\varepsilon 1}\right| \tag{33}$$

Względna miara losowa mostka $4R_{i0}$ równa się

$$\bar{\delta}_{r21}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right)^2}\sqrt{\left(1+\varepsilon_1\right)^2\bar{\delta}_{10}^{\,2}+\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^4\bar{\delta}_{30}^{\,2}+\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^2\left(\bar{\delta}_{20}^{\,2}+\bar{\delta}_{40}^{\,2}\right)+\bar{\Delta}_{\varepsilon 1}^{\,2}} \tag{34}$$

Gdy jednakowe są też miary rezystancji, tj. $\bar{\delta}_{i0}=\bar{\delta}_{10}$

$$\bar{\delta}_{r21}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right)^2}\sqrt{\left[\left(1+\varepsilon_1\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^4+2\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^2\right]\bar{\delta}_{10}^{\,2}+\bar{\Delta}_{\varepsilon 1}^{\,2}} \tag{35}$$

WNIOSEK

Miary mostka o pojedynczym ramieniu zmiennym są opisane bardziej skomplikowanymi wzorami niż dla mostków o sprzężonych przyrostach ε dwu rezystancji ramion. Dla niezbyt dużych wartości przyrostu ε_1 można je przybliżać wielomianami pierwszego lub wyższych rzędów.

Wartości liczbowe błędów granicznych mostka z przemysłowymi czujnikami Pt 100

Wyznaczono miary dokładności pomiarów mostkiem niezrównoważonym $4R_0$ z pojedynczym czujnikiem Pt 100 klasy A i B przy założeniach, że: błędy graniczne ramion stałych mostka nie są większe niż dopuszczalny błąd graniczny $|\delta_{10}|$ rezystancji początkowej tego czujnika, równowaga zachodzi dla 0 °C, a miary dokładności i niestabilność prądu zasilającego są jednakowe w obu przypadkach, lub pomijalne. Dla mostka z czujnikiem $R_1(T)$ o jednakowych początkowych rezystancjach R_{i0} i błędach $|\delta_{i0}|$ wszystkich ramion oraz tolerancjach czujnika wg klasy A, wynikają poniższe wzory liczbowe dla błędów granicznych r_{21}. Przy czym względny błąd graniczny $|\delta_{\varepsilon 1}|$ przyrostu względnego rezystancji czujnika wyliczono ze wzoru (3d) jako $|\delta_{\varepsilon 1}|$=0,12 % dla dużej wartości ε_1=2,14 (dla T=600 °C).

Przypadek 1° (bez regulacji zera mostka) błąd graniczny według wzoru (31):

$$\left|\delta_{r21}\right|_m = \frac{0{,}24+0{,}30\varepsilon_1+0{,}015\varepsilon_1^2}{\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)^2}\ (\%) \tag{36}$$

Przypadek 2° (regulacja zera zewnętrzna) błąd graniczny według wzoru (32):

$$\left|\delta_{r21\varepsilon}\right|=\left|\delta_{r21}-\delta_0\right|=\frac{0{,}18\left|\varepsilon_1\right|+0{,}015\varepsilon_1^2}{\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)^2}\ (\%) \tag{37}$$

Przypadek 4° (pomijalne błędy wartości początkowych) błąd graniczny według wzoru (33):

$$\left|\delta_{r21}\right|_m = \frac{\left|\varepsilon_1\right|}{\left(1+0{,}25\varepsilon_1\right)^2}0{,}12\ (\%) \tag{38}$$

Przy temperaturze maksymalnej 600 °C przyrost względny rezystancji czujnika wynosi: ε_{max}=2,14. Dla rozpatrywanych przypadków otrzymuje się następujące trzy zaokrąglone w górę wartości błędu granicznego: 0,40 %, 0,19 % i 0,11 %.

Pierwszy błąd jest dwukrotnie większy od drugiego i 3,6 razy większy od ostatniego. Dla porównania względny graniczny błąd mostka z dwoma jednakowymi czujnikami Pt 100 klasy A w ramionach przeciwnych dla tego samego zakresu temperatur nie przekracza 0,51 % – bez korekty zera i 0,39 % – z taką korektą. Błędy te obliczono ze wzorów (21) i (21a) względem dwukrotnie większego sygnału niż przy pojedynczym czujniku. Są one większe, bo błędy graniczne obu czujników są niezależne, ale sygnał zależy liniowo od obu jednakowych przyrostów ε rezystancji czujników.

Podobnie wyznacza się błędy graniczne mostka z czujnikiem klasy B. Po podstawieniu wartości liczbowych wynikających z zawartej w normie tolerancji dla zakresu temperatury 600 °C i uwzględniając dużą wartość ε_1= 2,14, kiedy to wyliczony ze wzoru (3d) błąd $|\delta_{\varepsilon 1}|$ przyjmuje wartość 0,32 %, otrzymano następujące wartości błędu granicznego: 0,87 %, 0,45 % i 0,29 %.

Dla zbioru czujników lub mostków w produkcji, lub w eksploatacji, można też wyznaczać systematyczne błędy średnie wg wzorów takich, jak dla miar losowych. Dla współczynników korelacji ±1 pomiędzy składnikami tych miar i najgorszego przypadku ich znaków otrzyma się wartości równe błędom granicznym, a dla tych współczynników równych zeru – wartości odpowiednio mniejsze. Dla zakresów pomiaru temperatur mniejszych niż rozpatrywany i miar dokładności odnoszonych do odpowiadających tym zakresom przyrostów rezystancji ich wartości będą większe.

Podsumowanie

Przedstawiono metodę szacowania dokładności niezależną od wielkości mierzonej i przebiegu charakterystyki czujników, gdyż wykorzystuje ona ich miary odniesione do wartości początkowej i przyrostów parametru mierzonego przez układ. Przeliczając je poprzez charakterystykę czujnika uzyskuje się wartości miar dokładności w jednostkach wielkości mierzonej.

Na podstawie tej i innych prac autora [3–5] można w podobny sposób analizować dokładność innych układów mostkowych stało- i przemiennoprądowych z czujnikami różnych wielkości. Metodę tę można łatwo rozszerzyć też na aktywne układy kondycjonowania sygnałów z czujników immitancyjnych, w tym mostki linearyzowane przez sprzężenie zwrotne i przy użyciu mnożnika analogowego oraz na pętlę prądową Andersona z wieloma różnicowymi wzmacniaczami operacyjnymi i ostatnio intensywnie rozwijane układy wirtualne pomiarów impedancji z procesorami cyfrowymi DSP.

Bibliografia

1. Warsza Z. L.: *Właściwości i nieznane zależności mostka rezystancyjnego 4-T jako czwórnika*. Pomiary Automatyka Robotyka 10/2004 s. 9–15.
2. Warsza Z. L.: *Unbalanced DC bridges – part 127 Handbook of Measuring Systems Design*, ed. by P. Sydenham and R. Thorn, 2005 Jon Wiley & Sons, Ltd., Chichester UK (internet).
3. Warsza Z. L.: *Immitancyjne układy czterobiegunowe (4T) w pomiarach wieloparametrowych*. Monografia, Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów, Warszawa 2004.
4. Warsza Z. L.: *Miary dokładności parametrów zewnętrznych czwórnika typu X o zmiennych rezystancjach*, Elektronika Część (1) nr 2/2006 s. 45–52, Część (2) nr 3/2006 s. 49–53
5. Warsza Z.: *Miary dokładności mostka o rezystancjach zmiennych w dużych granicach – z przykładem pomiarów temperatury przemysłowymi czujnikami PT 100.* Przegląd Elektrotechniki nr 7-8/2007, s. 48-59.
6. *Czujniki platynowe przemysłowych termometrów rezystancyjnych*. PN-EN 60751+A2; 1997.
7. Michalski L. i in.: *Termometria Przyrządy i metody*. Politechnika Łódzka, Łódź 1998 s. 632–633.