

Z. Buśko, J. Frączek, M. Wojtyra
(grant nr 3 11879101, kierownik: A. Morecki)

Opracowanie metod i programów narzędziowych do komputerowego wspomagania projektowania mechanizmów i robotów

Streszczenie

W pracy omówiono podstawowe metody komputerowej analizy kinematycznej i dynamicznej układów mechanicznych, opracowane w trakcie realizacji grantu. Przedstawiono podstawy budowy algorytmów modelowania układów wielocłonowych, sposób rozwiązywania zagadnień numerycznych oraz przykład zastosowania.

1. Wstęp.

Podczas analizy kinematycznej i dynamicznej układów mechanicznych (roboty, maszyny robocze, układy biomechaniczne), rozważany układ jest często modelowany w postaci łańcucha kinematycznego sztywnych członów, połączonych w pary kinematyczne różnych klas i postaci. Dla złożonych układów prowadzi to do dużych, wielocłonowych modeli o złożonej strukturze, praktycznie niemożliwych do analizy bez wspomagania komputerowego.

Przedmiotem pracy jest opracowanie algorytmów i metod oraz programów komputerowych pozwalających na analizę kinematyczną i dynamiczną takich układów w sposób automatyczny. Znaczy to, że najważniejsze i najbardziej narażone na błędy etapy analizy - budowa równań kinematyki i dynamiki, oraz ich rozwiązanie, są dokonywane przez komputer automatycznie, na podstawie ogólnych danych, określających strukturę mechanizmu, rozmiary i rozkład masy członów, a także działające siły zewnętrzne. Założono, że wspomaganie realizowane będzie na komputerach klasy PC i powinno dotyczyć wszelkich praktycznie analizowanych układów maszyn, dla których można przyjmować modele w postaci układów członów sztywnych, z nałożonymi dwustronnymi więzami holonomicznymi klasy C^2 . W parach kinematycznych może występować tarcie suche. Z uwagi na zwięzłość niniejszego opracowania, algorytmy dotyczące tarcia nie będą omawiane.

Efektywność metod analizy (głównie szybkość obliczeń) oraz rodzaj formalizmu użytego do budowy równań ruchu i kinematyki, zależą silnie od wyboru współrzędnych opisujących położenie członów w przestrzeni [1]. Zwykle przy analizie układów tworzących otwarte łańcuchy kinematyczne są stosowane układy współrzędnych względnych, natomiast przy analizie układów wielocłonowych o dowolnej strukturze, także inne układy.

W związku z ogólnością zastosowań, i także dla uproszczenia etapu formułowania oraz rozwiązywania równań, przeprowadzono badania nad dwiema metodami opisu - w układzie współrzędnych *globalnych* i *względnych*. Przyjęte metody modelowania są w obydwu przypadkach różne i dlatego opracowanie można podzielić na dwie części - pierwszą (p.2, 3) obejmującą zagadnienia związane z analizą układów we współrzędnych globalnych i drugą (p.4) we współrzędnych względnych. W pierwszym przypadku szerzej są omówione zagadnienia związane z numerycznym rozwiązywaniem równań, natomiast w drugim więcej uwagi poświęca się metodzie modelowania mechanizmu.

2. Analiza kinematyczna układów wielocłonowych.

2.1 Współrzędne uogólnione.

W pracy poddano analizie trzy sposoby opisu położenia członu k w przestrzeni prowadzące do układów:

- Układ złożony ze współrzędnych kartezjańskich środka masy członu $r = [x_k \ y_k \ z_k]^T$ oraz trzech kątów Eulera $\varphi_k, \xi_k, \zeta_k$.

$$q_k = [x_k \ y_k \ z_k \ \varphi_k \ \xi_k \ \zeta_k]^T \quad (1)$$

- Układ współrzędnych *naturalnych* [2], którymi są współrzędne kartezjańskie punktów oraz układy wersorów u_i związanych z członem. Liczba punktów lp i liczba wersorów lw może być różna w zależności od rodzaju par kinematycznych w jakie wchodzi członu k .

$$q_k = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ \dots \ x_{lp} \ y_{lp} \ z_{lp} \ u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_{lw}^T]^T \quad (2)$$

- Układ współrzędnych kartezjańskich środka masy $r_k = [x_k \ y_k \ z_k]^T$ i czwórkę parametrów Eulera $p_k = [e_{0k} \ e_{1k} \ e_{2k} \ e_{3k}]^T$:

$$q_k = [r_k^T \ p_k^T] = [x_k \ y_k \ z_k \ e_{0k} \ e_{1k} \ e_{2k} \ e_{3k}]^T \quad (3)$$

Dwa ostatnie rodzaje współrzędnych pozwalają na ominięcie problemu niejednoznaczności jaki występuje przy opisie orientacji w kątach Eulera a ponadto liczba działań przy transformacji wielkości kinematycznych do różnych układów jest mniejsza [3].

Dla opisu w parametrach Eulera wektor współrzędnych uogólnionych całego układu przestrzennego c członów sztywnych swobodnych ma n składowych ($n = 7xc$):

$$q = [q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_c^T]^T \quad (4)$$

2.2 Równania więzów.

Więzy jakim podlegają człony wynikają ze wzajemnych zależności geometrycznych pomiędzy współrzędnymi opisującymi człony tworzące pary kinematyczne. Dla przykładu, połączenie w postaci przegubu kulistego (para sferyczna klasy III, rys. (1)) można opisać za pomocą równania wektorowego:

$$\bar{r}_k + A_k O_k P'_k - (\bar{r}_j + A_j O_j P'_j) = 0 \quad (5)$$

Równania więzów nałożonych na układ c członów sztywnych mogą być zapisane w postaci macierzowej jako:

$$F^p(q) = [(F_1^p(q))^T \ (F_2^p(q))^T \ \dots \ (F_c^p(q))^T]^T = 0 \quad (6)$$

Jeżeli liczba niezależnych równań w (6) jest L to liczba stopni swobody jest równa $l = n - L$.

Dla przeprowadzenia pełnej analizy kinematycznej jest konieczne zdefiniowanie więzów reonomicznych w postaci l dodatkowych równań - tzw. więzów *kierujących*:

$$F^D(q) = [(F_1^D(q,t))^T \ (F_2^D(q,t))^T \ \dots \ (F_l^D(q,t))^T]^T = 0 \quad (7)$$

Równania te wynikają z zależności określających zadanie kinematyki (proste lub odwrotne). Równania (6) i (7) tworzą pełny układ więzów.

2.3 Zadania kinematyki.

Rozwiązanie zadania na położenie dokonuje się poprzez rozwiązanie numeryczne układu równań nieliniowych postaci:

$$F^P = F^P(\mathbf{q}) = 0 \quad (8)$$

$$F^D = F^D(\mathbf{q}, t) = 0$$

Układ ten jest układem n nieliniowych równań algebraicznych. Różniczkując równania (8) jedno- i dwukrotnie względem czasu, otrzymuje się równania dla prędkości i przyspieszeń:

$$\begin{bmatrix} F_q^P \\ F_q^D \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_t^D \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} F_q^P \\ F_q^D \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -(F_q^P \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} \\ -(F_q^D \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2F_{qt}^D \dot{\mathbf{q}} - F_{tt}^D \end{bmatrix} \quad (10)$$

Układ równań (8) rozwiązuje się z wykorzystaniem klasycznego algorytmu Newtona. Układy równań (9) i (10) są układami równań liniowych (ze względu odp. na prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ i przyspieszenia $\ddot{\mathbf{q}}$). Dla realizacji numerycznej algorytmu rozwiązywania powyższych układów równań, ważne jest spostrzeżenie, że macierz jacobianowa równań więzów (8) jest macierzą rzadką. Fakt ten pozwala na zastosowanie wydajnych procedur numerycznych.

Podczas rozwiązywania zadania na położenie metodą rekurencyjną, jest konieczny wybór dobrego przybliżenia startowego \mathbf{q}_0 . W wielu sytuacjach taki wybór jest trudny. W implementacji komputerowej podanego algorytmu przewidziano dobór przybliżenia startowego z wykorzystaniem algorytmu optymalizacyjnego Fletchera - Powella. Funkcję celu zdefiniowano w postaci:

$$\Psi(\mathbf{q}, t_0, \mu) = [\mathbf{q} - \mathbf{q}_0]^T [\mathbf{q} - \mathbf{q}_0] + \mu F^T(\mathbf{q}, t_0) F(\mathbf{q}, t_0) \quad (11)$$

gdzie μ jest mnożnikiem wagowym.

Dobór mnożnika odbywa się krokowo. Początkowo jest poszukiwane minimum funkcji celu dla pewnej przyjętej arbitralnie wartości mnożnika μ , następnie wartość μ jest zwiększana np. o rząd i następuje ponowne poszukiwanie minimum. Proces kończy się, gdy spełnione są zadaną dokładnością równania więzów (8).

Podczas rozwiązywania równań (8), często zdarza się, że macierz Jacobiego układu jest osobliwa. Przypadek taki wymaga szczegółowej dyskusji. Istnieją co najmniej cztery różne jakościowo sytuacje, w których jest osobliwa:

- 1 - W układzie (8) występują równania zależne wynikające z istnienia w mechanizmie więzów kinematycznych nadmiarowych (biernych) [4][5].

- 2 - W układzie występują nadmiarowe więzy kierujące.
- 3 - Zależność równań (8) wynika z faktu, że mechanizm zajął położenie, w którym dalszy jego ruch spowodowałby "rozerwanie" więzów kinematycznych.
- 4 - Mechanizm zajął położenie osobliwe (tzw. punkt bifurkacji rozwiązań układu [6])

Opracowano sposób dalszego postępowania w każdym z wyszczególnionych przypadków. Analizę istnienia więzów redundantnych przeprowadza się z wykorzystaniem algorytmu Gaussa z częściowym i pełnym wyborem elementu podstawowego. Położenia "rozrywania" więzów przez układ wielocłonowy rozpatruje się badając prędkości i przyspieszenia mechanizmu, a w położeniach osobliwych rezygnuje się z algorytmu Newtona na korzyść metody optymalizacyjnej (11).

3. Analiza dynamiczna układu członów sztywnych - zadanie proste dynamiki.

3.1 Równania ruchu.

Równania ruchu członów w przyjętych współrzędnych można wyprowadzić, np. z równań Newtona - Eulera. Ich zapis można przedstawić w postaci:

$$M\ddot{q} = g - (F_q^p)^T \Lambda \quad (12)$$

gdzie:

M - dodatnio określona macierz opisująca rozkład masy mechanizmu,

g - wektor sił zewnętrznych,

F_q^p - macierz Jacobiego równań więzów dla połączeń,

Λ - wektor mnożników Lagrange'a.

Do dalszych rozważań przyjmuje się, że rząd F_q^p jest pełny.

3.2 Całkowanie równań ruchu.

Równanie (12) jest równaniem różniczkowo - algebraicznym o indeksie równym 3 [7] (istnieje macierz odwrócona $(F_q^p)^{-1}$). Całkowanie takich równań jest znacznie mniej zbadane niż całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych (ODE).

Ze względu na fakt, że efektywność numerycznego całkowania układu (12) ma podstawowe znaczenie dla rozwiązywania zadania, opracowano 4 metody całkowania oparte na wynikach studiów aktualnych prac poświęconych temu zagadnieniu (np. [8]).

3.2.1 Parametryzacja lokalna - metoda predyktor-korektor.

Układ równań (12) można sprowadzić lokalnie do układu równań ODE [9] wprowadzając przekształcenie Φ , takie że

$$q = \Phi(u, t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^L \quad (13)$$

Jedną z najbardziej prostych i efektywnych metod jest dobór parametru u w drodze podziału wektora q .

Podziału współrzędnych dokonuje się przez sprowadzenie macierzy Jacobiego F_q^p do postaci LU, z wykorzystaniem algorytmu Gaussa (podwójny wybór elementu

podstawowego). Kolejność eliminacji kolumn wskazuje na wybór współrzędnych niezależnych.

Można dobrać taką macierz D (wektory bazowe przestrzeni stycznej do rozmaitości więzów), że:

$$\dot{q} = D\dot{u} \quad (14)$$

Równanie (13) przyjmuje wtedy postać (dla więzów skleronomicznych)

$$D^T M D \ddot{u} = D^T g - D^T M D \dot{u} \quad (15)$$

Układ ten może być rozwiązany np. z wykorzystaniem metody predyktor-korektor [10]. W programie komputerowym wykorzystano algorytm Krough'a w zestawie procedur Shampine'a - Gordona [10].

3.2.2 Parametryzacja lokalna - metoda różnic wstecznych (BDF).

Całkowanie przebiega tutaj podobnie jak w punkcie poprzednim. Różnica polega na tym, że stosuje się całkowanie z wykorzystaniem różnic wstecznych (BDF) [11].

Konieczność stosowania tej metody wynika z faktu, że układ (15) staje się często układem sztywnym [12]. W konsekwencji, do jego całkowania numerycznego, jest pożądana metoda z dużym obszarem stabilności absolutnej.

3.2.3 Metoda całkowania bezpośredniego.

Układ (13) można przepisać w równoważnej matematycznie (ale nie numerycznie) postaci:

$$\begin{bmatrix} M & (F_q^p)^T \\ (F_q^s)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie:

$$\Gamma = -((F_q^p \ddot{q})_q \ddot{q} + F_{q_i} \ddot{q} + F_n)$$

Z układu (16) można obliczyć wektor $\ddot{q} \Lambda^T$, a następnie scałkować otrzymane równanie jako ODE. Metoda ta, szybka i prosta (macierz lewych stron jest macierzą rzadką), prowadzi często do niedopuszczalnego błędu rozwiązania równań więzów.

W efekcie jej stosowanie jest ograniczone. Korzyścią jest natomiast jednoczesne obliczenie mnożników Lagrange'a Λ , określających siły reakcji więzów [8].

3.2.4 Całkowanie metodą redukcji indeksu.

Jest to metoda która służy do całkowania równań typu DAE w dwóch etapach:

- redukcja indeksu układu (najczęściej poprzez dwukrotne różniczkowanie równań więzów,
- otrzymany w etapie pierwszym układ równań całkuje się procedurą do równań o indeksie równym 1.

Z prac teoretycznych wynika, że efektywność obliczeń zależy od metody redukcji indeksu. W testowym oprogramowaniu wykorzystano procedurę DASSL (public

domain) zaczerpniętą z servera sieci INTERNET. Metoda przedstawiona w p. 3.2.1 była najczęściej wykorzystywana w testach numerycznych.

4. Analiza układów wielocłonowych we współrzędnych względnych.

W kolejnych rozdziałach przedstawiono rekurencyjny algorytm rozwiązywania zadania prostego dynamiki dla układu wielocłonowego o dowolnej strukturze. Algorytm jest odmienny od poprzedniego co wynika z opisu mechanizmu we współrzędnych względnych.

4.1 Analiza struktury układu. Wybór współrzędnych uogólnionych.

Zakłada się, że jest znany ruch jednego z członów (podstawy) układu wielocłonowego względem przyjętego inercjalnego układu współrzędnych Π . Jeżeli w rozpatrywanym układzie nie występują pętle kinematyczne (układ ma strukturę drzewa), to współrzędne opisują względne położenie kolejnych członów w gałęzi drzewa. W takim przypadku liczba współrzędnych niezależnych opisujących cały układ jest równa jego liczbie stopni swobody. Wynika stąd, że konieczna jest wstępna analiza strukturalna mechanizmu. Jeżeli układ posiada pętle kinematyczne, to niektóre spośród par kinematycznych myślowo rozłącza się, uzyskując strukturę drzewa, którego korzeniem jest podstawa układu. Układ opisywany jest przez względne współrzędne w nie rozłączonych parach kinematycznych. Liczba współrzędnych opisujących układ jest w takim przypadku większa niż liczba jego stopni swobody. Każdej rozłączonej parze kinematycznej odpowiada pętla kinematyczna.

W układzie o strukturze drzewa dla każdego członu i można jednoznacznie wskazać jego poprzednik ip , w kierunku korzenia drzewa.

4.2 Kinematyka.

Jeżeli członu i oraz ip tworzą parę kinematyczną klasy $(6-f)$, to położenie członu i względem ip można opisać za pomocą f -elementowego wektora współrzędnych uogólnionych q_i . Przyspieszenie członu i względem ip jest liniową funkcją przyspieszeń uogólnionych:

$$a_i^f = \Phi_i(q_i, t)\ddot{q}_i + \varepsilon_i(\dot{q}_i, q_i, t) \quad (17)$$

gdzie:

a_i^f - sześciociekłowy wektor przyspieszeń względnych (trzy składowe przyspieszenia kątownego i trzy liniowego),

$\Phi_i(q_i, t)$ - macierz $(6 \times f)$,

ε_i - wektor przyspieszeń Coriolisa i dośrodkowych.

Macierz Φ_i ma rząd f . Do jej kolumn można dołączyć $(6-f)$ -kolumnową macierz Φ_i^c , tak aby powstała macierz $[\Phi_i \ \Phi_i^c]$ (6×6) była nieosobliwa. Skonstruować można także nieosobliwą macierz $[\Psi_i \ \Psi_i^c]$, taką że spełnione będzie równanie:

$$[\Psi_i \ \Psi_i^c]^T = [\Phi_i \ \Phi_i^c]^{-1} \quad (18)$$

Kolumny macierzy $[\Psi_i \ \Psi_i^c]$ stanowią bazę w przestrzeni 6-wymiarowej.

Jeżeli znane jest przyspieszenie a_{ip} członu ip względem układu Π , to przyspieszenie a_i członu i względem tego układu dane jest wzorem:

$$a_i = C_i(q_i, t)a_{ip} + \eta_i(\dot{q}_i, q_i, t) \quad (19)$$

gdzie:

$C_i(q_i, t)$ - macierz transformująca wielkości z układu ip do i ,

$\eta_i(\dot{q}_i, q_i, t)$ - sześćelementowy wektor przyspieszeń Coriolisa i dośrodkowych.

Jeżeli człony i oraz j tworzą k -tą myślowo rozłączoną parę kinematyczną klasy (6-f), to na ich przyspieszenia względem układu Π nałożone są więzy, które zapisać można w postaci:

$$(X_{i,k}^c)^T a_i + (X_{j,k}^c)^T a_j = \zeta_k \quad (20)$$

gdzie:

$X_{i,k}^c$ - macierz (6 x (6-f)),

ζ_k - wektor (6-f)-elementowy.

4.3 Dynamika.

Siłę F_i z jaką oddziałuje człon ip -ty na i -ty zapisać można w bazie $[\Psi_i \ \Psi_i^c]$:

$$F_i = \Psi_i \lambda_i + \Psi_i^c \lambda_i^c \quad (21)$$

gdzie:

λ_i - f-elementowy wektor reprezentujący siły napędowe w parze kinematycznej,

λ_i^c - (6-f)-elementowy wektor reprezentujący reakcje więzów.

Jeśli człon i wchodzi w skład k -tej rozłączonej pary kinematycznej, to pochodząca od tej pary siła działająca na człon i zapisać można następująco:

$$F_{i,k} = X_{i,k} \lambda_k + X_{i,k}^c \lambda_k^c \quad (22)$$

gdzie:

$X_{i,k}$ macierz (6 x f).

Wypadkowa siła działająca na człon i dana jest wzorem:

$$T_i = F_i + G_i - \sum_l C_l^T F_l + \sum_k (X_{i,k} \lambda_k + X_{i,k}^c \lambda_k^c) \quad (23)$$

gdzie:

l przebiega numery członów, których poprzednikiem jest człon i ,

k przebiega numery rozłączonych par kinematycznych układu,

G_i - wypadkowa sił zewnętrznych działających na człon i .

Wykorzystując równania Newtona-Eulera można ułożyć równanie ruchu dla każdego członu układu:

$$I_i \ddot{a}_i = F_i - \sum_l C_l^T F_l + \sum_k (X_{i,k} \lambda_k + X_{i,k}^c \lambda_k^c) + \beta_i \quad (24)$$

gdzie:

I_i - macierz (6 x 6) reprezentująca rozkład mas członu,
 β_i - wektor sił zewnętrznych, Coriolisa i dośrodkowych.

4.4 Zadanie proste dynamiki.

Zadanie proste dynamiki rozwiązywane jest metodą rekurencyjną. Rozpoczynając od członu położonego najdalej od korzenia drzewa dokonywany jest proces eliminacji członów i pętli z układu (rekursja w tył), a następnie proces odbudowania układu (rekursja w przód).

Proces eliminacji członu i polega na dokonaniu takich zmian w równaniach ruchu (24) i równaniach więzów (21) dla pozostałych członów układu, aby usunięte zostały z nich wielkości związane z członem i .

Proces eliminacji pętli polega na dokonaniu takich zmian w równaniach ruchu i równaniach więzów dla członów układu, aby usunięte zostały z nich wielkości związane z pętlą.

Proces odbudowania układu polega na obliczeniu poszukiwanych przyspieszeń uogólnionych.

4.4.1 Eliminacja członów.

Niech człon i nie będzie poprzednikiem żadnego członu. Jeżeli do równania ruchu dla członu i wstawione zostanie przyspieszenie dane wzorem (19) i siła dana wzorem (20), a następnie równanie zostanie lewostronnie pomnożone przez Φ_i^T , to (po uwzględnieniu (18)) wyeliminowane zostaną nie znane reakcje więzów, a z otrzymanego równania wyznaczyć będzie można przyspieszenie uogólnione:

$$\ddot{q}_i = M_i^{-1} \left[-\Phi_i^T I_i (C_i \ddot{a}_{ip} + \eta_i) + \lambda_i + \Phi_i^T \beta_i + \Phi_i^T \sum_k (X_{ik} \lambda_k + X_{ik}^c \lambda_k^c) \right] \quad (25)$$

gdzie:

$$M_i^{-1} = \Phi_i^T I_i \Phi_i$$

Po uwzględnieniu powyższej zależności w równaniu (19), otrzymuje się:

$$\ddot{a}_i = C_i \ddot{a}_{ip} + \eta_i + \Phi_i M_i^{-1} \left[-\Phi_i^T I_i (C_i \ddot{a}_{ip} + \eta_i) + \lambda_i + \Phi_i^T \beta_i + \Phi_i^T \sum_k (X_{ik} \lambda_k + X_{ik}^c \lambda_k^c) \right] \quad (26)$$

Wstawiając otrzymany związek do równania ruchu dla członu i uzyskuje się równanie:

$$F_i = N_i C_i \ddot{a}_{ip} + \gamma_i - (E - I_i \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T) \sum_k (X_{ik} \lambda_k + X_{ik}^c \lambda_k^c) \quad (27)$$

gdzie:

$$N_i = I_i - I_i \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T I_i,$$

$$\gamma_i = N_i \eta_i + I_i \Phi_i M_i^{-1} (\lambda_i + \Phi_i^T \beta_i) - \beta_i,$$

E - macierz jednostkowa,

w którym nie występuje przyspieszenie a_i .

Siłę daną wzorem (27) można wstawić do równania ruchu dla poprzednika członu i , eliminując z równania wielkości związane z członem i . Równanie ruchu dla członu ip zachowa nie zmienioną postać po usunięciu wielkości związanych z członem i , jeśli dokonane zostaną podstawienia:

$$I_{ip} := I_{ip} + C_i^T N_i C_i$$

$$\beta_{ip} := I_{ip} - C_i^T \gamma_i$$

oraz dla wszystkich myślowo rozłączonych par kinematycznych k :

$$X_{ip,k} := X_{ip,k} + C_i^T (E - I_i \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T) X_{i,k}$$

$$X_{ip,k}^c := X_{ip,k}^c + C_i^T (E - I_i \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T) X_{i,k}^c$$

Jeżeli człon i wchodzi wraz z członem j w skład myślowo rozłączonej pary kinematycznej k , to spełnione musi być równanie więzów (22), które przepisać można w postaci:

$$X_{i,k}^c{}^T a_i + X_{j,k}^c{}^T a_j + \sum_m (D_{k,m} \lambda_m + B_{k,m} \lambda_m^c) = \zeta_k$$

m przebiega numery rozłączonych par kinematycznych.

Macierze $D_{k,m}$ i $B_{k,m}$ są początkowo zerowe i ulegają zmianie w trakcie procesu eliminacji.

Jeżeli do równania (28) wstawione zostanie przyspieszenie dane wzorem (26), to wyeliminowane zostaną wielkości związane z członem i . Postać równania więzów nie ulegnie zmianie po eliminacji wielkości związanych z członem i , jeśli dokonane zostaną następujące podstawienia:

- dla wszystkich myślowo rozłączonych par kinematycznych k :

$$\zeta_k := \zeta_k - X_{i,k}^c{}^T (\eta_i + \Phi_i M_i^{-1} (\lambda_i + \Phi_i^T (\beta_i - I_i \eta_i)))$$

- dla wszystkich dwójek myślowo rozłączonych par kinematycznych k i m :

$$B_{k,m} := B_{k,m} - X_{i,k}^c{}^T \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T X_{i,m}^c$$

$$D_{k,m} := D_{k,m} - X_{i,k}^c{}^T \Phi_i M_i^{-1} \Phi_i^T X_{i,m}$$

Jeżeli z układu usunięty został człon i , to można wyeliminować następny, który nie jest poprzednikiem innego członu. Procedurę eliminacji prowadzi się aż do członu, będącego ostatnim, nie usuniętym członem należącym do pętli kinematycznej. Dokonuje się wtedy eliminacji tej pętli, a następnie powraca do eliminacji członów.

4.4.2 Eliminacja pętli.

Proces eliminacji pętli prowadzi do obliczenia nie znanych wcześniej reakcji więzów w myślowo rozłączonych parach kinematycznych. Niech L oznacza zbiór wszystkich pętli w układzie. Niech $LR(i)$ oznacza zbiór pętli kinematycznych, których ostatnim nie wyeliminowanym członem jest człon i . Równania więzów dla myślowo rozłączonych par kinematycznych k, \dots, l odpowiadających pętlom ze zbioru $LR(i)$ można zapisać łącznie w postaci macierzowej:

$$X_i^{c*T} a_i + D_i^* \lambda_i^* + B_i^* \lambda_i^{c*} + \sum_m (D_{i,m}^* \lambda_m + B_{i,m}^* \lambda_m^c) = \zeta_k^*$$

gdzie:

m przebiega numery rozłączonych par należących do $LR(i)$,

$$X_i^{c*} = [X_{i,k}^c, \dots, X_{i,l}^c]$$

$$D_i^* = \begin{bmatrix} D_{k,k} & \dots & D_{k,l} \\ D_{l,k} & \dots & D_{l,l} \end{bmatrix}, \quad B_i^* = \begin{bmatrix} B_{k,k} & \dots & B_{k,l} \\ B_{l,k} & \dots & B_{l,l} \end{bmatrix}$$

$$D_{i,m}^{*T} = [D_{k,m}^T, \dots, D_{l,m}^T], \quad B_{i,m}^{*T} = [B_{k,m}^T, \dots, B_{l,m}^T]$$

$$\lambda_i^{*T} = [\lambda_{i,k}^T, \dots, \lambda_{i,l}^T], \quad \lambda_i^{c*T} = [\lambda_{i,k}^{cT}, \dots, \lambda_{i,l}^{cT}], \quad \zeta_i^{*T} = [\zeta_k^T, \dots, \zeta_l^T]$$

Z powyższego równania można wyznaczyć λ_i^{c*} :

$$\lambda_i^{c*} = B_i^{*-1} \left[\zeta_k^* - X_i^{c*T} a_i - D_i^* \lambda_i^* - \sum_m D_{i,m}^* \lambda_m + B_{i,m}^* \lambda_m^c \right] \quad (29)$$

Jeśli w układzie występują więzy nadmiarowe, to macierz B_i^{*-1} jest osobliwa. Sposób postępowania z układami zawierającymi więzy nadmiarowe został opisany w pracy [13] i nie będzie tutaj dyskutowany.

Jeżeli w równaniu ruchu dla członu i uwzględniona zostanie zależność (29), to wyeliminowane zostaną wielkości związane z pętlami kinematycznymi ze zbioru $LR(i)$. Równanie ruchu członu i nie zmieni swojej postaci, jeśli dokonane zostaną podstawienia:

$$I_i := I_i + X_i^{c*} B_i^{*-1} X_i^{c*T}$$

$$\beta_i := \beta_i + X_i^{c*} B_i^{*-1} \zeta_i^* + (X_i^* - X_i^{c*} B_i^{*-1} D_i^*) \lambda_i^*$$

oraz dla rozłączonych par kinematycznych m odpowiadających pętlom ze zbioru $L \setminus LR(i)$:

$$X_{i,m} := X_{i,m} - X_i^{c*} B_i^{*-1} D_{i,m}^*$$

$$X_{i,m}^c := X_{i,m}^c - X_i^{c*} B_i^{*-1} B_{i,m}^*$$

Jeżeli zależność (29) wstawimy do równań więzów dla pętli ze zbioru $L \setminus LR(i)$, to usunięte z nich zostaną wielkości związane z pętlami ze zbioru $LR(i)$. Równania więzów zachowują nie zmienioną postać, jeśli dokonane zostaną podstawienia:

- dla myślowo rozłączonych par kinematycznych m ze zbioru $L \setminus LR(i)$:

$$\zeta_k := \zeta_k - \mathbf{B}_{i,m}^{*T} \mathbf{B}_i^{*-1} \zeta_i + \mathbf{B}_{i,m}^{*T} \mathbf{B}_i^{*-1} \mathbf{D}_i^* \lambda_i - \sum_m \mathbf{D}_{m,k} \lambda_k$$

- dla myślowo rozłączonych par k i m ze zbioru $LLR(i)$:

$$\mathbf{D}_{m,k} := \mathbf{D}_{m,k} - \mathbf{B}_{i,m}^{*T} \mathbf{B}_{i,m}^{*-1} \mathbf{D}_{m,k}^*$$

$$\mathbf{B}_{m,k} := \mathbf{B}_{m,k} - \mathbf{B}_{i,m}^{*T} \mathbf{B}_{i,m}^{*-1} \mathbf{B}_{m,k}^*$$

Po dokonaniu podstawień eliminujących wielkości związane z pętlami ze zbioru $LR(i)$ z równania ruchu członu i oraz z równań więzów, zbiór pętli L zmniejszany jest o zbiór $LR(i)$:

$$L := L \setminus LR(i),$$

co kończy proces eliminacji pętli.

4.4.3 Odbudowanie układu.

Proces eliminacji członów kończy się po osiągnięciu podstawy układu. Jeśli istnieją pętle kinematyczne, w których skład wchodzi podstawa, to należy je usunąć, obliczając macierz \mathbf{B}_0^{*-1} i nie znane wcześniej wielkości λ_0^* .

Aby obliczyć względne przyspieszenia uogólnione w parach kinematycznych należy odbudować układ w kolejności odwrotnej niż kolejność eliminacji członów.

Niech układ będzie odbudowany do członu i włącznie. Wszystkie wielkości po prawej stronie równania (25) są znane, można zatem obliczyć przyspieszenia uogólnione.

Mnożąc równanie ruchu (24) członu i przez Φ_i^{*T} i wykorzystując związek (18) otrzymuje się po uporządkowaniu:

$$\lambda_i^c = \Phi_i^{*T} [\mathbf{I}_i \mathbf{a}_i - \sum_k (\mathbf{X}_{i,k} \lambda_k + \mathbf{X}_{i,k}^c \lambda_k^c) - \beta_i]$$

Korzystając z powyższego równania obliczyć można reakcje więzów w parze kinematycznej tworzonej przez człon i oraz jego poprzednik.

Jeżeli podczas procesu eliminacji zbiór $LR(i)$ nie był pusty, to korzystając ze wzoru (29) należy obliczyć reakcje więzów w myślowo rozłączonych parach kinematycznych odpowiadających pętlom ze zbioru $LR(i)$.

Proces odbudowywania układu kończy się po osiągnięciu ostatniego członu układu.

4.5 Rozwiązywanie równań ruchu.

Otrzymany układ równań jest układem równań różniczkowych zwyczajnych. Do jego numerycznego scałkowania użyto procedury Shampine'a - Gordona [10].

5. Programy numeryczne. Testy.

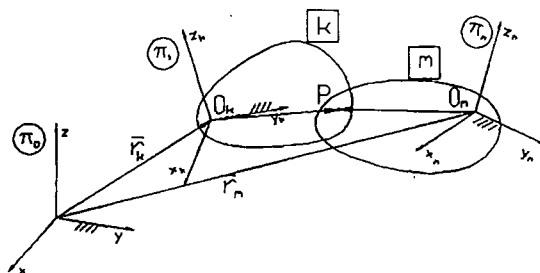
Na podstawie metod przedstawionych w punktach 2 i 3 oraz 4 zbudowane dwa niezależne programy numeryczne, zaimplementowane na komputerze typu PC. Dane do programów wpisuje się w języku problemowo-zorientowanym.

Dla sprawdzenia poprawności działania algorytmów i programów przeprowadzono szereg testów na przykładach, dla których są znane rozwiązania analityczne lub doświadczalne.

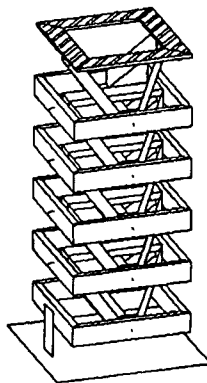
Jednym z bardziej wymagających testów jest analiza dynamiczna mechanizmu modelu manipulatora typu *spine* (rys. 2) opracowanego w Zespole Robotyki i Biomechaniki Technicznej PW [14]. Segment manipulatora i jego schemat kinematyczny pokazano na rysunku 3. Składa się on z dziesięciu członów, dziesięciu par kinematycznych V klasy i czterech II klasy. Łańcuch kinematyczny jest zamknięty a ruchliwość mechanizmu jest równa 2. Mechanizm jest napędzany za pomocą dwóch siłowników hydraulicznych zaczepionych przegubowo w punktach A1 i B1 do podstawy i odpowiednio w punktach A i B do manipulatora. Przebiegi czasowe rozwijanych sił pokazano na rys. 4. Zadanie polega na znalezieniu położenia punktu C (środką masy ostatniego członu) w funkcji czasu. Rozwiązanie tego zadania z zastosowaniem pakietu programów polega na wczytaniu ogólnych danych i odczycie rozwiązań w postaci wykresów ruchu lub tabel. Wykresy ruchu punktu C przedstawiono na rys. 5.

Piśmiennictwo.

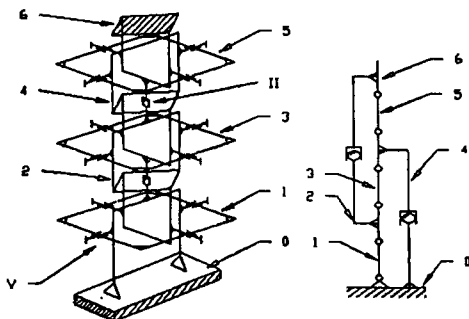
1. W. Schiehlen (editor): "Multibody System Handbook". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1990.
2. Garcia de Jalon et al: "Real Time Simulation of Complex 3-D Multibody Systems with Realistic Graphics" in "Real - Time Integration Methods for Mechanical System Simulation" edited by Deyo C. NATO ASI Series., vol. 69. Springer Verlag 1991.
3. Nikravesh P.E: "Computer Aided Analysis of Mechanical Systems". Prentice Hall 1988.
4. Frączek J.: "Kinematic and Dynamic Analysis of Multilink Robots". 23 rd ISIR, Proceedings, Barcelona 6-9 th October 1992.
5. Haug E.J: "Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems". Massachusetts, Allyn and Bacon, Needham Heights, 1989.
6. Birkholc A.: "Analiza matematyczna". Warszawa, PWN 1986.
7. Gear C.W., Petzold L.R.: "One Methods for the Solutions of DAE". SIAM J. of Numerical Analysis, 1984, vol.21, No.4, pp 716-728.
8. Brenan K.E. et al: "Numerical Solution of Initial - Value Problems in DAE". North Holland, New York 1989.
9. Frączek J.: "Komputerowa metoda analizy dynamicznej łańcuchów kinematycznych manipulatorów. Praca Doktorska. Politechnika Warszawska 1989.
10. Shampine L.F., Gordon M.K.: "Computer Solution of ODE: The Initial Value Problems". San Francisco, W.S.Freeman 1975.
11. Haug E.J, Jeng Y.: "Implicit Numerical Integration of Constrained Equations of Motion via Generalized Coordinate Partitioning", ASME Journal of Mechanical Design, 1992, vol.2, pp.296-304.
12. Frączek J.: "Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction. Part I. Theory". ABM, 1993, vol. XL, pp. 81-93.
13. Wojtyra M., Frączek J.: "Zadanie proste dynamiki dla mechanizmów z więzami nadmiarowymi. Część I, II i III". Materiały IV Konferencji Robotyki. Wrocław 1993.
14. Buśko Z., Frączek J, Morecki A.: "Structural Synthesis, Dynamical Analysis and Experimental Investigations of Multilink Elastic Robot Systems (Spine Type)". Eight CISM - IFToMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Cracow, 2-6 July, 1990.



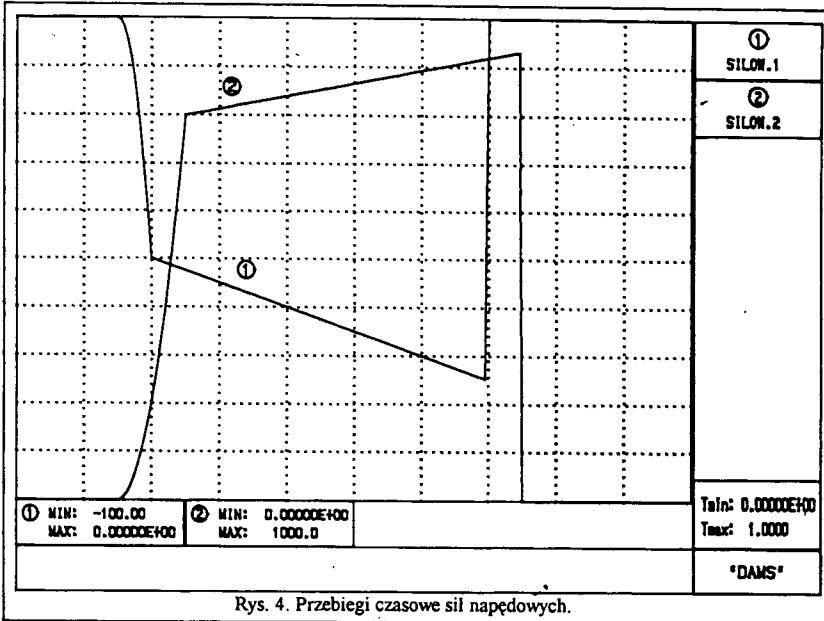
Rys. 1. Para sferyczna.



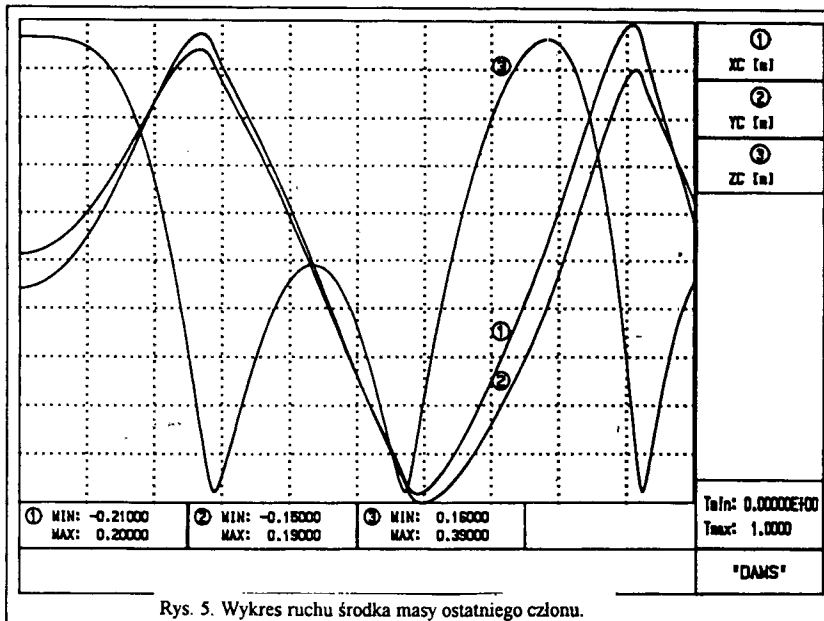
Rys. 2. Manipulator typu spine.



Rys. 3. Segment i schemat kinematyczny manipulatora.



Rys. 4. Przebiegi czasowe sił napędowych.



Rys. 5. Wykres ruchu środka masy ostatniego członu.