

O osobliwościach kinematyki manipulatorów*

Krzysztof Tchoń
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej
ul. Janiszewskiego 11/17
50-372 Wrocław

Konfiguracje osobliwe manipulatora są to takie konfiguracje, w których manipulator traci jeden lub kilka stopni swobody. Jak wiadomo, istnienie konfiguracji osobliwych utrudnia w sposób istotny sterowanie manipulatorem w przestrzeni zewnętrznej. W celu lepszego zrozumienia zachowania manipulatora w otoczeniu konfiguracji osobliwych proponujemy sprowadzenie odwzorowania opisującego kinematykę manipulatora do pewnej prostej postaci, zwanej postacią normalną, zachowującej jakościowe własności kinematyki oryginalnej. W referacie zostały przedstawione postacie normalne wybranych klas osobliwych kinematyk manipulatorów i przeanalizowane ich znaczenie dla zadania odwrotnego kinematyki.

Słowa kluczowe: kinematyka, jakobian, konfiguracja osobliwa, postać normalna, zadanie odwrotne.

1 Wprowadzenie

Rozważmy sztywny manipulator o n stopniach swobody posiadający m przegubów obrotowych oraz $n - m$ przegubów przesuwnych. Kinematykę manipulatora definiujemy jako odwzorowanie przyporządkowujące każdej konfiguracji wewnętrznej manipulatora określone położenie i orientację jego efektora.

Oznaczmy symbolem X przestrzeń wewnętrzną manipulatora. Zakładając, że przeguby manipulatora są nieograniczone, możemy napisać

$$X \cong T^m \times R^{n-m}, \quad (1)$$

gdzie T^m oznacza m -wymiarowy torus. Przestrzeń zewnętrzną Y manipulatora jest zwykle utożsamiana z grupą euklidesową $SE(3)$ lub pewną jej podgrupą (R^3 , $SO(3)$, $SE(2)$). Przy przyjętych założeniach zarówno przestrzeń wewnętrzną jak i zewnętrzną manipulatora są analitycznymi rozmaitościami, a kinematyka manipulatora

$$k : X \rightarrow Y \quad (2)$$

* Rozszerzona wersja referatu wygłoszonego podczas seminarium Projekty badawcze - granty w dziedzinie robotyki finansowane przez Komitet Badań Naukowych, PIAP Warszawa, 7-8 grudnia 1993, przedstawiającego wyniki uzyskane w ramach projektu badawczego Metody topologiczno-różniczkowe w robotyce, grant KBN Nr 3 3204 9203.

jest odwzorowaniem analitycznym zależnym w sposób analityczny od parametrów geometrycznych manipulatora. Standardową postać odwzorowania (2) otrzymuje się dzięki zastosowaniu algorytmu Denavita-Hartenberga [1], [9].

Mając określoną kinematykę (2) możemy zdefiniować w sposób kanoniczny jacobian manipulatora [9]

$$J(x) = \frac{\partial k(x)}{\partial x}, \quad (3)$$

rozumiany jako przekształcenie prędkości w przegubach manipulatora w prędkość liniową i kątową efektora w konfiguracji x . Wprowadźmy teraz następującą definicję.

Definicja 1 Konfigurację $x \in X$ nazywamy regularną, jeżeli

$$\text{rank } J(x) = \min(\dim X, \dim Y), \quad (4)$$

gdzie $\dim X = n$, $\dim Y = p$ ($p = 3, 6$). Konfigurację, która nie jest regularna nazywamy osobliwą.

Konfiguracje osobliwe są to zatem takie konfiguracje, w których jacobian manipulatora traci rząd. Oznacza to, że jeżeli manipulator znajduje się w konfiguracji osobliwej, pewne niezerowe prędkości w przegubach nie powodują (z dokładnością do małych rzędu 2) ruchu efektora. Istnieje także dualna interpretacja konfiguracji osobliwych jako takich konfiguracji, w których zrównoważenie pewnych niezerowych sił działających na efektor nie wymaga (również w pierwszym przybliżeniu) wywierania żadnych sił ani momentów w przegubach manipulatora [5].

Z uwagi na odmienną geometrię przestrzeni wewnętrznej i zewnętrznej manipulatora, wystąpienie konfiguracji osobliwych jest nieuniknione. Kwestę istnienia konfiguracji osobliwych rozstrzyga następujące twierdzenie [3], odkrywane w literaturze robotycznej niejednokrotnie.

Twierdzenie 1 Każdy manipulator z nieograniczonymi przegubami obrotowymi, którego liczba stopni swobody spełnia warunek $n \geq p$ posiada konfiguracje osobliwe.

Jest rzeczą dobrze znaną, że z punktu widzenia typowych zadań sterowania manipulatorem (śledzenia) w przestrzeni zewnętrznej występowanie konfiguracji osobliwych stanowi istotną przeszkodę przy stosowaniu klasycznych strategii sterowania [13]. W ramach strategii zastąpienia śledzenia w przestrzeni zewnętrznej śledzeniem w przestrzeni wewnętrznej trudności pojawiają się przy rozwiązywaniu odwrotnego zadania kinematyki w pobliżu konfiguracji osobliwych. Przy strategii bezpośredniego śledzenia w przestrzeni zewnętrznej z zastosowaniem linearyzacji i odsprzęgania (algorytm Freunda [2]), w konfiguracjach osobliwych natrafiamy na osobliwość macierzy odsprzęgania.

Problem opracowania algorytmów sterowania manipulatorem skutecznych w otoczeniu konfiguracji osobliwych i zdolnych do przeprowadzenia manipulatora przez konfiguracje osobliwe w sposób gładki należy wciąż do otwartych problemów robotyki. Częściej przy tym ten problem jest przez robotyków omijany przy pomocy różnych forteli, niż podejmowany w całej złożoności. Problem śledzenia przy osobliwościach kinematyki manipulatora, [12], stał się jednym z motywów do podjęcia badań nad zachowaniem manipulatorów w pobliżu konfiguracji osobliwych, których wyniki są omawiane w niniejszej pracy. Celem badań było opracowanie modeli matematycznych kinematyk osobliwych. Modele

takie noszą nazwę postaci normalnych kinematyki. Zastosowane metody wywodzą się z teorii osobliwości [10]. W literaturze na temat robotyki podobny sposób podejścia reprezentują pozycje [6], [8].

Układ niniejszej pracy jest następujący. W rozdziale 2 omawiamy modele tzw. strukturalnie stabilnych osobliwości kinematycznych. W rozdziale 3 podajemy klasyfikację osobliwości kinematyk planarnych. Rozdział 4 jest poświęcony osobliwościom pewnej klasy kinematyk przestrzennych. Rozdział 5 podaje warunki sprowadzalności kinematyki do tzw. kwadratowej postaci normalnej. W rozdziale 6 analizujemy szczególnie własności odwrotnego zadania kinematyki dla kinematyk posiadających kwadratową postać normalną. Rozdział 7 zawiera konkluzje. Ze względu na szczupłość miejsca ograniczamy się tutaj wyłącznie do przedstawienia wyników i ich zwięzłej interpretacji odsyłając Czytelnika zainteresowanego dowodami do cytowanej literatury.

2 Osobliwości kinematyk strukturalnie stabilnych

Model kinematyki i dynamiki sztywnego manipulatora traktowanego jako układ sterowania z funkcją wyjścia może być przedstawiony w następującej standardowej postaci [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = F(x, \xi) + G(x)u \\ y = k(x), \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $x, \xi, u \in R^n$ oznaczają, odpowiednio, współrzędne położenia i prędkości w przegubach oraz siły i momenty sterujące, $y \in R^p$ określa położenie i orientację efektora manipulatora. $G(x)$ jest nieosobliwą macierzą $n \times n$, $k(x)$ - oznacza kinematykę manipulatora. Postać (5) jest wygodna przy rozważaniu zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni zewnętrznej. Wiadomo jednak, że model (5), chociaż możliwy do uzyskania w postaci symbolicznej dla dowolnego manipulatora, jest zazwyczaj tak skomplikowany, że nieprzydatny do jakiegokolwiek analizy. W takiej sytuacji celowe jest poszukiwanie przekształceń modelu (5), które, zachowując jego własności, nadawałyby mu możliwie prostą postać.

Biorąc pod uwagę naturalną klasę przekształceń obejmującą:

- lokalną zmianę współrzędnych x i ξ postaci

$$(x, \xi) \mapsto (\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\xi),$$

- lokalną zmianę współrzędnych y

$$y \mapsto \psi(y), \quad (6)$$

- sprzężenie zwrotne od stanu

$$u \mapsto \alpha(x, \xi) + \beta(x, \xi)u$$

otrzymujemy następujący rezultat [13].

Twierdzenie 2 Pod działaniem przekształceń (6) model (5) lokalnie redukuje się do postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = u \\ y = \psi \circ k \circ \varphi^{-1}(x). \end{cases} \quad (7)$$

Wyrażenie (7) wskazuje na to, że po przekształceniach (6) dynamika modelu (5) została zastąpiona równoległym układem n podwójnych integratorów. Odwzorowania φ i ψ występujące w (7) noszą nazwę lokalnych dyfeomorfizmów i mają własność zachowania "kształtu wykresu" kinematyki k . Przez odpowiedni dobór tych odwzorowań możemy starać się sprowadzić kinematykę k , a zarazem cały model (7), do prostej postaci normalnej. Takie zadanie redukcji modelu (7) posiada ogólne rozwiązanie w przypadku, gdy kinematyka ma własność strukturalnej stabilności. Intuicyjnie, strukturalna stabilność polega na tym, że mimo poddania kinematyki małym zaburzeniom, jej "kształt" nie ulega zmianie. Dla przypadku kinematyk strukturalnie stabilnych, w pracy [10] zostało sformułowane następujące

Twierdzenie 3 Każda kinematyka strukturalnie stabilna o $n \neq 8$ stopniach swobody może być sprowadzona do postaci normalnej.

Pełną listę postaci normalnych kinematyk strukturalnie stabilnych można znaleźć w [10]. Mają one postać wielomianów wektorowych, nietrywialnych na jednej lub, co najwyżej, na dwóch współrzędnych. W przypadku $n = 8$ postaci normalnych jest nieskończenie wiele.

Niestety, pomimo atrakcyjnej matematycznie treści, przydatność powyższego twierdzenia jest raczej ograniczona. Nie wiemy bowiem czy kinematyki manipulatorów mają własność strukturalnej stabilności, nie mamy także podstaw, by oczekiwać strukturalnej stabilności kinematyki. W takiej sytuacji, w celu znalezienia postaci normalnych niezbędne są bezpośrednie badania poszczególnych klas kinematyk manipulatorów. Rozpoczynamy je od kinematyk planarnych.

3 Osobliwości kinematyki planarnej

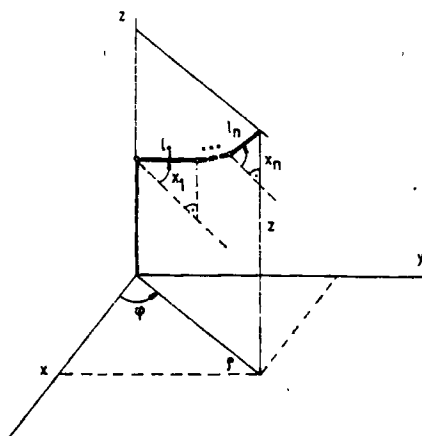
Manipulator planarny składa się z pionowej, obrotowej kolumny i z n ramion połączonych przegubami obrotowymi o osiach prostopadłych do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu kolumny, Rys.1. Pozycję efektora manipulatora wyrażoną we współrzędnych walcowych, w funkcji położenia przegubów, przedstawia wyrażenie [11]:

$$k(x) = (\varphi(x), \rho(x), z(x)) = (x_0, \sum_{i=1}^n l_i \cos(\sum_{r=1}^i x_r), l_0 + \sum_{i=1}^n l_i \sin(\sum_{r=1}^i x_r)), \quad (8)$$

gdzie l_0 oznacza wysokość kolumny, l_i , $i = 1, 2, \dots, n$ długości poszczególnych ramion manipulatora. Konfiguracje osobliwe manipulatora planarnego odpowiadają ramionom całkowicie wyprostowanym lub całkowicie zgiętym (kąty $x_i = 0$ lub $\pm\pi$, $i = 2, \dots, n$). Postacie normalne kinematyki planarnej charakteryzuje następujące twierdzenie [11].

Twierdzenie 4 Załóżmy, że kinematyka planarna spełnia warunek

$$l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n \neq 0.$$



Rys.1: Manipulator planarny

Wówczas, w otoczeniu konfiguracji osobliwych, kinematyka (8) przyjmuje jedną z podanych niżej postaci normalnych

$$(x_0, x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{n-1}^2, x_n), \quad (9)$$

gdzie p jest liczbą całkowitą spełniającą warunek

$$0 \leq p \leq (n-1)/2.$$

W szczególnym przypadku manipulatora typu podwójne wahadło, którego ramiona mają różne długości, $l_1 \neq l_2$, otrzymujemy postać normalną

$$(x_1^2, x_2),$$

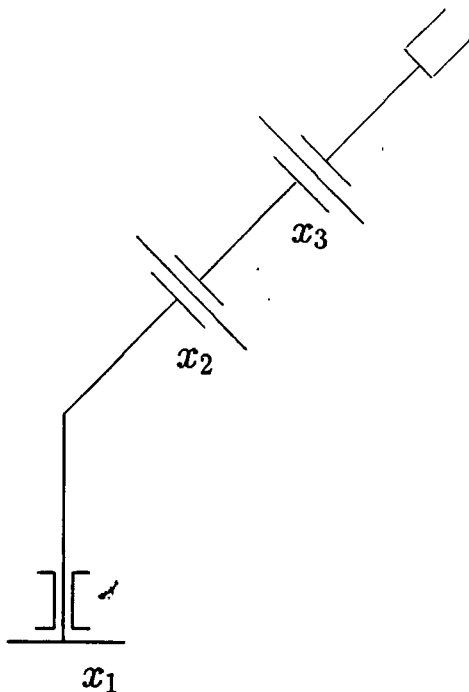
natomiast w przypadku $l_1 = l_2$, wokół konfiguracji "ramię drugie całkowicie zgięte", kinematyka podwójnego wahadła przyjmuje postać, [13],

$$(x_1 x_2, x_2).$$

4 Osobliwości kinematyki przestrzennej typu 3R

Z kolei przeanalizujemy szczególną klasę kinematyk przestrzennych o 3 stopniach swobody, zdefiniowaną przy pomocy tabeli parametrów Denavita-Hartenberga [14]:

kąt w przegubie	d	a	α
x_1	d_1	a_1	α_1
x_2	d_2	a_2	0
x_3	d_3	a_3	α_3



Rys.2: Przykładowy manipulator typu 3R ($d_2 = d_3 = 0$).

Zakładamy, że parametry $a_2, a_3 \neq 0$, podobnie $\sin \alpha_1 \neq 0$, jak również $d_2 + d_3 \neq 0$ lub $\cos \alpha_1 \neq 0$. Przykładowy egzemplarz manipulatora spełniającego te założenia przedstawia Rys.2. Nietrudno wykazać, że konfiguracje osobliwe leżą na dwóch powierzchniach

$$S_1 = \{x \in T^3 \mid x_3 = 0, \pm\pi\}, \quad (10)$$

$$S_2 = \{x \in T^3 \mid a_1 + a_2 \cos x_2 + a_3 \cos(x_2 + x_3) = 0\}. \quad (11)$$

Postacie normalne rozważanej kinematyki charakteryzuje następujące twierdzenie [14].

Twierdzenie 5 1. W każdej konfiguracji osobliwej $x \in S_1 \cup S_2$ rank $J(x) = 2$.

2. Jeżeli $a_1 \pm a_2 \neq 0$, to kinematyka przyjmuje postacie:

- poza $S_1 \cap S_2$:

$$(x_1^2, x_2, x_3), \quad (12)$$

- na $S_1 \cap S_2$:

$$(x_1^4 + \alpha(x_2, x_3)x_1^2 + \beta(x_2, x_3)x_1, x_2, x_3), \quad (13)$$

gdzie α, β są pewnymi funkcjami.

3. Jeżeli $a_1 \pm a_2 = 0$, to postać normalna kinematyki jest

$$(x_1 x_3 + x_2 \gamma(x), x_2, x_3) \quad (14)$$

dla pewnej funkcji γ .

5 Kwadratowa postać normalna

W reprezentacjach kinematyki manipulatora, jakie rozważaliśmy w rozdziałach 3 i 4, ograniczaliśmy uwagę wyłącznie do współrzędnych położenia efektora. Uwzględnienie współrzędnych orientacji przy poszukiwaniu postaci normalnych jest teoretycznie możliwe, aczkolwiek nieproste obliczeniowo ze względu na konieczność wyrażenia części rotacyjnej kinematyki w odpowiednich współrzędnych, na przykład przy pomocy kątów Eulera, współrzędnych osi-kąt, etc. Okazuje się jednak, że w pewnym szczególnym przypadku wyprowadzenie postaci normalnej można oprzeć na jakobianie manipulatora, ściślej - na jego wyznaczniku - bez odwoływania się do współrzędnych kinematyki. Do tego ważnego przypadku odnosi się następujący wynik [16]

Twierdzenie 6 Niech $J(x)$ oznacza jakobian kinematyki $k : X \rightarrow Y$ przy $\dim X = \dim Y = n$. Załóżmy, że w konfiguracji osobliwej $x \in X$ istnieje wektor $v \in \text{Ker } \frac{\partial k(x)}{\partial x}$ taki, że

$$-v^T d \left(\frac{\partial k(x)}{\partial x} \right) \neq 0. \quad (15)$$

Wówczas kinematyka k przyjmuje w otoczeniu konfiguracji x postać

$$(x_1^2, x_2, \dots, x_n) \quad (16)$$

zwaną kwadratową postacią normalną.

6 Algorytm Newtona vs. uogólniony algorytm Newtona

Jednym z najbardziej podstawowych zadań kinematyki manipulatorów jest tzw. odwrotne zadanie kinematyki polegające na znalezieniu konfiguracji manipulatora realizującej zadane położenie i orientację jego efektora [1]. Wiadomo, że przy przejściu przez konfiguracje osobliwe liczba rozwiązań zadania odwrotnego ulega zmianie oraz, że stosowany do rozwiązania tego zadania algorytm Newtona staje się źle uwarunkowany. Przeanalizujmy bliżej to ostatnie stwierdzenie w kontekście postaci normalnych kinematyki.

Dla kinematyki (2) założmy $\dim X = \dim Y = n$ i przedstawmy ją w pewnych współrzędnych w przestrzeni wewnętrznej i zewnętrznej jako odwzorowanie

$$k : R^n \rightarrow R^n. \quad (17)$$

Odwrotne zadanie kinematyki można wyartykułować w następujący sposób. Dla danych: położenia i orientacji $y \in R^n$ oraz konfiguracji początkowej x_0 kinematyki (17), znaleźć konfigurację $x \in R^n$, dla której

$$k(x) = y. \quad (18)$$

Stosowany do rozwiązania tego zadania algorytm Newtona prowadzi do wyznaczenia szukanej konfiguracji x jako granicy w nieskończoności rozwiązania układu równań różniczkowych

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial k}{\partial x}(x(t)) \right)^{-1} (y - k(x(t))), \quad x(0) = x_0, \quad (19)$$

lub różnicowych, z krokiem obliczeń h ,

$$x_{n+1} = x_n + \left(\frac{\partial k}{\partial x}(x_n) \right)^{-1} (y - k(x_n))h, \quad (20)$$

przy czym

$$x = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \quad (x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n). \quad (21)$$

Formalnie formuły (21),(22) tracą sens w konfiguracjach osobliwych. Jeżeli jednak przyjmiemy, że mamy do czynienia z konfiguracją osobliwą, w której kinematyka przyjmuje kwadratową postać normalną

$$k(x) = (x_1^2, x_2 \dots x_n),$$

to nietrudno sprawdzić, że układ (21) w stanie początkowym $x_0 = (x_{01} \dots x_{0n})$ ma rozwiązanie

$$x_1(t) = \pm(y_1(1 - \exp(-t)) + x_{01}^2 \exp(-t))^{1/2}, \quad (22)$$

$$x_i(t) = y_i(1 - \exp(-t)) + x_{0i} \exp(-t), \quad i = 2 \dots n,$$

które jest dobrze określone nawet w przypadku, gdy rozwiązaniem zadania odwrotnego jest konfiguracja osobliwa $x = 0$. Z faktu, że przekształcenia φ , ψ prowadzące do postaci normalnej (7) zachowują ciągłość i zbieżność wynika następujące twierdzenie [7].

Twierdzenie 7 *Algorytm Newtona jest dobrze uwarunkowany w otoczeniu tych osobliwości, w których kinematyka przyjmuje kwadratową postać normalną*

W sytuacji, kiedy nie stosuje się twierdzenie o kwadratowej postaci normalnej, do rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki można zastosować, zamiast algorytmu Newtona, tzw. uogólniony algorytm Newtona [15]. Stosownie do tego algorytmu układy (21),(22) należy zastąpić odpowiednio przez

$$\dot{x} = \text{adj} \left(\frac{\partial k}{\partial x}(x(t)) \right) (y - k(x(t))), \quad x(0) = x_0 \quad (23)$$

oraz

$$x_{n+1} = x_n + \text{adj} \left(\frac{\partial k}{\partial x}(x_n) \right) (y - k(x_n))h, \quad (24)$$

gdzie dla macierzy A rozmiaru $n \times n$ $\text{adj}(A)$ oznacza macierz dołączoną spełniającą zależność

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A) A = I_n \det A.$$

Warunkiem poprawnego działania uogólnionego algorytmu Newtona jest spełnienie tzw. warunku transwersalności, który można zapisać w postaci

$$\text{rank} \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x), y - k(x_0) \right] = n.$$

Analiza osobliwości kinematyki manipulatora typu PUMA, przeprowadzona w pracy [7], pozwoliła na wyciągnięcie następujących wniosków.

Wniosek 1 1: *Konfiguracje osobliwe manipulatora typu PUMA są opisane zależnościami:*

- OS1: $\sin x_5 = 0$
- OS2: $a_3 \cos(x_2 + x_3) + d_4 \sin(x_2 + x_3) + a_2 \cos x_2 = 0$
- OS3: $a_3 \sin x_3 - d_4 \cos x_3 = 0$,

gdzie a_i - przesunięcie wzdłuż osi x układu i -tego, d_i - przesunięcie wzdłuż osi z układu i -tego.

2. W otoczeniu konfiguracji OS2, OS3 kinematyka przyjmuje kwadratową postać normalną. Algorytm Newtona jest dobrze uwarunkowany.
3. W konfiguracji OS1 warunki wystąpienia kwadratowej postaci normalnej (Twierdzenie 6) nie są spełnione. Algorytm Newtona jest źle uwarunkowany. Uogólniony algorytm Newtona działa poprawnie.

7 Zakończenie

Celem niniejszej pracy było przedstawienie próbki wyników uzyskanych metodami topologiczno-różniczkowymi w dziedzinie modelowania kinematyki i dynamiki manipulatorów w pobliżu konfiguracji osobliwych. Wyniki uzyskane dotychczas, chociaż niekompletne, powiększają zasób naszej wiedzy o zachowaniu manipulatorów i otwierają nowe, interesujące perspektywy badawcze. Postęp uzyskany dotąd i oczekiwany w przyszłości odnosi się w szczególności do następujących zagadnień:

- analiza zachowania różnych typów manipulatorów w otoczeniu konfiguracji osobliwych (bifurkacje rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki)
- określenie typów konfiguracji osobliwych, które są możliwe do uniknięcia
- wyznaczenie zakresu stosowalności różnych algorytmów odwracania kinematyki
- opracowanie efektywnych algorytmów śledzenia w otoczeniu i "przez" konfiguracje osobliwe.

8 Literatura

- [1] J.Craig: *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [2] E. Freund: Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators. *Int. J. Robotics Research*, vol.1, no 1, 1982, ss.65-78.
- [3] D.H.Gottlieb: Robots and fibre bundles. *Bull. Soc. Math. Belgique*, vol.38, 1986, ss.219-223.

- [4] W. Jacak, K. Tchoń: **Podstawy robotyki**. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1992.
- [5] J. Kieffer, J. Lenarcic: On the exploitation of mechanical advantage near robot singularities. **Proc. 3rd Workshop on Advances of Robot Kinematics**, Ferrara, 1992, ss.1-8.
- [6] J. Kieffer: Differential analysis of bifurcations and isolated singularities for robots and mechanisms. **IEEE Trans. Robotics & Automat.**, 1993, w druku.
- [7] T. Kubik, K. Tchoń, R. Muszyński: Zastosowanie algorytmu Newtona do odwracania kinematyk osobliwych. **Materiały IV KKR**, Wrocław, 1993. w druku.
- [8] D.K. Pai and M.C. Leu: Genericity and singularities of robot manipulators, **IEEE Trans. Robotics & Automat.**, vol.8, no.5, 1992, ss.545-559.
- [9] M.W. Spong and M. Vidyasagar: **Robot Dynamics and Control**. New York: J. Wiley, 1989.
- [10] K. Tchoń: Differential topology of the inverse kinematic problem for redundant robot manipulators, **Int. J. Robotics Research**, vol.10, no.5, 1991, ss.492-504.
- [11] K. Tchoń, P. Urban: Classification of kinematic singularities in planar robot manipulators, **Systems & Control Lett.**, vol.19, 1992, ss.293-302.
- [12] K. Tchoń, A. Kasiński: On tracking through singular configurations in robot manipulators. **Robotics Research and Applications**, WNT, Warszawa, 1992, ss.157-169.
- [13] K. Tchoń: On singular kinematics of robot manipulators. **Archives of Control Sciences**, 1993, w druku.
- [14] K. Tchoń: Normal forms of kinematic singularities of 3R robot manipulators. **Twente University Memoranda**, Memo 1124, 1993.
- [15] K. Tchoń, I. Dulęba: On inverting singular kinematics and geodesic trajectory generation for robot manipulators. **Journal of Intelligent & Robotic Systems**, 1993, w druku.
- [16] K. Tchoń: A normal form of singular kinematics of robot manipulators with smallest degeneracy. **IEEE Trans. Robotics & Automat.**, przyjęte do druku.